

# AKFVM Numerische Bepreisung von Derivaten

## Aufgabenzettel 2

SS 2008, TU Wien, Reinhold Kainhofer

*Bsp. 2.1)* Sei  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(X, X^2)$ .

- Bestimme  $\mathbb{E}[Y]$  und  $Var(Y)$  analytisch.
- Sei  $f(y) = \max(0, y^2 - 7)$ . Schätze  $\mathbb{E}[f(Y)]$  durch klassische Monte Carlo Simulation.
- Versuche eine geeignete Dichte für Importance Sampling zu finden!
- Bestimme (numerische) die neue Varianz und den Wert von  $\mathbb{E}[f(Y)]$  mittels Importance Sampling
- Benutze diese Dichte, um auch  $\mathbb{E}[Y]$  zu schätzen und vergleiche die Entwicklung des Fehlers (in Abhängigkeit von  $N$ ) mit dem klassischen Monte Carlo Schätzer (wie kann dieser simuliert werden?)!

*Bsp. 2.2)*  $X$  und  $Y$  wie im letzten Beispiel. Sei  $g(y) = \max(0, y + \alpha) - \alpha$ . Benutze  $Y$  als Kontrollvariable für  $g(Y)$ ! Wie sieht die optimale Wahl von  $\alpha^*$  aus, wie groß ist die neue Varianz, wie entwickelt sich der Fehler?

*Bsp. 2.3)* Bestimme (numerisch) das optimale  $\alpha^*$  für die Bepreisung einer amerikanischen Option mittels europäischer Option als Kontrollvariable! Bestimme die daraus resultierende optimale Varianz des neuen Schätzers.

*Bsp. 2.4)* Benutze antithetische Pfade im Black-Scholes Modell. Wie verbessert sich der Fehler für den Preis und die Varianz (unter  $\mathbb{Q}$ ) einer plain Vanilla europäischen Option? Simuliere  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  und  $Var_{\mathbb{Q}}$  sowohl mit einfachen als auch mit antithetischen Pfaden und vergleiche die Entwicklung der Werte mit den bekannten exakten Werten! ( $Var_{\mathbb{Q}}$  sollte analog zu  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  im B-S Modell zu bestimmen sein!)

*Bsp. 2.5)* Betrachte eine Asiatische Option (als diskretes Mittel über  $t_n = \frac{n}{N}T$  für  $n = 1, \dots, N$ ) im B-S Modell. Bestimme die Varianz des Schätzers mit antithetischen Variablen und vergleiche sie mit der Varianz bei unabhängigen Pfaden.

*Bsp. 2.6)* Benutze  $(U, (\frac{2}{3} - U) \bmod 1)$  als antithetisches Paar. Wie sind sie korreliert, wie ändert sich die Varianz? Zeige numerisch die Fehlerordnung und die Konstante für  $\mathbb{E}[u^2]$ ,  $\mathbb{E}[\frac{1}{u}]$ , etc.

*Bsp. 2.7)* Hull 17.5 (Asiatische Option im Baum?)

*Bsp. 2.8)* Hull 17.8 ( $\pi$  durch MC geschätzt; Welche  $A_i$  bei stratified sampling?)

*Bsp. 2.9)* Hull 17.16 (Kontrollvariable und antithetische Variablen für europäische Option mit stoch. Volatilität)

*Bsp. 2.10)* Hull 17.25 ( $\Delta$  **und**  $\Gamma$  im Baum)

*Bsp. 2.11)* Hull 17.27 (fixe Dividende im Baum)

*Bsp. 2.12)* Hull 17.29 (alternative Konstruktion von Bäumen)