AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik

Übungsbeispiele zur Lehrveranstaltung
Teil 1

Reinhold Kainhofer

Sommersemester 2009

Institut für Wirtschaftsmathematik
FG Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

Inhaltsverzeichnis

AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik
Übungszettel 1

FAM, TU Wien, Reinhold Kainhofer

Kapitel 1: Monte Carlo Verfahren

Literatur: [Gla04], [Fis96], [Jäc02], [Nie92]

1 Voraussetzungen, Approximation, stochastische Fehlerordnung

Bsp. 1) Zeige den Satz aus der Vorlesung, dass für $f \in L^2(\lambda)$ für alle $n \geq 1$ gilt, dass

$$\mathbb{E}_{U(0,1)^{Ns}} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) - \mathbb{E}[f] \right)^2 \right] = \frac{\sigma^2(f)}{N}$$

Bsp. 2) Mittels des Zentralen Grenzwertsatzes leite asymptotische Aussagen für $N \to \infty$ über die Konfidenzintervalle her!

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P} \left(\frac{c_1 \sigma(f)}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) - \mathbb{E}[f] \leq \frac{c_2 \sigma(f)}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_1}^{c_2} e^{-t^2/2} dt$$

Bsp. 3) (Betrachte die (antisymmetrische) Funktion

$$g(x) = \sin\left(5 \sum_{i=1}^{s} x^{(s)}\right), \qquad \text{mit } x \in [-2\pi, 2\pi]^2 .$$

(a) Benutze die Trapezregel, um $\int_{[0.01,1.01]^s} g(x)dx$ numerisch zu bestimmen (für verschiedene N bzw. ε_n). Wie groß ist die Fehlerordnung empirisch?

(b) Benutze die Monte Carlo Methode um $\int_{[0.01,1.01]^s} g(x)dx$ zu bestimmen. Betrachte $N = 2, 4, 8, 16, \ldots$ und überprüfe die Fehlerordnung.

(c) Finde einen MC-Schätzer für $\sigma(f)$.

Führe die Rechnungen für $s = 2$, $s = 20$ und $s = 200$ durch!)

Bsp. 4) Wähle eine beliebige, s-dimensionale Funktion, die idealerweise analytisch in s Dimensionen integrierbar sein sollte. Führe dieselben Punkte wie im letzten Beispiel aus! Falls die Funktion nicht analytisch integrierbar ist, wie kann man dennoch die Fehlerordnung rausfinden?

AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik
Übungszettel 2

FAM, TU Wien, Reinhold Kainhofer

2 Simulation

Bsp. 5) Betrachte einen Random Walk X, bei dem in jedem Schritt $X_{k+1} = X_k + U$, $U \sim U(0,1)^s$ mit $X_0 = 0$ gilt. Wie sieht die Verteilung nach $K = 1, 2, 3, \dots, 10, 20, 30, \dots, 100$ Schritten aus? Benutze $s = 1, 2, 3$.

Bsp. 6) Betrachte ein Binomialmodell

$$x_{i+1} = \begin{cases} u_i(x_i)x_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q_i \\ d_i(x_i)x_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - q_i \end{cases}$$

Die Zuwachsfaktoren lauten

$$u_i(x_i) = \begin{cases} 1.2 & \text{wenn } x_i \geq 5, \\ 1.3 & \text{wenn } x_i < 5 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad d_i(x_i) = \begin{cases} 0.6 & \text{wenn } x_i \geq 10, \\ 0.8 & \text{wenn } x_i < 10 \end{cases}$$

Dieser Baum ist nicht rekombinierend, also kein Binomialgitter.

Betrachte eine (Call- oder Put-) Option mit $K = 5$, $T = 30$ und $x_0 = 7$. Bewerte diese Option Mittels Monte Carlo bei einem Zins von $r_t = 0$.

Hinweis: Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß ist $q_i = \frac{e^{r_i} - d_i}{u_i - d_i}$.

Bsp. 7) Versuche einen mean-reverting Prozess (z.B. $dr_t = \alpha(\mu - r_t)r_t + \beta dW_t$ oder mit quadratischem Rückstellterm) mittels Pfadsimulation und mittels Teilchensimulation zu simulieren. Simuliere konkret die Verteilung zu zwei Zeitpunkten, wobei die Schrittweite deutlich kleiner sein soll.

Bsp. 8) Betrachte einen Prozess S_t, der sich auf einem Gitter der Weite $\frac{1}{\Delta t}$ entsprechend folgender (zeitabhängiger!) Dynamik (unter $\mathbb{Q}$) entwickelt mit $S_0 = 2$ und $0 \leq t \leq 20$:

$$\Delta S_t = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \times \begin{cases} 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_2 = \left(\frac{1}{4} - tS_t/20\right)^+, \text{ wenn } S_t \leq 20 \\ 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_1 = \left(\frac{1}{4} - tS_t/40\right)^+, \text{ wenn } S_t \leq 20 \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_0 = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_{-2} = 1 - p_2 - p_1 - p_0 \end{cases}$$

Benutze Teilchensimulation, um für jeden Zeitpunkt den Erwartungswert der Verteilung von S_t zu bestimmen.

Hinweis: Bei der Implementation empfiehlt es sich, die drei Fälle $\min(\frac{10}{t}, 20) \leq S_t$, $\frac{5}{t} \leq S_t \leq \frac{10}{t}$ und $S_t \leq \frac{5}{t}$ zu unterscheiden.

3 gleichverteilte Pseudo-Zufallszahlen

Siehe auch [Gla04, Chapter 2.1], [Jäc02], [Knu81].

3.1 Lineare Kongruenzgeneratoren

Bsp. 9) Zeige: Sind a und m relativ prim, so tritt X_0 während der Periode auf. Sind a und m nicht relativ prim, zeige die Probleme der Folge auf!

Bsp. 10) Sei $m = 2^l$, $X_0 = 0$ und a und c erfüllen die Voraussetzungen des Theorems aus der Vorlesung (notwendige und hinreichende Bedingungen, dass LKG Periode m hat). Was ist der Wert von $X_{2^{l-1}}$? Wie sieht es bei anderen Basen $m = 3^l$, etc. aus?

Bsp. 11) Erzeuge Pseudo-Zufallsfolgen für verschiedene Werte von a, c und m und prüfe das Theorem empirisch nach.

3.2 Tests für Pseudo-Zufallszahlen

Bsp. 12) Erzeuge Samples mit einem LKG mit beliebig gewählten Parametern und führe den χ^2-Test und den Kolmogorov-Smirnoff-Test durch.

Bsp. 13) Teste ein paar Generatoren mit den vorgestellten Tests und mit anderen Tests (Internet!).

Bsp. 14) Teste ein paar Generatoren mit dem Spektraltest! Wie kann man die Werte verstehen?

AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik
Übungszettel 3

FAM, TU Wien, Reinhold Kainhofer

4 Nicht-gleichverteilte Zufallszahlen

Siehe auch [Gla04, Chapter 2.2 und 2.3], [Dev86]

4.1 Allgemeine Verfahren

Inversionsmethode

Bsp. 15) (logistische Verteilung) Es ist $X \sim Logist(a,b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, wenn

$$F(x) = 1/\left(1 + e^{-\frac{x-a}{b}}\right), \qquad \begin{cases} a & \ldots \text{Translation} \\ b & \ldots \text{Skalierung} \end{cases}$$

Die Dichte von $Logist(0,1)$ lautet also

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = F(x)(1-F(x)).$$

Zeige:

(a) $U \sim U(0,1) \Rightarrow X = \log\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim Logist(0,1)$

(b) $\frac{U}{1-U} =^F \frac{E_1}{E_2}$, wobei $E_1, E_2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$.

(c) Es ist $Z \sim EVD(a)$ (Extremwertverteilung), wenn $F(x) = \exp(-a\exp(-x))$. Zeige: Wenn $X \sim EVD(Y)$ mit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, dann ist $X \sim Logist(0,1)$.

(d) $\mathbb{E}[X^2] = \frac{\pi^2}{3}$, $\mathbb{E}[X^4] = \frac{7\pi^4}{15}$.

(e) $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} EVD(a) \Rightarrow X_1 - X_2 \sim Logist(\cdot,\cdot)$.

Bsp. 16) Erzeuge Samples der logistischen Verteilung.

Acceptance-Rejection

Bsp. 17) Erzeuge Zufallszahlen nach der Halb-Normalverteilung $\mathcal{N}^+(0,1)$:

$$f(z) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad 0 \le z < \infty$$

mittels Acceptance-Rejection Methode. (Faktorisiere $f(x)$ in $\mathcal{E}(1)$ und $g(z)$.) Erzeuge daraus $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte ZV! (Benutze eine unabh. ZV $W \sim U(0,1)$ und ändere das Vorzeichen, wenn $W \le \frac{1}{2}$.)

Bsp. 18) Der Algorithmus:

(a) Erzeuge X mit Dichte g

(b) Erzeuge $E \sim \mathcal{E}(1)$

(c) bis $h(x) \le E$ (mit $h(x) \ge 0$)

erzeugt Zufallsvariablen X mit Dichte $cg(x)e^{-h(x)}$, wobei c eine Normierungskonstante ist. Zeige dies!

Ratio-of-Uniforms Methode

Bsp. 19) Erzeuge Zufallszahlen, die nach der IG Dichte verteilt sind:

$$f_{IG}(x) = \frac{\delta e^{\delta\gamma}}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\delta^2 \frac{1}{x} + \gamma^2 x\right)\right), \qquad x > 0$$

mit Parametern $\delta, \gamma > 0$. (Eine Klasse von Lévy-Prozessen—siehe später—hat NIG-Zuwächse, welche gegeben sind durch

$$\mu + \beta Y(1) + \sqrt{Y(1)} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1), Y(1) \sim IG(\gamma, \delta)\,,$$

was einer Brown'sche Bewegung W mit Drift entspricht, wobei die Zeit skaliert wird mit dem Prozess Y, also $Z_{IG}(t) = W(Y(t))$.)

Bsp. 20) (Barbu, 1982) Zeige: Ist $(U, V) \sim U(A$ mit $A = \{(u, v) : 0 \leq u \leq f(u + v)\}$, dann hat $u+v$ eine Dichte $c \cdot f$. Analog: Wenn $0 \leq u \leq f(v/\sqrt{u})^{2/3}$, dann hat $v/\sqrt{u}$ die Dichte $c \cdot f$.

Bsp. 21) Gib ein Beispiel für eine Verteilung an, wo A nicht beschränkt ist in u! Selbiges für v. Gib auch eine Verteilung an, wo A sowohl in u als auch in v nicht beschränkt ist.

Bsp. 22) Sei f eine Mischung von gleichverteilten Dichten (auf disjunkten Intervallen unterschiedlicher Länge). Zeichne den Bereich A.

4.2 spezialisierte Verfahren: Box-Muller

Bsp. 23) Erzeuge $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen auf verschiedene Arten (Acceptance-Rejection, numerische Inversion, arithmeth. Mittel von n iid. Zufallszahlen $\Rightarrow$ ZGWS, Box-Muller, Ratio-of-Uniforms, ...) und vergleiche sowohl den Aufwand als auch die Ergebnisse!

Bsp. 24) Sei $Z \sim \mathcal{N}(0, I_2)$, d.h. $Z_1, Z_2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$. Dann ist

(a) $R = Z_1^2 + Z_2^2 \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ $\left[= \chi_2^1\right]$.

(b) Gegeben R ist (Z_1, Z_2) gleichverteilt auf dem Kreis mit Radius $\sqrt{R}$ um den Ursprung (d.h. der Winkel ist gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$).

AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik
Übungszettel 4

FAM, TU Wien, Reinhold Kainhofer

5 Simulation von Pfaden

Siehe [Gla04], [Fis96]

5.1 Brown'sche Brücke

Bsp. 25) Erzeuge Pfade der Brown'schen Bewegung mit den verschiedenen Methoden. Was sind die Unterschiede (Aufwand, etc.)? Bewerte asiatische Optionen auf ein Wertpapier, das der BB folgt.

Bsp. 26) Bewerte eine Barrier-Option vom Down & Out Typ auf eine Aktie, die der Brown'schen Bewegung folgt. Der Payoff lautet

$$P = (S(T) - K)^+ \mathbf{1}_{(\min_{i=1,\dots n} S(t_i) \geq B)}, \text{ mit } B \dots \text{Barriere}$$

Bsp. 27) Wie sieht die Brückenkonstruktion bei Brown'scher Bewegung mit Drift aus?

Bsp. 28) Finde eine Brücken-Konstruktion für die Geometrische Brown'sche Bewegung.

Bsp. 29) Sei $r = 0.05$ am Markt. Betrachte einen Kurs, der nach der geometrischen Brown'schen Bewegung verteilt ist (also $X \sim GBM(r, \sigma^2)$ unter dem risikoneutralen Maß). Bewerte eine Lookback-Option mit Maturity $T = t_n$ und Payoff

$$\left(\max_{i=1,\dots,n} S(t_i) - S(T)\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(S(T) - \min_{i=1,\dots,n} S(t_i)\right).$$

5.2 Levy-Prozesse

Bsp. 30) Bewerte eine Option auf eine Aktie, die Variance-Gamma-verteilt ist (unter dem risikoneutralen Maß), mit Payoff

$$\max\left((S(\frac{T}{2}) - K)^+, (S(T) - K)^+\right).$$

Bsp. 31) Erzeuge Pfade eines NIG-Prozesses mit selbst gewählten Parametern. Sind die Pfade wirklich von einer Brown'schen Bewegung unterscheidbar?

AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik
Übungszettel 5

FAM, TU Wien, Reinhold Kainhofer

6 Varianzreduktion

6.1 Importance Sampling

Bsp. 32) Knock-in Option (Beispiel 4.6.4 aus [Gla04]) mittels Importance Sampling.

6.2 Control Variates

Bsp. 33) Beweise: Seien X, Y Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ_X und μ_Y, Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 und Kovarianz σ_{XY}. Es sei μ_X bekannt, μ_Y soll bestimmt werden. Dann gilt:

(a) $W(\alpha) = Y - \alpha(X - \mu_X)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für μ_Y für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit Varianz

$$varW(\alpha) = \sigma_Y^2 - 2\alpha\sigma_{XY} + \alpha^2\sigma_X^2$$

(b) $\alpha^* = \sigma_{XY}/\sigma_X^2$ minimiert die Varianz mit $\operatorname{Var} W(\alpha^*) \leq \operatorname{Var}(Y)$.

Bsp. 34) Im Black-Scholes Framework bestimme den Preis einer asiatischen Option ($t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $\dots$, $t_{10} = 10$) und benutze die europäische Option als Kontrollvariable. Vergleiche die Varianz mit direkter Monte Carlo Simulation.

Bsp. 35) Bestimme numerisch die Varianz für verschiedene Werte von α.

6.3 Antithetische Zufallsvariablen

Bsp. 36) Betrachte eine asiatische Option auf ein Wertpapier, das der Brown'schen Bewegung $BM(\mu, \sigma^2)$ folgt. Ist die Varianzreduktion abhängig wie hoch der Ausübungspreis ist?

Bsp. 37) Betrachte eine asiatische Option auf ein Wertpapier, das der geometrischen Brown'schen Bewegung $GBM(\mu, \sigma^2)$ folgt. Wie sehr kann die Varianz durch antithetische Zufallsvariablen reduziert werden?

Bsp. 38) Benutze anstelle von $(U, 1-U)$ das Paar $(U, (\frac{1}{3} - U) \mod 1)$ bzw. das Paar $(U, (\frac{2}{3} - U) \mod 1)$. Auch hier gilt $U \stackrel{d}{=} \widetilde{U}$. Sind diese Variablen jeweils negativ korreliert? Wie ändert sich die Varianz des Schätzers $\widehat{Y}_{AV}$? Gibt es eine Varianzreduktion?

Bsp. 39) Beispiel 2.H.10 ("Investment decision") und 4.H.8 ("Introducing Correlation (Antithetic Variates)") aus [Fis96]

6.4 Stratified Sampling

Bsp. 40) Erzeuge N iid. Samples nach $\mathcal{N}(0,1)$ und vergleiche sie (z.B. Histogramm, etc.) mit $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Samples die durch stratified Sampling erhalten werden, wobei jeweils $\frac{N}{k}$ iid. $U(0,1)$ Samples auf $\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$, $i = 0, \dots, k-1$ gesampelt und durch Inversion auf $\mathcal{N}(0,1)$ transformiert werden.

AKVFM Numerische Methoden in der Finanz- und Versicherungsmathematik
Übungszettel 6

FAM, TU Wien, Reinhold Kainhofer

7 Quasi-Monte Carlo Methoden (Integration)

Literatur: [Nie92, bis Seite 100] Weiterführende Literatur: [Gla04], [Nie92], [KN74a]

Bsp. 41) Erzeuge die 2-dimensionale Halton-Folge in verschiedenen Basen (b_1, b_2). Was fällt bei der Wahl der Basen auf?

Bsp. 42) Vergleiche den numerischen Wert der Diskrepanz der Van-der-Corput Folge mit der Diskrepanz einer Pseudo-Zufallsfolge!

Bsp. 43) Verallgemeinere das Konzept der Diskrepanz auf andere Verteilungen als die Gleichverteilung. Zeige, dass bei der Inversionsmethode (in Dimension $d = 1$) die Diskrepanz erhalten bleibt.

Bsp. 44) Zeige die Koksma-Ungleichung ($d = 1$) für allgemeine eindimensionale Verteilungen!

Bsp. 45) Berechne verschiedene Integrale (auf $[0, 1]^d$) mit verschiedenen Folgen kleiner Diskrepanz sowie mit Zufallszahlen und stelle die Konvergenzordnung (als Log-Log-Plot) grafisch dar. Ist ein Unterschied zwischen Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo erkennbar? Verhalten sich die diversen Folgen kleiner Diskrepanz ähnlich?

Bsp. 46) Berechne "unschöne" Integrale (z.B. Integranden mit Sprüngen wie etwa Indikatorfunktionen, stark variierende Integranden etc.) mit Monte Carlo und mit Quasi-Monte Carlo. Ist das Verhalten des Fehlers und die Verbesserung der Ordnung durch QMC unabhängig von der zu integrierenden Funktion?

Bsp. 47) Für Integranden in einer Dimension mit einer Singularität ist die Koksma-Ungleichung in einer Dimension nicht anwendbar, da $V(f) = \infty$. Der Beweis kann allerdings verfeinert werden ([HKT04], um folgenden Satz zu zeigen (mit der H-Diskrepanz $D_{N,H}(x_1, \dots, x_N) = \sup_{J \subseteq K} \left| \frac{1}{N} \#\{x_i \in J\} - H(J) \right|$ der Folge $\omega_N = (x_1, \dots, x_N) \subset \mathbb{R}$):

Satz 1. *If a sequence $\omega = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ and a differentiable function $f(x)$ on $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ with a singularity only at the left boundary satisfy the condition*

$$D_{N,H}(\omega) \int_c^b \left| f'(x) \right| dx = o(1) \tag{1}$$

with $a \leq c \leq c_N$, as well as $c_N \to a$ for $N \to \infty$, then the QMC estimator $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(y_n)$ converges to the value of the improper integral of $f(x)$ on $[a, b]$:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(y_n) = \int_a^b f(x) dH(x) \tag{2}$$

Für die Bestimmung der tatsächlichen Konvergenzordnung wird der Wert von c_N, dem Minimum der benutzten Folge, benötigt. In einer Dimensions ist es leicht zu sehen, dass für alle Netzfolgen und die Halton-Folge $c_N \geq \frac{1}{N}$ gilt.

Bsp. 48) Für multivariate Integranden mit einer Singularität ist die Koksma-Ungleichung in einer Dimension nicht anwendbar, da $V(f) = \infty$. Der Beweis kann allerdings verfeinert werden ([HKT04]), um folgenden Satz zu zeigen (mit der H-Diskrepanz $D_{N,H}(x_1, \ldots, x_N) = \sup_{J \subseteq K} \left| \frac{1}{N} \#\{x_i \in J\} - H(J) \right|$ der Folge $\omega_N = (x_1, \ldots, x_N) \subset \mathbb{R}^d$):

Satz 2 (Convergence of the multidimensional QMC estimator)**.** *Let $f(\mathbf{x})$ be a function on $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ with singularities only at the left boundary of the definition interval (i.e. $f(\mathbf{x}) \to \pm\infty$ only if $x^{(j)} \to a^{(j)}$ for at least one j), and let furthermore $c_N^{(j)} = \min_{1 \leq n \leq N} y_n^{(j)}$ and $a^{(j)} < c^{(j)} \leq c_N^{(j)}$. If the improper integral $\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} f(\mathbf{x}) dH(\mathbf{x})$ exists and if*

$$D_{N,H}(\omega) \cdot V_{[\mathbf{c},\mathbf{b}]}(f) = o(1), \tag{3}$$

then the QMC estimator converges to the value of the improper integral:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{y}_n) = \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} f(\mathbf{x}) dH(\mathbf{x}) \,. \tag{4}$$

Hinweis: Benutze den ausgeteilten Beweis der Abel'schen Summenformel (aus Kuipers und Niederreiter [KN74b]) und schneide das Intervall bei $\mathbf{c}$ ab, sodass alle Punkte $y_i \in [\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ liegen und der Fehler durch das Abschneiden wegen der Voraussetzung im Satz gegen 0 geht.

Bemerkung 3. Anstatt das Intervall abzuschneiden, kann man auch den Integranden nach oben beschränken. Dadurch wird der Beweis etwas komplizierter, aber es lassen sich bessere Schranken zeigen ([HK06, Sob73a, Owe06]).

Bemerkung 4. Für die Bestimmung der tatsächlichen Konvergenzordnung wird der Wert von $\mathbf{c}_N$, dem Minimum der benutzten Folge, benötigt. Dafür gibt es diverse Abschätzungen, z.B. [Sob73b, Owe06, HKZ05].

Literaturverzeichnis

[Dev86] Luc Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[Fis96] George S. Fishman. *Monte Carlo.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 1996. Concepts, algorithms, and applications.

[Gla04] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, New York, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[HK06] Jürgen Hartinger and Reinhold Kainhofer. Non-uniform low-discrepancy sequence generation and integration of singular integrands. In *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2004*, pages 163–179. Springer, Berlin, 2006.

[HKT04] Jürgen Hartinger, Reinhold Kainhofer, and Robert Tichy. Quasi-Monte Carlo algorithms for unbounded, weighted integration problems. *Journal of Complexity*, 20(5):654–558, 2004.

[HKZ05] Jürgen Hartinger, Reinhold Kainhofer, and Volker Ziegler. On the corner avoidance properties of various low-discrepancy sequences. *Integers*, 5(3):A10, 16 pp., 2005.

[Jäc02] Peter Jäckel. *Monte Carlo Methods in finance.* John Wiley and Sons, LTD, West Sussex, 2002. Wiley Finance Series.

[KN74a] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.

[KN74b] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience Publ., New York, 1974.

[Knu81] Donald E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 2.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1981. Seminumerical algorithms, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing.

[MFE05] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative risk management.* Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Concepts, techniques and tools.

[Nel99] Roger B. Nelsen. *An introduction to copulas*, volume 139 of *Lecture Notes in Statistics.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[Nie92] Harald Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[Owe06] Art B. Owen. Halton sequences avoid the origin. *SIAM Review*, 48, 2006. To appear.

[Sob73a] I. M. Sobol'. Calculation of improper integrals using uniformly distributed sequences. *Soviet Math. Dokl.*, 14(3):734 – 738, 1973.

[Sob73b] I. M. Sobol'. On the use of uniformly distributed sequences for approximate computations of improper integrals. In S.L. Sobolev, editor, *Theory of cubature formulas and applications to certain problems in mathematical physics*, pages 62–66. Novosibirsk Nauka, 1973. In Russian.