Übungsaufgaben „AKVFM Numerische Verfahren für stochastische Prozesse und Differentialgleichungen“

Übungsblatt 1

SS 2007, TU Wien, Reinhold Kainhofer

26. März 2007

Bsp. 1) (Wiederholung, z.B. Sachversicherungsmathematik) Sei N_t ein Poisson-Prozess. Zeige für beliebiges t: Bedingt auf $N_t = n$ haben die Sprungzeiten T_i dieselbe Verteilung wie die Ordnungsstatistik von n $U(0,t)$-verteilten Zufallsvariablen (d.h. dieselbe Verteilung wie n unabhängige $U(0,t)$-verteilte Zufallsvariablen, die der Größe nach geordnet werden).

Bsp. 2) (Wiederholung, z.B. Sachversicherungsmathematik) Zeige:

(a) Der Prozess N_t, definiert durch

$$N_t = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, t \geq 0 \tag{1}$$

$$T_n = E_1 + \cdots + E_n, n \geq 1, \text{ sowie } T_0 = 0 \tag{2}$$

wobei E_i eine Folge von unabhängigen identisch verteilten $Exp(\lambda)$-verteilten ZV ist, stellt einen Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ dar.

(b) Sei N_t ein homogener Poisson-Prozess (d.h. λ ist nicht zeitabhängig) mit Intensität λ und Sprungzeiten $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$. Dann hat N_t eine Darstellung der Form (1) und die Sprungzeiten eine Darstellung der Form (2).

Bsp. 3) Erzeuge 1000000 Pfade eines Compound Poisson-Prozesses mit $F = Log\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, einmal mit dem einfachen Algorithmus, einmal mit dem verbesserten Algorithmus (T_i durch Gleichverteilung gesampelt bedingt auf $N_t = n$). Ist eine Verbesserung in der Laufzeit zu beobachten?

Bsp. 4) Stelle die Konstruktion der Brown'schen Brücke grafisch am Computer dar!

Bsp. 5) Benutze die Konstruktion einer Brown'schen Brücke, um 100 Pfade einer Brown'schen Bewegung $W_t = BM(\mu, \sigma^2)$ auf $[0, T]$ zu erzeugen und graphisch darzustellen. Wähle geeignete Werte für μ und σ.

(a) Schätze numerisch durch Simulation von n Pfaden die Wahrscheinlichkeit, dass die Brown'sche Bewegung unter 0 fällt.

(b) Bestimme theoretisch die exakte Wahrscheinlichkeit, dass die Brown'sche Bewegung unter 0 fällt ($\mathbb{P}(W_t < 0 \text{für ein } t \in [0, T])$).

(c) Stelle die Konvergenzordnung der numerischen Simulation graphisch dar (doppel-logarithmisch). Mit anderen Worten, sei q die tatsächliche Wahrscheinlichkeit aus 5b und $\widehat{q}_n$ der Schätzer auf 5a für n Sample-Pfade. Zeichne $\log(|q - \widehat{q}_n|)$ gegen $\log n$.

(d) Benutze die Brown'sche Brücke, um 100 Pfade einer geometrischen Brown'schen Bewegung $GBM(\mu, \sigma^2)$ zu erzeugen und zu zeichnen.

Bsp. 6) Betrachte die Differenz aus einer $BM(\mu, \sigma^2)$ und einer davon unabhängigen $GBM(\mu, \sigma^2)$. Mit $r = 0.03$ Zins bepreise eine Call- bzw. Put-Option auf diese Differenz mit Ausübungszeitpunkt $T = 3$ und Ausübungspreis K. Wähle für die Simulation geeignete Zahlenwerte für die Parameter. Lässt sich diese Option auch exakt bepreisen?

Bsp. 7) Betrachte einen Jump-Diffusion Prozess X_t. Bestimme $\mathbb{E}[X_t]$.

Bsp. 8) Betrachte einen logarithmischen Jump-Diffusion Prozess X_t mit $\mu = -0.01$, $\sigma^2 = 0.003$, $\lambda = 1$, $a = 0.01$ und $b^2 = 0.01$. Interpretiere X_t als effektive jährliche Zinsrate. Bestimme numerisch den Erwartungswert des Diskontierungsfaktors für $t = 10$ (also den EW jenes Betrags K, der zu $t = 0$ investiert zum Zeitpunkt $t = 10$ mit Zinsen genau den Betrag 1 ergibt). Wie groß ist außerdem seine Varianz?

Tip: Diskretisiere das Problem, z.B. indem nur alle $\Delta t = 0.01$ Zeitschritte verzinst wird.

Bsp. 9) Betrachte eine Brown'sche Bewegung, eine geometrische Brown'sche Bewegung und einen logarithmischen Jump-Diffusion Prozess mit denselben Erwartungswerten E und denselben Varianzen V. Bepreise numerische eine Call- oder eine Put-Option mit $K = \frac{3}{2}E$ bzw. $K = \frac{2}{3}E$!. Wie unterscheiden sich die Werte? Erläutere die Unterschiede.