Übungsaufgaben „AKVFM Numerische Verfahren für stochastische Prozesse und Differentialgleichungen“

Übungsblatt 2

SS 2007, TU Wien, Reinhold Kainhofer

18. Mai 2007

Levy-Prozesse

Bsp. 10) Bestimme $\sigma(\varepsilon)$ analytisch für die Brownsche Bewegung, für einen symmetrischen α-stabilen Prozess sowie für den Gamma Prozese. (In der Literatur zu finden!)

Bsp. 11) Betrachte einen symmetrischen α-stabilen Prozess (mit α geeignet gewählt, $\alpha \neq 2$, da dies der Trivialfall der Brownschen Bewegung wäre). Simuliere diesen Prozess sowohl durch Approximation durch einen Compound Poisson Prozess als auch durch Approximation mit Brownscher Bewegung! Bewerte damit eine binäre Europäische Option sowie eine Europäische Call-Option.

Bsp. 12) Betrachte symmetrische α-stabile Prozesse und prüfe numerische die unterschiedlichen Konvergenzraten für unterschiedliche α nach!

Bsp. 13) Betrachte einen Gamma Prozess. Simuliere diesen Prozess sowohl durch Approximation durch einen Compound Poisson Prozess als auch durch Approximation mit Brownscher Bewegung! Bewerte damit eine binäre Europäische Option sowie eine Europäische Call-Option. Ist die Verletzung der Bedingungen für die Normalapproximation und die daraus resultierende schlechte Konvergenz bei der Approximation mit Brownscher Bewegung numerisch zu erkennen?

Square-Root-Diffusions

Bsp. 14) Benutze das Euler-Schema, um eine Square-Root-Diffusion (mit geeignet gewählten Parametern, um den Kurzfristzins im CIR Modell zu modellieren) auf dem äquidistanten Gitter zu simulieren. Wie entwickelt sie die Verteilung des diskretisierten Prozesses auf den Punkten und wie groß ist jeweils (durch Monte Carlo geschätzt) die Wahrscheinlichkeit, bei dieser Diskretisierung einen negativen Wert für $r(t_i)$ zu erhalten. Benutze auch verschiedene Gitterweiten!

Bsp. 15) Benutze die bekannte Übergangsdichte bei Square-Root-Diffusions, um den entsprechenden Prozess $r(t)$ auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite $\delta = \frac{1}{4}$ zu simulieren. Interpretiere diesen Prozess $r(t)$ als Zins und benutze ihn, um den einjährigen Diskontierungsfaktor bei quartalsweiser Verzinsung numerisch zu bestimmen.

Bsp. 16) Betrachte die Bond-Preise $B(t,T)$ im Cox-Ingersoll-Ross Modell. Diskretisiere zum einen den Prozess $r(t)$ und bestimme daraus numerisch den Bondpreis durch Riemann-Approximation des Integrals und Monte-Carlo-Simulation des Erwartungswerts. Vergleiche diesen zum anderen mit den exakten Werten aus der exponentiell-affinen Form $B(t,T) = \exp(-A(t,T)r(t) + C(t,T))$ zu verschiedenen Zeitpunkten t.

Bsp. 17) Leite die in der VO angegebene analytische Formel für den Bondpreis im CIR-Modell her. *Hinweis: Skriptum von Thorsten Schmidt:* `http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/FM_skriptWS04_05.pdf`

Leite ebenso den Bondpreis im Modell von Hull und White her!

Stochastische Analysis und SDE

Bsp. 18) Zeige, dass $\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$

Bsp. 19) (a) $X_t = e^{B_t}$ erfüllt die SDE $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$.

(b) $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ (mit $B_0 = 0$) erfüllt die SDE $dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t$ mit $X_0 = 0$.

Bsp. 20) Löse die stochastische Differentialgleichung $dX_t = X_t dt + dB_t$. *Hinweis: Benutze den integrierenden Faktor e^{-t}!*

Bsp. 21) Löse die stoch. DG $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t$!

Gronwall Ungleichung

Bsp. 22) Sei $v(t)$ eine nicht-negative Funktion mit

$$v(t) \leq C + A \int_0^t v(s) ds \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

mit Konstanten A und C. Zeige, dass

$$v(t) \leq C \exp(At) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T\,.$$

Hinweis: Siehe die Kommentare zu Aufgabe 5.17 in den ausgeteilten Kopien aus Øksendal!