Übungsaufgaben „AKVFM Numerische Verfahren für stochastische Prozesse und Differentialgleichungen“

Übungsblatt 3

SS 2007, TU Wien, Reinhold Kainhofer

11. Juni 2007

Einige explizit lösbare SDE als Grundlage für Vergleichsrechnungen

(a) $\boxed{dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t}$
Lsg: $X_t = e^{-\alpha t}\left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s\right)$.

(b) $\boxed{dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dW_t}$ mit $X_0 = 0$.
Lsg: $X_t = \frac{W_t}{1+t}$.

(c) $\boxed{dX_t = \left(\frac{2}{1+t} X_t + b(q+t)^2\right) dt + b(q+t)^2 dW_t}$
Lsg: $X_t = \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 X_0 + b(1+t)^2 \left(W_t + W_{t_0} + t - t_0\right)$.

(d) $\boxed{dX_t = a(t) X_t dt + b(t) X_t dW_t}$
Lsg: $X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \left(a(s) - \frac{1}{2} b^2(s)\right) ds + \int_0^t b(s) dW_s\right)$.

(e) $\boxed{dX_t = \frac{1}{2} a(a-1) X_t^{1-2/a} dt + a X_t^{1-1/a} dW_t}$
Lsg: $X_t = \left(W_t + X_0^{1/a}\right)^a$.

(f) $\boxed{dX_t = \frac{1}{2} a^2 X_t dt + a X_t dW_t}$
Lsg: $X_t = X_0 \exp(a W_t)$.

(g) $\boxed{dX_t = \frac{1}{2 \log b} b^{-2X_t} dt + \frac{1}{\log b} b^{-X_t} dW_t}$
Lsg: $X_t = \log_b \left(a W_t + b^{X_0}\right)$.

(h) $\boxed{dX_t = dt + 2\sqrt{X_t} dW_t}$
Lsg: $X_t = \left(W_t + \sqrt{X_0}\right)^2$.

(i) $\boxed{dX_t = -X_t \left(2 \log X_t + 1\right) dt - 2 X_t \sqrt{-\log X_t} dW_t}$
Lsg: $X_t = \exp\left(-\left(W_t + \sqrt{-2 \log X_0}\right)^2\right)$.

(j) $\boxed{dX_t = -\beta^2 X_t \left(1 - X_t^2\right) dt + \beta \left(1 - X_t^2\right) dW_t}$
Lsg: $X_t = \frac{(1+X_0)\exp(2\beta W_t)+X_0-1}{(1+X_0)\exp(\beta W_t)+1-X_0}$.

(k) $\boxed{dX_t = \frac{1}{3} X_t^{1/3} dt + X_t^{2/3} dW_t}$
Lsg: $X_t = \left(X_0^{1/3} + \frac{1}{3} W_t\right)^3$. (Nicht eindeutig für $X_0 = 0$! Dann ist auch $X_t = 0$ eine Lösung!)

(l) $\boxed{dX_t = (1 + X_t)(1 + X_t^2)dt + (1 + X_t^2)dW_t}$
Lsg: $X_t = \tan\left(t + W_t + \arctan X_0\right)$.

(m) $\boxed{dX_t = -\left(\sin(2X_t) + \frac{1}{4}\sin(4X_t)\right) dt + \sqrt{2}\cos^2(X_t) dW_t}$
Lsg: $X_t = \arctan\left(\exp(-t)\tan(X_0) + \sqrt{2}\exp -t \int_0^t \exp(s) dW_s\right)$.

Starke Verfahren für SDE

Bsp. 23) Betrachte die SDE für die geometrische Brownsche Bewegung (d) mit $a(t) = a$ und $b(t) = b$. Benutze $X_0 = 1$, $a = 1.5$, $b = 1$ und $\Delta t = 2^{-m}$ und simuliere äquidistante Approximationen eines starken Lösungspfades auf dem Intervall $[0, 5]$ mittels verschiedener starker Methodung unterschiedlicher Ordnung. Zeichne sowohl die exakte Lösung als auch die numerischen Approximation in einen Plot. Führe dies für $m = 2, 4, 6, 8, 10$ durch!

Bsp. 24) Betrachte die SDE für die geometrische Brownsche Bewegung (d) mit $a(t) = a$ und $b(t) = b$. Benutze $X_0 = 1$, $a = 1.5$, $b = 1$ und $\Delta t = 2^{-m}$ und simuliere für jedes m jeweils $N = 1000$ Pfade mit der Euler- und der Milstein-Methode. Bestimme jeweils den mittleren absoluten Fehler zu $T = 1$:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| X_{0,X_0}(T) - \bar{X}_{0,X_0}(T) \right|$$

Ist die Fehlerordnung $h^{1/2}$ bzw. h^1 in den numerischen Werten zu erkennen?

Bsp. 25) (Stabilität) Simuliere die exakte Lösung und die Euler- und Milstein-Approximationen mit Schrittweite $\Delta t = 2^{-m}$ der SDE $dX_t = \alpha X_t dt + dW_t$ mit $X_0 = 1$ und $\alpha = 5$ auf $[0, T = 5]$. Führe dasselbe auch mit $\alpha = -5$ durch und stelle die Pfade jeweils in einem Plot dar!

Bsp. 26) Zeige, dass das Milstein-Schema die starke Fehlerordnung $p = 1$ besitzt!

Schwache Verfahren für SDE

Bsp. 27) Betrachte den 1-dimensionalen Itô-Prozess X_t mit 2 treibenden Brownschen Bewegungen:

$$dX_t = \frac{3}{2} X_t dt + \frac{1}{10} X_t dW_t^{(1)} + \frac{1}{10} X_t dW_t^{(2)}$$

Dabei ist $X_0 = 0.1$ und $W^{(1)}$ und $W^{(2)}$ sind zwei unabhängige Standard-Brownsche Bewegungen.

(a) Zeige, dass $\mathbb{E}(X_T) = \frac{1}{10}\exp\left(\frac{3}{2}T\right)$.

(b) Simuliere jeweils $N = 5000$ Trajektorien nach der schwachen Euler-Methode mit Schrittweiten $h = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, ...$ und zeichne $\log_2 h$ gegen den Fehler $\log_2 |\varepsilon|$mit $\varepsilon = \mathbb{E}[\bar{X}(T)] - \mathbb{E}[X(T)]$.

Bsp. 28) Betrachte den 1-dimensionalen Itô-Prozess X_t

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$$

auf $[0, T]$ mit $X_0 = 0.1$, $a = 1.5$ und $b = 0.01$. Simuliere jeweils $N = 5000$ Trajektorien nach der in der Vorlesung präsentierten schwachen Methode 2. Ordnung mit Schrittweiten $h = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, ...$ und zeichne $\log_2 h$ gegen den Fehler $\log_2 |\varepsilon|$mit $\varepsilon = \mathbb{E}[\bar{X}(T)] - \mathbb{E}[X(T)]$.

Bsp. 29) (a) Welche schwache Fehlerordnung besitzt das Milstein-Schema?

(b) Leite ein schwaches Schema der Fehlerordnung $p = \frac{3}{2}$ her!

Vergleiche

Bsp. 30) Betrachte eine der SDEs (a)-(m) mit explizit bekannter starker Lösung und

(a) Löse sie numerisch mit verschiedenen starken Verfahren (z.B. Euler, Milstein, höhere Ordnung, Runge-Kutta, ...).

(b) Bestimme die starke Konvergenzordnung (pfadweiser Fehler über M Pfade gemittelt) für verschiedene h und stelle den Fehler in einem Log-Log-Plot dar.

(c) Betrachte die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \exp(x^2)$, $f_3(x) = x^2 \mathbb{1}_{\{x - \lfloor x \rfloor > 0.5\}}$ und simuliere für jede dieser Funktionen auf verschiedene starke und schwache Methoden den Erwartungswert $\mathbb{E}[f_i(X_T)]$ mit $T = 1$. Stelle in Abhängigkeit von $\log h$ den Fehler $\left|\mathbb{E}[f_i(\bar{X}(T))] - \mathbb{E}[f_i(X(t)]\right|$ dar.

Bsp. 31) Betrachte die SDE

$$dX_t = sgn\, X_t dt + dW_t$$

mit

$$sgn\, x = \begin{cases} +1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Für die Anfangsbedingung $X_0 = 0$ hat diese SDE keine starke Lösung, nur schwache Lösungen. Versuche diese SDE mit verschiedenen starken Methoden pfadweise zu lösen. Benutze ebenfalls diverse starke und schwache Methoden für die nummerische Bestimmung von $\mathbb{E}[X_T]$.