Existenz- und Eindeutigkeitssatz für SDE

1 Hilfssätze

Bemerkung 1. Die folgenden Relationen aus der Analysis werden benötigt:

- $2ab \leq a^2 + b^2$ für $a, b \geq 0$
- $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (a_i)^2$ für $a_i \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
- $\left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 \leq t \int_0^t f(x)^2 dx$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Lemma 1 (Gronwall-Ungleichung). *Sei $v(t)$ eine nicht-negative Funktion mit*

$$v(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t v(s)ds \forall 0 \leq t \leq T$$

für Konstanten C_1 und C_2. Dann gilt

$$v(t) \leq C_1 \exp(C_2 t) \forall 0 \leq t \leq T\,.$$

Lemma 2 (Markovsche Ungleichung). *Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und $a > 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}\left(|X|\right)\,.$$

Beweis. Betrachte die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{(|X|\geq a)}$. Wegen $|X| \geq a\mathbb{1}_{(|X|\geq a)}$ folgt $\mathbb{E}[|X|] \geq \mathbb{E}[a\mathbb{1}_{(|X|\geq a)}] = a\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(|X|\geq a)}] = a\mathbb{P}(|X| \geq a)$.

Lemma 3 (Doobs Martingalungleichung). *Wenn M_t ein f.s. in t pfadweise stetiges Martingal ist, dann gilt gür alle $p \geq 1$, $T \geq 0$ und $\lambda > 0$, dass*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\left[|M_T|^p\right]\,.$$

Lemma 4 (Borel-Cantelli-Lemma). *Wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_n endlich ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass unendlich viele der Ereignisse eintreten, gleich 0:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0$$

Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der E_n unendlich und sind die Ereignisse E_n wenigstens paarweise unabhängig, so gilt $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 1$. (Erweiterung von Erdős und Renyi)

Lemma 5 (Fatou-Lemma). *Sei (S, Σ, μ) ein Maßraum. Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, messbarer Funktionen $f_n : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt*

$$\int_S \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_S f_n \mathrm{d}\mu\,,$$

wobei auf der linken Seite der Limes inferior der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise zu verstehen ist.

Lemma 6 (Hölder-Ungleichung). *Sei S ein Maßraum und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $f \in L^p(S)$ und $g \in L^q(S)$. Dann ist $fg \in L^1(S)$ und es gilt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz 7 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer SDE). *Sei $T > 0$ und $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r}$ messbar mit*

$$\|b(t, x)\|_1 + \|\sigma(t, x)\|_1 \leq C(1 + \|x\|_1), x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T], C \in \mathbb{R} \text{ konst.} \tag{1}$$

und der Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument

$$\|b(t, x) - b(t, y)\|_1 + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_1 \leq D \|x - y\|_1, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]\,. \tag{2}$$

Sei Z (Anfangswert) eine von $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left((W_s)_{s\geq 0}\right)$ (d.h. von der treibenden BM) unabhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[\|Z\|_1^2] < \infty$ (z.B. deterministisch).
Dann hat die SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, W_t)dB_t \tag{3}$$

mit $0 \leq t \leq T$ und der Anfangsbedingung $X_0 = Z$ eine eindeutige, in t stetige Lösung $X_t(\omega)$ (pfadweise!), sodass

1. *$X_t(\omega)$ an $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\left(Z, (B_s(\cdot))_{s\leq t}\right)$ adaptiert*
2. *$\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_t\|_1^2 \, dt\right] < \infty$.*

Bemerkung 2. Diese Lösung wird starke Lösung der SDE genannt, da die SDE pfadweise erfüllt ist.

Bemerkung 3. Eine Square-Root-Diffusion erfüllt die Bedingung 2 nicht. Für die Existenz und Eindeutigkeit muss der Beweis anders verlaufen (siehe Yamada & Watanabe – Kopien aus Karatzas/Shreve).

3 Beweis (nach Øksendal [Øks03])

3.1 Eindeutigkeit

Seien X_t und $\widehat{X}_t$ zwei stetige Lösungen mit $X_0 = Z$ und $\widehat{X}_0 = \widehat{Z}$. Dann gilt mit $a(s, \omega) := b(X, X_s(\omega)) - b(s, \widehat{X}_s(\omega))$ und $\gamma(s, \omega) := \sigma(s, X_s(\omega)) - \sigma(s, \widehat{X}_s(\omega))$:

$$\begin{aligned} v(t) :=& \mathbb{E}[\left\|X_t - \widehat{X_t}\right\|_1^2] = \mathbb{E}\left[\left|Z - \widehat{Z} + \int_0^t a(s, \omega)ds + \int_0^t \gamma(s, \omega)dB_s\right|^2\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}[\left\|Z - \widehat{Z}\right\|_1^2] + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t a ds\right)^2\right] + 3 \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \gamma dB_s\right)^2\right]}_{\overset{\text{Isom.}}{=} \int_0^t \mathbb{E}[\gamma^2]ds \overset{\text{Fub.}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^t \gamma^2 ds\right]} \end{aligned}$$

$$\leq 3\mathbb{E}[\left\|Z-\widehat{Z}\right\|_1^2]+3\underbrace{t}_{\leq T}\mathbb{E}\Big[\int_0^t \underbrace{a^2}_{\leq D^2\left\|X_s-\widehat{X}_s\right\|_1^2} ds\Big]+3\mathbb{E}\Big[\int_0^t \underbrace{\gamma^2}_{\leq D^2\left\|X_s-\widehat{X}_s\right\|_1^2} ds\Big]$$

$$\leq 3\mathbb{E}[\left\|Z-\widehat{Z}\right\|_1^2]+3D^2(T+1)\int_0^t \mathbb{E}[\left\|X_s-\widehat{X_s}\right\|_1^2]ds = C_1 + C_2\int_0^t v(s)ds$$

Insgesamt erfüllt $v(t)$ also die Bedingung $v(t) \leq C_1 + C_2\int_0^t v(s)ds$ der Gronwall-Ungleichung und obiges Lemma 1 sagt aus, dass

$$0 \leq v(t) \leq \underbrace{3\mathbb{E}[\left\|Z-\widehat{Z}\right\|_1^2]}_{=C_1}\exp\Big(\underbrace{3(1+T)D^2}_{=C_2}t\Big)$$

Insbesondere gilt für zwei Lösungen mit derselben Anfangsbedingung $Z=\widehat{Z}$, dass $v(t)=0\ \forall t$, d.h. $\mathbb{E}\left[\left\|X_s-\widehat{X}_s\right\|_1^2\right]=0$. Unter Ausnutzung der Stetigkeit folgt damit sofort

$$\mathbb{P}\left(\left\|X_t(\omega)-\widehat{X}_t(\omega)\right\|_1 = 0\forall t\right)=1$$

und daher die Eindeutigkeit.

3.2 Existenz

(Nicht-konstruktiver Beweis als Limes einer Iteration, vgl. Beweis für ODE)
Definiere eine Iteration durch

$$Y_t^{(0)} = X_0 \qquad\qquad Y_t^{(k)} = X_0 + \int_0^t b(s,Y_s^{(k-1)})ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s^{(k-1)})dB_s \tag{4}$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^{(1)}-Y_t^{(0)}\right\|_1^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t b(s,X_0)ds+\int_0^t\sigma(s,X_0)dB_s\right\|_1^2\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t \underbrace{\left\|b(s,X_0)\right\|_1}_{\leq C(1+\|X_0\|_1)^2} ds + \int_0^t \underbrace{\left\|\sigma(s,X_0)\right\|_1}_{\leq C(1+\|X_0\|_1)^2} dB_s\right\|_1^2\right] \leq \mathbb{E}\Big[C^2(1+\|X_0\|_1)^2(t+B_t)^2\Big]$$

$$= C^2\mathbb{E}[1+\underbrace{2\left\|X_0\right\|_1}_{\leq 1+\|X_0\|_1}+\|X_0\|_1^2]\mathbb{E}[t^2+2tB_t+B_t^2] \leq C^2(1+\mathbb{E}[\|X_0\|_1^2])(tT+t) \leq K_1(C,T,\mathbb{E}[\|X_0\|_1^2])t$$

Analog zum Beweis der Eindeutigkeit folgt weiters

$$\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right\|_1^2\right] \leq (1+T)3D^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left\|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right\|_1^2\right]ds \text{ für } k\geq 1 \text{ und } t\leq T.$$

Induktiv lässt sich damit leicht zeigen, dass

$$\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right\|_1^2\right] \leq \frac{K_2^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}, k\geq 0, 0\leq t\leq T \tag{5}$$

mit einer Konstante $K_2 \geq \max(K_1(C,T,\mathbb{E}[\|X_0\|_1^1]), 3(1+T)D^2)$.
Um die Konvergenz der so definierten Folge zu zeigen, benötigen wir das Borel-Cantelli-Lemma, dessen Voraussetzungen wir erst zeigen müssen. Mit der Kurzschreibweise $\Delta_s^{(k)}f := f(s,Y_s^{(k)})-f(s,Y_s^{(k-1)})$ gilt

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right\|_1 > 2^{-k}\Big] \leq \mathbb{P}\left[\int_0^T\left\|\Delta_s^{(k)}b\right\|_1 ds + \sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t \Delta_s^{(k)}\sigma dB_s\right\|_1 > 2^{-k}\right]$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\mathbb{P}\left[\int_0^T\left\|\Delta_s^{(k)}b\right\|_1 ds > 2^{-k-1}\right]}_{\text{Term mit }\Delta_s^{(k)}\sigma\text{ beliebig, auch }<\frac{1}{2}2^{-k}\text{ möglich}} + \underbrace{\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t \Delta_s^{(k)}\sigma dB_s\right\|_1 > 2^{-k-1}\right]}_{\text{Term mit }\Delta_s^{(k)}b\text{ beliebig, auch }<\frac{1}{2}2^{-k}\text{ möglich}}}_{\text{Zumindest einer der beiden Terme muss größer als }\frac{1}{2}2^{-k}\text{ sein}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\mathbb{P}\left[\left(\int_0^T \left\|\Delta_s^{(k)}b\right\|_1 ds\right)^2 > 2^{-2k-2}\right]}_{\text{Markov-Ungl.}} + \mathbb{P}\left[\sup_{0\le t\le T}\underbrace{\left\|\int_0^t \Delta_s^{(k)}\sigma dB_s\right\|_1}_{\substack{\text{stetiges Martingal}\\ \Rightarrow\text{Martingalunglg.}}} > 2^{-k-1}\right] \\
&\le 2^{2k+2}\mathbb{E}\left[\underbrace{\left(\int_0^T \left\|\Delta_s^{(k)}b\right\|_1 ds\right)^2}_{\le T\int_0^T \left\|\Delta_s^{(k)}b\right\|_1^2 ds}\right] + 2^{2k+2}\,\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \Delta_s^{(k)}\sigma dB_s\right)^2\right]}_{\overset{\text{Itô-Iso.}}{=}\int_0^t \mathbb{E}[\left\|\Delta_s^{(k)}\sigma\right\|_1^2]ds} \\
&\le 2^{2k+2}\int_0^T \mathbb{E}\Bigg[T\ \underbrace{\left\|\Delta_s^{(k)}b\right\|_1^2 + \left\|\Delta_s^{(k)}\sigma\right\|_1^2}_{\text{jeweils }\le D^2\left\|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right\|_1^2}\Bigg]ds \\
&\le 2^{2k+2}\int_0^T \mathbb{E}\left[TD^2\left\|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right\|_1^2 + D^2\left\|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right\|_1^2\right]ds \\
&= 2^{2k+2}\quad \underbrace{D^2(T+1)}_{\le K_3:=\max(D^2(T+1),K_2)}\quad \int_0^T \underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right\|_1^2\right]}_{\le\frac{(K_2 s)^k}{k!}} ds \le \frac{4^{k+1}K_3^{k+1}}{k!}\int_0^T s^k ds = \frac{(4K_3T)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

Da die Reihe $\sum_{i=1}^\infty C^i/i!$ konvergiert und damit endlich ist, besagt das Borel-Cantelli-Lemma, dass die Relation $\sup\left\|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right\|_1 > 2^{-k}$ f.s. nur für endlich viele k erfüllt sein kann,

$$
\mathbb{P}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right\|_1 > 2^{-k}\text{ für unendliche viele }k\right] = 0\,,
$$

und daher ab einem $k_0 = k_0(\omega)$ eben nicht mehr erfüllt ist:

$$
\sup_{0\le t\le T}\left\|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right\|_1 \le 2^{-k}\forall k\ge k_0\,.
$$

Damit haben wir nun für alle $t\in[0,T]$ eine konvergierende Majorante $a_k = 2^{-k}$, woraus die in $[0,T]$ gleichmäßige Konvergenz (f.s.) der Approximationsfolge $Y_t^{(n)}$

$$
Y_t^{(n)}(\omega) = Y_t^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right)\quad\text{(als Teleskopsumme dargestellt)}
$$

folgt. Mit anderen Worten: Für fast alle ω ist $Y_t^{(n)}$ gleichmäßig konvergent gegen einen Pfad, den wir mit $X_t(\omega)$ bezeichnen wollen. Die Stetigkeit dieses Grenzpfades überträgt sich von den Approximationen $Y_t^{(n)}$ ebenso wie die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit.
Andererseits konvergiert $Y_t^{(n)}$ in $L^2(P)$ gegen einen Grenzwert, den wir mit Y_t bezeichnen. Dies folgt aus der Tatsache, dass für $m>n\ge 0$ gilt, dass

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^{(m)}-Y_t^{(n)}\right\|_1^2\right]\right)^{\frac12} = \left\|Y_t^{(m)}-Y_t^{(n)}\right\|_{L^2(P)} &= \left\|\sum_{k=n+1}^m\left(Y_t^{(k)}-Y_t^{(k-1)}\right)\right\|_{L^2(P)} \\
&\le \sum_{k=n+1}^m \underbrace{\left\|Y_t^{(k)}-Y_t^{(k-1)}\right\|_{L^2(P)}}_{=\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^{(k)}-Y_t^{(k-1)}\right\|_1^2\right]^{\frac12}} \overset{(5)}{\le} \sum_{k=n+1}^\infty\left(\frac{(K_2t)^k}{k!}\right)^{\frac12} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}
$$

Aus der $L^2(P)$-Konvergenz folgt nun die Existenz einer Teilfolge von $Y_t^{(n)}(\omega)$, die ω-punktweise gegen $Y_t(\omega)$ konvergiert, weshalb $Y_t = X_t$ f.s. gilt. Daher ist X_t sowohl adaptiert an die treibende Brownsche Filtration als auch von beschränkter Varianz, was genau die zusätzlichen Behauptungen des Satzes waren.
Zu zeigen bleibt nun nur noch, dass X_t die SDE auch tatsächlich erfüllt. Wir werden hierfür ausgehend von der iterativen Definition (4) von $Y_t^{(n+t)}$ die Konvergenz in $L^2(P)$ von $Y_t^{(n)}$ gegen X_t zeigen. Die Iterationsgleichung war

$$
Y_t^{(k)} = X_0 + \int_0^t b(s,Y_s^{(k-1)})ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s^{(k-1)})dB_s\,. \tag{6}
$$

Zum einen wissen wir, dass $Y_t^{(k)} \to X_t$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in t für fast alle ω, andererseits, dass $\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\right\|_1^2\right] \to 0$. Das Fatou-Lemma kann nun benutzt werden, um diesen Erwartungswert noch weiter nach unten abzuschätzen durch $\left\|X_t - Y_t^{(n)}\right\|_{L^2(P)}$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|X_t - Y_t^{(n)}\right\|_1^2 dt\right] \le \limsup_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\right\|_1^2 dt\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Diese Relation gemeinsam mit der Itô-Isometrie zeigt, dass der Term $\int_0^t \sigma dB_s$ in $L^2(P)$ konvergiert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t \left(\sigma(s, Y_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)\right) dB_s\right\|_1^2\right] &\overset{\text{Isom.}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(s, Y_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)\right\|_1^2 ds\right] \\ &\overset{\text{Vor.}}{\le} D^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|Y_s^{(n)} - X_s\right\|_1^2 ds\right] \le D^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Y_s^{(n)} - X_s\right\|_1^2 ds\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

also

$$\int_0^t \sigma(x, Y_s^{(n)}) dB_s \to \int_0^t \sigma(x, X_s) dB_s$$

Ebenso lässt sich mit der Hölder-Ungleichung relativ schnell zeigen, dass in $L^2(P)$-Konvergenz gilt:

$$\int_0^t b(x, Y_s^{(n)}) ds \to \int_0^t b(x, X_s) ds$$

Insbesondere kann in Gleichung (6) überall der $L^2(P)$-Limes $n \to \infty$ durchgeführt werden, womit auch bewiesen ist, dass X_t die SDE erfüllt. $\square$

Literatur

[Øks03] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.