

CAPM-Capital Asset Pricing Model und das Markowitzmodell (zur Bestimmung optimaler Aktienportfolios)

Sigrid Dannbauer

19.01.09

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Grundbegriffe | 1 |
| 1.1 | Asset Return | 1 |
| 1.2 | Portfolio Mean and Variance | 3 |
| 1.3 | Feasible Set | 8 |
| 2 | Das Markowitzmodell | 11 |
| 2.1 | Zur Person | 11 |
| 2.2 | Das Markowitz Modell | 11 |
| 2.2.1 | Lösung des Markowitzproblems | 12 |
| 2.2.2 | Nichtnegative Nebenbedingungen | 13 |
| 3 | Weitere Begriffserklärung, die für das CAPM notwendig sind | 15 |
| 3.1 | Das Two-Fund Theorem (kein risikoloses Asset) | 15 |
| 3.2 | Die Aufnahme eines risikolosen Assets | 16 |
| 3.3 | One-Fund Theorem | 17 |
| 4 | Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) | 18 |
| 4.1 | Definition laut Börselexikon | 18 |
| 4.2 | Einführung | 18 |
| 4.3 | Markt-Gleichgewicht | 18 |
| 4.4 | Die Capital Market Line | 20 |
| 4.5 | Das Pricing Model | 21 |
| 4.5.1 | Beta eines Portfolios | 23 |
| 4.6 | Die Security Market Line | 23 |
| 4.6.1 | systematisches Risiko | 24 |
| 4.7 | Auswirkungen und Konsequenzen von Investitionen | 25 |
| 4.8 | CAPM als Pricing Formel | 26 |
| 4.9 | Linearität von Pricing und die Certainty Equivalent Form | 27 |

1 Grundbegriffe

Wenn man eine Investition tätigt, sind die anfänglichen Aufwendungen für das Kapital meist bekannt, jedoch der Betrag des Returns (der Kapitalertrag, die Rendite) ist ungewiss. Solche Situationen werden im Thema „Mean-Variance Portfoliotheory“ untersucht. Wir betrachten hier nur einperiodige Kapitalanlagenmodelle: Geld wird zur anfänglichen Zeit investiert und die Auszahlung findet am Ende der Periode statt. Mean-Variance-Analyse formt die Basis des Capital-Asset-Pricing Models.

1.1 Asset Return

Ein „Investitionsinstrument“, das gekauft und verkauft werden kann, nennt man *Asset*. Angenommen man kauft ein Asset zum Zeitpunkt 0 und 1 Jahr später wird es verkauft. Der „Total Return“ dieser Investition ist dann definiert als:

$$\text{total return} = \frac{\text{amount received}}{\text{amount invested}}$$

Der Total Return bezeichnet den Gesamtertrag.
In Zeichen bedeutet dies

$$R = \frac{X_1}{X_0}.$$

Der Einfachheit halber schreiben wir anstatt „total return“ kurz „return“.

Für den Rate of Return erhält man folgendes:

$$\text{Der Wert des Returns (Rate of Return)} = \frac{\text{amount received} - \text{amount invested}}{\text{amount invested}}$$

In Zeichen bedeutet dies:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

Rate of return bedeutet Ertrag oder Rendite.

Der Ausdruck „return“ wird auch häufig anstelle von „rate of return“ geschrieben.

Diese zwei Definitionen werden durch die Verwendung von Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden (R , r). Außerdem geht meist aus dem Kontext hervor, was gemeint ist, falls der Begriff „return“ (Rendite) verwendet wird.

Es besteht folgender klar ersichtlicher Zusammenhang:

$$R = 1 + r$$

Außerdem kann

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

geschrieben werden als

$$X_1 = (1 + r)X_0.$$

Das zeigt, dass der „Rate of Return“ dem Zinssatz stark ähnelt.

SHORT SALES

Ein Anleger verkauft ausgeliehene Aktien, obwohl er nicht im Besitz dieser Wertpapiere ist. Für den Verkauf dieser ausgeliehenen Aktien erhält der Anleger einen Betrag X_0 . Zu einem späteren Zeitpunkt kauft er die Leihgaben zurück zu einem Preis X_1 . Am Ende der Handelsperiode müssen diese Aktien–inklusive Leihgebühr–wieder an den Gläubiger zurückgegeben werden. Falls der spätere Betrag X_1 kleiner ist als die Originalsumme X_0 , so hat der Anleger Profit gemacht (nämlich $X_0 - X_1$). Shortselling ist also profitabel, falls der Vermögenswert abnimmt.

Von manchen Investoren wird Shortselling als sehr riskant angesehen, beinahe gefährlich. Der Grund dafür ist, dass das Potential des Verlustes unbeschränkt ist.

PORTFOLIO RETURN

Wir nehmen nun an, dass n verschiedene Assets verfügbar sind.

Wir können mit diesen n Assets nun ein Masterasset bilden, auch genannt *Portfolio*.

Zunächst teilen wir einen Betrag X_0 unter diesen n Assets auf. Dazu wählen wir Beträge X_{0i} , $i = 1, 2, \dots, n$, mit

$$\sum_{i=1}^n X_{0i} = X_0,$$

wobei X_{0i} jenen Betrag darstellt, welcher in das i -te Asset investiert wurde.

Falls Shortsales erlaubt sind, können manche X_{0i} auch negativ sein. Ansonsten beschränken wir uns auf nichtnegative X_{0i} .

Die investierten Beträge können als Bruchteile der totalen Investition ausgedrückt werden. Daher können wir schreiben:

$$X_{0i} = \omega_i X_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wobei ω_i die Gewichtung oder der Bruchteil des Assets i in dem Portfolio ist. Natürlich gilt

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

und falls Shortselling erlaubt ist, können manche ω_i auch negativ sein.

Sei R_i der Total Return des Assets i . Dann ist der Geldbetrag, welcher am Ende der Periode durch das i -te Asset erzeugt wurde,

$$R_i X_{0i} = R_i \omega_i X_0.$$

Der totale Betrag, welcher am Ende der Periode durch dieses Portfolio erreicht wurde, ist deshalb

$$\sum_{i=1}^n R_i \omega_i X_0.$$

Wir erhalten also, dass der gesamte Total Return des Portfolios gleich

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n R_i \omega_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i$$

ist.

Da $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ist dies äquivalent zu

$$r = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i.$$

Häufig ist die Geldmenge, welche durch den Verkauf des Assets erhalten wird, ungewiss zum Zeitpunkt des Ankaufs. In diesem Fall ist der Return zufällig und kann mit wahr-scheinlichkeitstheoretischen Begriffen beschrieben werden.

ERWARTUNG-STANDARDABWEICHUNG-DIAGRAMM ($\mathbb{E}(r) - \sigma$ -DIAGRAMM)

Die zufälligen Rates of Return von Assets können in einem 2-dimensionalen Diagramm dargestellt werden.

Ein Asset mit $\mathbb{E}(r)$ und Standardabweichung σ wird als Punkt im Diagramm dargestellt (Auf der horizontalen Achse befindet sich das σ , auf der vertikalen Achse der Erwartungswert).

Solche Diagramme werden häufig auch in der *Mean-Variance Investment Analysis* verwendet.

1.2 Portfolio Mean and Variance

MEAN RETURN EINES PORTFOLIOS

Wir nehmen nun an, dass n Assets mit (zufälligen) Rates of Return $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ existieren. Diese haben Erwartungswerte $\mathbb{E}(r_1), \mathbb{E}(r_2), \dots, \mathbb{E}(r_n)$.

Wie formen ein Portfolio mit diesen n Assets und den Gewichtungen ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Der Rate of Return des Portfolios bezüglich des Returns der individuellen Returns ist

$$r = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n.$$

Bildung des Erwartungswertes und Verwendung der Linearität liefert:

$$\mathbb{E}(r) = \omega_1 \mathbb{E}(r_1) + \omega_2 \mathbb{E}(r_2) + \dots + \omega_n \mathbb{E}(r_n).$$

In anderen Worten bedeutet das, dass der erwartete Rate of Return des Portfolios erhalten wird, indem man die gewichtete Summe der einzelnen erwarteten Rates of Return

nimmt.

Der erwartete Return eines Portfolios ist also sehr einfach zu berechnen, wenn die erwarteten Rates of Return der einzelnen Assets bekannt sind, aus welchen sich das Portfolio zusammensetzt.

VARIANZ EINES PORTFOLIO RETURNS

Es werde im Folgenden die Varianz des Returns von Asset i mit σ_i^2 bezeichnet, die Varianz des Returns des Portfolios mit σ^2 und die Kovarianz des Returns von Asset i mit Asset j wird mit σ_{ij} bezeichnet.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (r_i - \mathbb{E}(r_i))\right)\left(\sum_{j=1}^n \omega_j (r_j - \mathbb{E}(r_j))\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j (r_i - \mathbb{E}(r_i))(r_j - \mathbb{E}(r_j))\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}\end{aligned}$$

Sind also sowohl die Kovarianzen der Paare von Asset Returns, sowie die Assetgewichtungen (ω_i, ω_j) , die in einem Portfolio verwendet werden, bekannt, so kann die Varianz des Returns eines Portfolios auf einfachem Wege berechnet werden.

DIVERSIFIKATION

Diversifikation bedeutet Abwechslung, Streuung oder Ausweitung.

Portfolios mit wenigen Assets neigen zu einem hohen Grad an Risiko (dargestellt durch eine relativ große Varianz).

Die Varianz des Returns eines Portfolios kann reduziert werden, indem man zusätzliche Assets in das Portfolio aufnimmt. Diese Aufteilung minimiert sowohl das Gesamtrisiko eines Portfolios als auch dessen Schwankungsbreite und zwar umso mehr, je weniger die verschiedenen Wertpapiere und Investments miteinander korrelieren. So kann die Diversifizierung eines Portfolios zweierlei Auswirkungen haben bzw. zweierlei Zielen dienen:

- Die Verringerung des Gesamtrisikos bei gleichen Ertragschancen
- Die Erhöhung der Ertragschancen bei gleichem Gesamtrisiko

Ziel der Diversifikation ist ein Portfolio mit möglichst hoher Rendite bei gleichzeitig möglichst geringem Risiko. Daher sollten strukturierte Portfolios immer in verschiedene

Wertpapiere und Derivate investieren. Dieses Verfahren widerspiegelt sich in dem Leitspruch: *Don't put all your eggs in one basket!*

Wie die Wirkung bzw. der Einfluss der Diversifikation gemessen werden kann, kann z.B. in [Luenberger, S.151ff] nachgelesen werden.

Im Allgemeinen reduziert Diversifikation den gesamten erwarteten Return, während die Varianz reduziert wird.

Die meisten Investoren wollen nicht viel vom erwarteten Return opfern, bloß um eine kleine Senkung der Varianz zu erreichen.

„Blinde Diversifikation“ ohne Verständnis dessen Einflusses auf die Erwartung und die Varianz des Returns ist nicht unbedingt erstrebenswert.

Dies ist die Motivation hinter dem allgemeinen Mean-Variance-Ansatz von Markowitz. Dieser Ansatz macht den Ausgleich bzw. die Abwägung zwischen Erwartung und Varianz deutlich.

DIAGRAMM EINES PORTFOLIOS

Wir nehmen an, dass zwei Assets in einem Mean-Standard Deviation-Diagramm abgebildet werden. Aus Kombinationen dieser 2 Assets kann ein Portfolio geformt werden, ein neues Asset.

Der Erwartungswert und die Standardabweichung der Rate of Returns dieses neuen Assets können über den Erwartungswert, die Varianzen und die Kovarianzen der Returns der originalen Assets berechnet werden.

Da aber die Kovarianzen auf dem Diagramm nicht angezeigt werden, kann die genaue Lage des Punktes, der das neue Asset darstellt, nicht über die Lage der originalen 2 Assets im Diagramm ermittelt werden.

Wir analysieren die Möglichkeiten wie folgt:

Wir beginnen mit 2 Assets (siehe Abbildung 1)

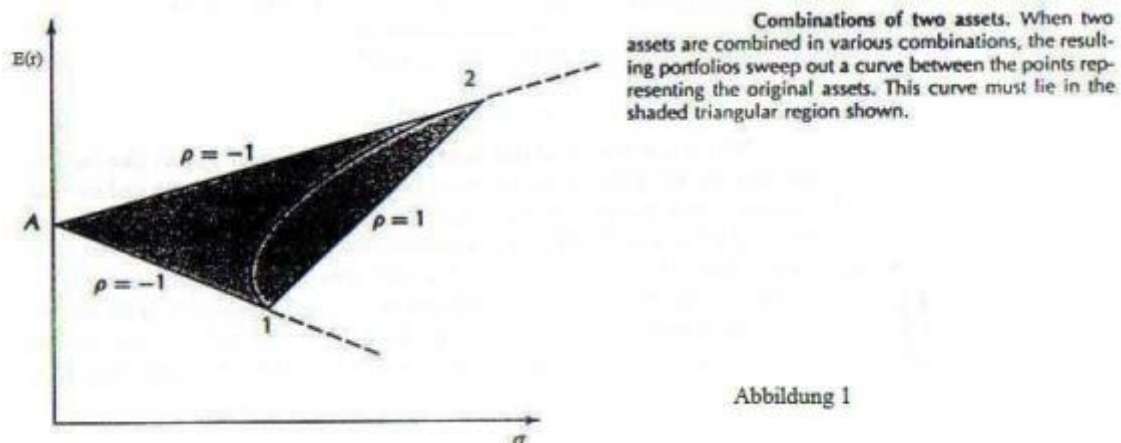


Abbildung 1

Nun definieren wir eine ganze Familie von Portfolios, indem wir die Variable α einführen, die die Gewichtungen definiert als: $\omega_1 = 1 - \alpha$, $\omega_2 = \alpha$

Da α von 0 bis 1 reicht, entsteht ein Portfolio, welches nur Asset 1 beinhaltet, ein Portfolio, welches sich aus einer Mischung von Assets 1 und 2 zusammensetzt und schließlich eines, welches nur Asset 2 beinhaltet.

Werte von α außerhalb der Abgrenzung $0 \leq \alpha \leq 1$ machen eine der beiden Gewichtungen negativ. Dies entspricht Shortselling.

Da α variiert, zeichnen die neuen Portfolios eine Kurve, die Assets 1 und 2 beinhaltet. Diese Kurve sieht in etwa aus wie der gewölbte Umriss bzw. die gebogene Form in der Abbildung, die exakte Gestalt hängt jedoch von σ_{12} ab. Der durchgezogene Teil der Kurve (jener, mit durchgehender Linie) entspricht den positiven Kombinationen der 2 Assets. Der gestrichelte Teil entspricht Shorting von einem der beiden.

Der Beweis für die Parabelform, die die Portfolios zeichnen ist sehr einfach:

Gegeben sind zwei Fonds X und Y mit bekannten Erwartungswerten $\mathbb{E}(r_1)$ und $\mathbb{E}(r_2)$ und Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 .

Daraus formen wir nun folgende Linearkombination:

$$Z(\alpha) = (1 - \alpha)X + \alpha Y.$$

Bilden wir davon den Erwartungswert, so erhalten wir:

$$\mathbb{E}(r_z) = (1 - \alpha)\mathbb{E}(r_1) + \alpha\mathbb{E}(r_2).$$

Für die Varianz erhalten wir:

$$\sigma_z^2 = (1 - \alpha)^2\sigma_1^2 + \alpha^2\sigma_2^2 - 2(1 - \alpha)\alpha\sigma_{12},$$

wobei σ_{12} die Kovarianz von X und Y bezeichnet.

Drücken wir in der ersten Gleichung α aus, so erhalten wir:

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}(r_z) - \mathbb{E}(r_1)}{\mathbb{E}(r_2) - \mathbb{E}(r_1)}.$$

Dies nun in die Gleichung für die Varianz eingesetzt, erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\mathbb{E}(r_2) - \mathbb{E}(r_z)}{\mathbb{E}(r_2) - \mathbb{E}(r_1)} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\mathbb{E}(r_z) - \mathbb{E}(r_1)}{\mathbb{E}(r_2) - \mathbb{E}(r_1)} \right)^2 \sigma_2^2 - 2 \frac{(\mathbb{E}(r_2) - \mathbb{E}(r_z))(\mathbb{E}(r_z) - \mathbb{E}(r_1))}{(\mathbb{E}(r_2) - \mathbb{E}(r_1))^2} \sigma_{12},$$

womit die Parabelform klar ersichtlich ist. ■

⇒ *Portfolio Diagramm Lemma* Die Kurve in einem $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Diagramm, welche definiert ist durch eine nichtnegative Zusammensetzung von zwei Assets 1 und 2, liegt in einem dreieckigen Bereich, welcher definiert ist durch 2 originale Assets und dem Punkt auf der vertikalen Achse

$$A = \frac{\mathbb{E}(r_1)\sigma_2 + \mathbb{E}(r_2)\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Beweis:

Der Rate of Return des Portfolios ist $r(\alpha) = (1 - \alpha)r_1 + \alpha r_2$.

Der Erwartungswert dieses Returns ist

$$\mathbb{E}(r(\alpha)) = (1 - \alpha)\mathbb{E}(r_1) + \alpha\mathbb{E}(r_2).$$

Dies besagt, dass der Erwartungswert zwischen den originalen Erwartungswerten, in direkter Proportion zu den Proportionen der Assets ist.

In einem 50-50 Mix, z.B., wäre der neue Erwartungswert in der Mitte der beiden originalen Erwartungswerte.

Die Standardabweichung des Portfolios ist

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1 - \alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{12} + \alpha^2\sigma_2^2}.$$

Setzt man $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$, so erhält man

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1 - \alpha)^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2}.$$

Es gilt: $-1 \leq \rho \leq 1$

$\rho = 1$ liefert die obere Grenze:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha)^* &= \sqrt{(1 - \alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\ &= \sqrt{[(1 - \alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2]^2} \\ &= (1 - \alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2 \end{aligned}$$

$\rho = -1$ liefert die untere Grenze:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha)_* &= \sqrt{(1 - \alpha)^2\sigma_1^2 - 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\ &= \sqrt{[(1 - \alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2]^2} \\ &= |(1 - \alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2| \end{aligned}$$

Man muss beachten, dass der Ausdruck der oberen Grenze linear in α ist, genauso wie der Ausdruck für den Erwartungswert.

Wenn wir diese 2 linearen Ausdrücke verwenden, können wir folgern, dass sich sowohl die Erwartung, als auch die Standardabweichung, proportional zu α bewegen.

Da α von 0 bis 1 reicht, bedeutet dies, dass der „Portfoliopunkt“ eine gerade Linie zwischen den beiden Punkten berandet.

Dies ist die direkte Linie zwischen 1 und 2 (siehe Abbildung 1).

Der Ausdruck für die untere Grenze ist auch beinahe linear, bis auf den Betrag.

Wenn α klein ist, ist der Term innerhalb des Betrags positiv und wir können den Betrag weglassen. Dieser Term $((1 - \alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2)$ bleibt positiv, bis $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ ist. Danach dreht sich das Vorzeichen um und der absolute Betrag wird $(\alpha\sigma_2 - (1 - \alpha)\sigma_1)$.

Diese Umkehrung passiert beim Punkt A (im Lemma gegeben).

Die 2 linearen Ausdrücke, gemeinsam mit dem linearen Ausdruck für den Erwartungswert implizieren, dass die untere Grenze die „geknickte Linie“ berandet. (siehe Abbildung 1)

Wir folgern, dass die von den Portfoliopunkten abgesteckte Kurve im schattierten Bereich liegen muss und für einen dazwischenliegenden Wert ρ schaut dies wie die gezeigte Kurve aus. ■

1.3 Feasible Set

Wir nehmen an, dass n Assets existieren und plotten diese wieder als Punkte im Mean-Standard Deviation-Diagramm.

Als nächstes formen wir Portfolios mit diesen n Assets.

Wir erhalten Portfolios, die aus jedem der n Assets alleine bestehen, aus Kombinationen von 2 Assets, von 3 Assets, ... also aus allen beliebigen Kombinationen der n Assets.

Die Menge der Punkte, die den Portfolios entsprechen, nennt man *Feasible Set* oder *erreichbare bzw. zulässige Menge*.

Das Feasible Set erfüllt 2 wichtige Eigenschaften:

1. Nehmen wir an, es existieren drei Assets mit verschiedenen Erwartungswerten. Wir wissen, dass beliebige zwei Assets eine gebogene Linie zwischen ihnen definieren. Die drei Linien zwischen den drei möglichen Paaren sieht man in der Abbildung 2 (Bemerkung: \bar{r} bezeichnet hier $\mathbb{E}[r]$).

Wenn nun eine Kombination von z.B. Assets 2 und 3 geformt wird um Asset 4 zu erzeugen, kann diese mit Asset 1 verbunden werden, um eine Linie zu formen, die 1 und 4 verbindet.

Da 4 zwischen 2 und 3 ist, berandet die Linie zwischen 1 und 4 einen durchgezogenen Bereich.

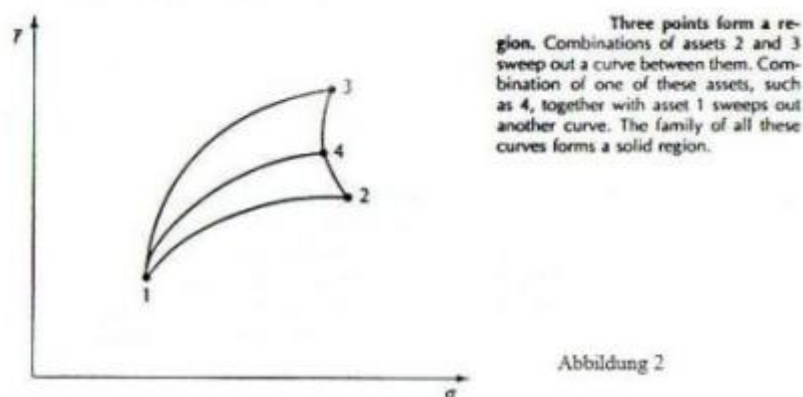


Abbildung 2

2. Die erreichbare bzw. zulässige Menge ist nach links konvex. Das heißt: Es seien beliebige zwei Punkte in dem Bereich gegeben. Die gerade Linie, die die beiden verbindet,

überschreitet den linken Rand des Feasible Sets nicht.

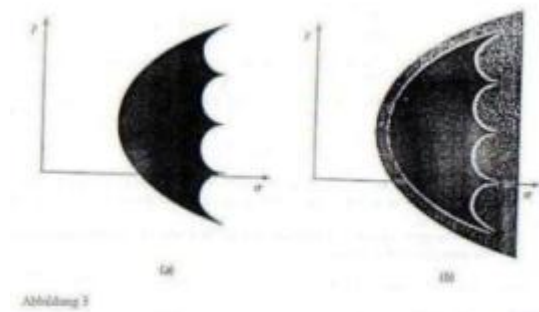
Das folgt aus der Tatsache, dass alle Portfolios (mit positiven Gewichtungen), die aus zwei Assets bestehen, auf, bzw. links von der Linie liegen, die die beiden verbindet. Eine typische erreichbare bzw. zulässige Menge ist in der Abbildung 3 zu sehen.

Es gibt alternative Definitionen für die erreichbare bzw. zulässige Menge, entsprechend davon abhängig, ob Shortselling von Assets erlaubt ist oder nicht.

Die zwei allgemeinen Schlüsse über die Gestalt des Bereichs werden in jedem Fall beibehalten.

Allgemein beinhaltet die erreichbare bzw. zulässige Menge mit Shortselling den Bereich, wenn Shortselling nicht erlaubt ist. (siehe Abbildung 3b)

DAS MINIMUM-VARIANCE SET UND DAS EFFICIENT FRONTIER



Den linken Rand eines Feasible Sets nennt man *Minimum-Variance Set*, da für jeden Wert der erwarteten Rate of Returns, der erreichbare Punkt mit der kleinsten Varianz (oder Standardabweichung) der entsprechende linke Randpunkt ist.

Auf diesem Set gibt es einen speziellen Punkt mit minimaler Varianz, den sogenannten *Minimum-Variance-Point (MVP)*

Nehmen wir an, dass sich die Wahl des Investors über ein Portfolio auf die erreichbaren Punkte auf einer gegebenen horizontalen Linie in der $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Ebene beschränkt. Wir nehmen also an, dass der Ertrag vorgegeben ist. Alle Portfolios auf dieser Kurve haben also denselben Mean Rate of Return, aber unterschiedliche Standardabweichungen (oder Varianzen).

Die meisten Investoren bevorzugen das Portfolio, das mit dem Punkt ganz links auf der Linie übereinstimmt, da σ als Maß für das Risiko benutzt wird. Der Punkt ganz links auf der Linie ist eben jener Punkt mit der kleinsten Standardabweichung für die gegebene Erwartung.

Ein Investor, der diesem Gesichtspunkt beipflichtet, wird auch als *risikoavers* (risikoscheu) bezeichnet, da er oder sie danach strebt, das Risiko (gemessen an der Standardabweichung) zu minimieren. Ein Investor, der einen anderen Punkt als jenen mit der Minimum-Standardabweichung wählen würde, wird auch als *risk preferring* (risikovorziehend, risikobegünstigend) bezeichnet.

Hier wird jedoch die Analyse auf risikoaverse Investoren gerichtet, die die Standardabweichung vermindern wollen. Solche Investoren sind an Punkten auf dem Minimum-Variance

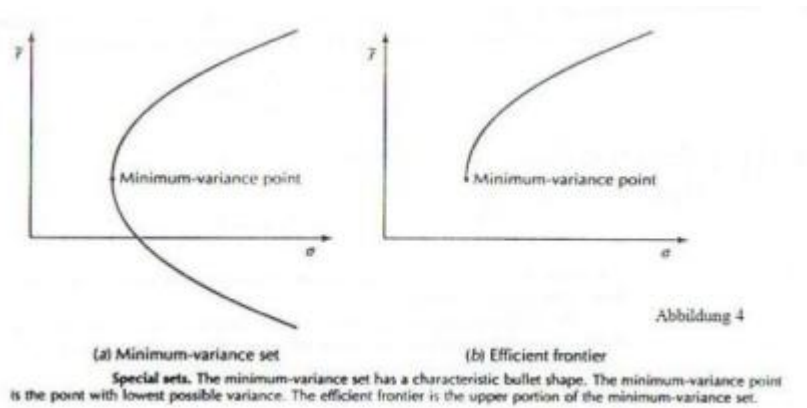
Set interessiert.

Drehen wir nun die Diskussion um 90° und betrachten wir Portfolios, die zu verschiedenen Punkten auf einer vertikalen Linie gehören. Das sind nun jene Portfolios mit einer festgesetzten Standardabweichung und verschiedenen Erwartungswerten.

Die meisten Investoren bevorzugen den höchsten Punkt auf so einer Linie. In anderen Worten: Sie würden jenes Portfolio auswählen, das den größten Erwartungswert zu gegebener Standardabweichung hat. Solche Investoren nennt man *nonsatiation* („Mehr wird weniger bevorzugt (wir sind geizig)“):

Investoren wollen immer mehr Geld. Also: Sie wollen den höchstmöglichen erwarteten Return zu gegebener Standardabweichung. Dieses Argument impliziert, dass nur der höchste Teil des Minimum-Variance Set interessant für Investoren ist, die vom Typ risikoavers und nonsatiation sind.

Dieser obere Teil des Minimum-Variance Set wird als *Efficient Frontier* des Feasible Sets genannt (siehe Abbildung 4). Das sind die effizienten Portfolios in dem Sinne, dass sie die besten Erwartung-Varianz Kombinationen für die meisten Investoren bilden. Wir können daher unsere Untersuchungen auf dieses Frontier beschränken.



2 Das Markowitzmodell

2.1 Zur Person

Der US-amerikanische Ökonom Harry Max Markowitz wurde am 24. August 1927 in Chicago geboren. Er studierte Wirtschaft an der Universität von Chicago und der Aristoteles-Universität in Thessaloniki. Der Ökonom ist der Pionier der modernen Portfoliotheorie. Sein Artikel über [Portfolio Selection] erschien im Jahr 1952. 38 Jahre später (1990) erhielt Markowitz für seine Theorie zur Portfolioauswahl gemeinsam mit Merton H. Miller und William F. Sharpe den Wirtschaftsnobelpreis.

Mit dieser Arbeit legte Markowitz den Grundstein der modernen Kapitalmarkttheorie. Als [Portfolio Selection] 1959 erstmals in Buchform erschien, revolutionierten diese Ansichten das theoretische und praktische Vorgehen im Finanzbereich. Wissenschaftler, Banker und Privatleute mussten radikal umdenken. Markowitz hatte ein Modell entwickelt, das eine völlig neue Strategie bei der Portfolio-Strukturierung forderte.

Markowitz bewies, dass ein optimales Portfolio dann zustande kommt, wenn der Investor verschiedene Wertpapiere unterschiedlicher Unternehmen und Staaten ins Depot legt, anstatt auf einzelne Aktien oder Anleihen zu setzen. Diese Mischung reduziert zwar kurzfristig den Ertrag, reduziert jedoch langfristig das Risiko. Als bedeutende Vertreter der Portfolio-Diversifizierung gelten z.B. Warren Buffett und Peter Lynch.

2.2 Das Markowitz Modell

Wir sollten nun in der Lage sein, ein mathematisches Problem zu formulieren, welches zu Minimum-Varianz Portfolios führt. Ein Stichwort ist die Portfolio-Optimierung unter dem $\mathbb{E} - \sigma^2$ -Ansatz.

Nehmen wir dazu an, dass n Assets existieren. Die erwarteten Rates of Return sind $\mathbb{E}(r_1), \mathbb{E}(r_2), \dots, \mathbb{E}(r_n)$ und die Kovarianzen sind $\sigma_{ij} \forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ein Portfolio ist definiert durch eine Reihe von n Gewichtungen ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, die zusammenaddiert 1 ergeben. Auch erlauben wir negative Gewichtungen (dies entspricht Shortselling). Um ein Minimum-Varianz Portfolio zu finden, fixieren wir den Erwartungswert an einem beliebigen Wert $\mathbb{E}(r)$. Dann suchen wir das Feasible Portfolio mit Minimum-Varianz, welches diese Erwartung hat.

Also formulieren wir das Problem folgendermaßen:

Minimiere

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

unter

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(r)$$

und

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Der Einfachheit halber setzen wir den Faktor „ $\frac{1}{2}$ “ vor die Varianz. Dieser Faktor macht die Endgestalt der Gleichung „schöner“.

Das Markowitzproblem bildet die Basis für die Single-Perioden Investitionstheorie. Das Problem befasst sich explizit mit dem Ausgleich bzw. der Abstimmung zwischen dem erwarteten Rate of Return und der Varianz des Rate of Returns in einem Portfolio.

Wenn einmal das Markowitzproblem formuliert ist, kann es numerisch gelöst werden, um eine spezifische numerische Lösung zu erhalten. Es ist jedoch auch von Nutzen, das Problem analytisch zu lösen, da durch die analytische Lösung auch einige kräftige zusätzliche Schlüsse erhalten werden.

Das Markowitzproblem wird hauptsächlich dann verwendet, wenn sowohl ein risikofreies Asset, als auch ein risikobehaftetes Asset verfügbar sind.

Die Existenz eines risikofreien Assets vereinfacht die Art des Feasible Sets und die analytische Lösung sehr.

2.2.1 Lösung des Markowitzproblems

Wir beginnen unsere Überlegungen zur Lösung, indem wir Lagrangemultiplikatoren λ und μ verwenden.

In unserem Fall sieht die Lagrangefunktion¹ folgendermaßen aus:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \omega_i E(r_i) - E(r) \right) - \mu \left(\sum_{i=1}^n \omega_i - 1 \right)$$

L wird minimiert.

Nun differenzieren wir die Lagrangefunktion nach jeder Variable ω_i und setzen die Ableitungen 0.

Betrachten wir zunächst den Fall mit zwei Variablen und danach verallgemeinern wir den Fall für n Variablen.

Für zwei Variablen gilt also:

$$L = \frac{1}{2} (\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_1 \omega_2 \sigma_{12} + \omega_2 \omega_1 \sigma_{21} + \omega_2^2 \sigma_2^2) - \lambda (\mathbb{E}(r_1) \omega_1 + \mathbb{E}(r_2) \omega_2 - \mathbb{E}(r)) - \mu (\omega_1 + \omega_2 - 1)$$

Also:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 \omega_1 + \sigma_{12} \omega_2 + \sigma_{21} \omega_2) - \lambda \mathbb{E}(r_1) - \mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_2} = \frac{1}{2} (\sigma_{12} \omega_1 + \sigma_{21} \omega_1 + 2\sigma_2^2 \omega_2) - \lambda \mathbb{E}(r_2) - \mu$$

¹Allgemein wird die Lagrangefunktion so geformt, indem man zuerst jede Randbedingung umformt, sodass auf der rechten Seite der Gleichungen jeweils 0 steht. Dann wird jede linke Seite mit seinen Lagrangemultiplikatoren multipliziert und von der Zielfunktion subtrahiert. In unserem Problem sind λ und μ die Multiplikatoren für die 1. und 2. Randbedingungen.

Aus $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ und den auf 0 gesetzten Ableitungen erhält man:

$$\sigma_1^2 \omega_1 + \sigma_{12} \omega_2 - \lambda \mathbb{E}(r_1) - \mu = 0$$

$$\sigma_{21} \omega_1 + \sigma_2^2 \omega_2 - \lambda \mathbb{E}(r_2) - \mu = 0$$

Wir erhalten also zwei Gleichungen. Dazu kommen noch die beiden Gleichungen der Randbedingungen. Also haben wir insgesamt vier Gleichungen. Diese können für die vier Unbekannten $\omega_1, \omega_2, \lambda$ und μ gelöst werden. (Der Fall für zwei Assets ist eigentlich ein entarteter Fall, da die zwei Unbekannten ω_1 und ω_2 eindeutig durch die zwei Randbedingungen festgelegt sind. Die „Degeneration bzw. Entartung“ verschwindet aber zumeist bei drei oder mehreren Assets. Trotzdem deuten die Gleichungen, die für den zwei-Assets-Fall erhalten werden, die Struktur für die entsprechenden Gleichungen für n Assets an) Die allgemeine Form für n Variablen kann nun (durch offensichtliche Verallgemeinerung) geschrieben werden als:

⇒ Gleichungen für eine Kurve effizienter Portfolios

Die n Portfolio-Gewichtungen ω_i für $i = 1, 2, \dots, n$ und die zwei Lagrangemultiplikatoren λ und μ für ein effizientes Portfolio (Shortselling erlaubt) mit erwartetem Rate of Return $\mathbb{E}(r)$ genügen

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j - \lambda \mathbb{E}(r_i) - \mu = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{a})$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(r) \quad (\text{b})$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (\text{c})$$

In (a) haben wir n Gleichungen, hinzu kommen die beiden Randbedingungen (b) und (c). Dies ergibt also $n + 2$ Gleichungen. Dementsprechend gibt es $n + 2$ Unbekannte: die ω_i , λ und μ .

Die Lösung zu diesen Gleichungen ergibt die Gewichtungen für ein effizientes Portfolio mit Erwartungswert $\mathbb{E}(r)$. Alle $n + 2$ Gleichungen sind linear und können daher mit Methoden aus der linearen Algebra gelöst werden.

2.2.2 Nichtnegative Nebenbedingungen

In der vorhergehenden Ableitung waren die Vorzeichen der ω_i -Variablen nicht eingeschränkt, das heißt Shortselling war erlaubt. Wir können Shortselling „verbieten“, indem wir jedes ω_i auf nichtnegative Werte einschränken.

Das führt zu folgender alternativen Darstellung des Markowitzproblems:

Minimiere

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j$$

unter

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(r_i)\omega_i = \mathbb{E}(r)$$

und

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dieses Problem kann nicht auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems reduziert werden. Dies bezeichnet man als ein „quadratisches Programm“ (quadratic program), da die Zielfunktion quadratisch ist und die Randbedingungen lineare Gleichungen und Ungleichungen sind. Spezielle Computerprogramme sind verfügbar, um solche Probleme zu lösen. Kleine bis mittelmäßige Probleme von diesem Typ können auch leicht mittels Tabellenkalkulation gelöst werden.

In der Finanzwelt gibt es eine Vielzahl an Sonderprogrammen, die konstruiert wurden, um dieses Problem für hunderte, ja sogar tausende von Assets zu lösen.

Ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Formulierungen ist, dass wenn Shortselling erlaubt ist, die meisten, wenn nicht sogar alle, der optimalen ω_i von Null verschiedene Werte (entweder positiv oder negativ) haben. Es werden also im Wesentlichen alle Assets verwendet. Im Gegensatz dazu sind, wenn Shortselling nicht erlaubt ist, viele der Gewichte normalerweise gleich 0.

3 Weitere Begrifferklärung, die für das CAPM notwendig sind

3.1 Das Two-Fund Theorem (kein risikoloses Asset)

Das Minimum-Variance Set hat eine wichtige Eigenschaft, welche ihre Berechnung bzw. Kalkulation stark vereinfacht.

Erinnern wir uns noch einmal daran, dass Punkte in diesem Set einem System von $n + 2$ linearen Gleichungen genügen, die hier noch einmal zu sehen sind:

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j - \lambda \mathbb{E}(r_i) - \mu = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{a})$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(r) \quad (\text{b})$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (\text{c})$$

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei bekannte Lösungen, $w^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_n^1), \lambda^1, \mu^1$ und $w^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \lambda^2, \mu^2$, mit erwarteten Rates of Return $\mathbb{E}(r^1)$ und $\mathbb{E}(r^2)$.

Formen wir nun eine Kombination durch Multiplikation der 1. Lösung mit α und der 2. Lösung mit $(1 - \alpha)$.

Durch direkte Substitution sehen wir, dass das Ergebnis ebenfalls eine Lösung der $n + 2$ Gleichungen mit Erwartungswert $\alpha \mathbb{E}(r^1) + (1 - \alpha) \mathbb{E}(r^2)$ ist.

Um dies ausführlicher nachzuweisen, beachten wir, dass $\alpha w^1 + (1 - \alpha) w^2$ ein legitimes Portfolio mit Gewichtungen, die aufsummiert 1 ergeben, ist. Daher ist (c) erfüllt.

Als nächstes beachten wir, dass der erwartete Return tatsächlich $\alpha \mathbb{E}(r^1) + (1 - \alpha) \mathbb{E}(r^2)$ ist. Daher ist (b) für diesen Wert erfüllt.

Zuletzt, da aufgrund der beiden Lösungen die linke Seite von (a) gleich 0 ist macht auch ihre Kombination die linke Seite in (a) gleich 0. Also ist auch (a) erfüllt.

Wir erhalten daher, dass das Kombinationen-Portfolio $\alpha w^1 + (1 - \alpha) w^2$ auch eine Lösung ist, das heißt es repräsentiert also ebenfalls einen Punkt im Minimum-Variance Set.

Nehmen wir an, w^1 und w^2 sind zwei verschiedene Portfolios im Minimum-Variance Set. Variiert α zwischen $-\infty$ und ∞ , gilt also $-\infty < \alpha < \infty$, so durchlaufen die Portfolios, definiert durch $\alpha w^1 + (1 - \alpha) w^2$, das gesamte Minimum-Variance Set.

Wir können nun natürlich die zwei originalen effizienten Lösungen auswählen (im oberen Teil des Minimum-Variance Sets gelegen) und diese erzeugen alle anderen effizienten Punkte (sowie alle anderen Punkte im Minimum-Variance Set).

Dieses Resultat wird oft in einer Form angegeben, welche eine einsatzfähige Bedeutung für Investoren hat:

⇒ Das Two-Fund Theorem

Zwei effiziente Fonds (Portfolios) können gebildet werden, sodass jedes effiziente Portfolio als Kombination von diesen zweien hinsichtlich Erwartungswert und Varianz dupliziert werden kann.

In anderen Worten: Alle Investoren, die effiziente Portfolios suchen, brauchen nur in Kombinationen von diesen beiden Fonds investieren.

Bezogen auf das Two-Fund Theorem könnten zwei Mutual Funds² ein komplettes Investitionsservice für jeden zur Verfügung stellen. Niemand müsste individuelle Stocks separat kaufen, sondern einfach nur Shares der Mutual Fonds.

Diese Folgerung basiert jedoch auch der Annahme, dass

- jeder nur auf Erwartungswert und Varianz achtgibt
- jeder dieselbe Abwägung bzw. Schätzung der Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen hat und
- eine grundlegende Singleperioden-Struktur angebracht ist.

Das Two-Fund Theorem hat auch Auswirkungen auf Berechnungen bzw. Kalkulationen. Um das formulierte Problem in [Kapitel 2.2 (Das Markowitz Modell)] für alle Werte von $\mathbb{E}(r)$ zu lösen, ist es nur notwendig, zwei Lösungen zu finden und dann Kombinationen aus diesen beiden zu formen.

Ein einfacher Weg zwei Lösungen anzugeben ist, indem Werte von λ und μ spezifiziert werden. Geeignete Möglichkeiten sind (a) $\lambda = 0$, $\mu = 1$ und (b) $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

Bei einer dieser Lösungen könnte die Randbedingung $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ verletzt werden, was jedoch später behoben werden kann, indem alle ω_i durch einen gemeinsamen Faktor normalisiert werden.

Die durch Möglichkeit (a) erhaltene Lösung vernachlässigt die Randbedingung des erwarteten Mean Rate of Returns; Das ist also der Minimum-Variance Punkt.

3.2 Die Aufnahme eines risikolosen Assets

Für risikobehaftete Assets gilt, dass $\sigma > 0$ ist.

Ein risikoloses Asset hat einen Return, der deterministisch ist (der mit Sicherheit bekannt ist) und hat daher $\sigma = 0$. In anderen Worten: Ein risikoloses Asset ist ein reines zinsbringendes Instrument.

Seine Aufnahme in ein Portfolio entspricht dem *Lending* oder *Borrowing* von Geld zu einem risikolosen Zinssatz.

Lending (wie zB. der Einkauf eines Bonds) entspricht dem, dass das risikolose Asset positive Gewichtung hat, wobei Borrowing bedeutet, dass das risikolose Asset eine negative Gewichtung hat.

Borrowing bedeutet Ausleihe (Kreditaufnahme), wobei Lending einer Anleihe (Darlehensgewährung, Kreditgewährung) entspricht.

Im Ein-Perioden-Modell ist die Aufnahme eines risikolosen Assets in die Liste der möglichen Assets notwendig, um Realismus zu erhalten, ansonsten ist der Zins stochastisch.

Das risikolose Asset hat einen fixen Rate of Return r_f . Die Aufnahme eines solchen Assets

²Ein Mutual Fond ist eine Investment Company, die Investitionskapital von Individuellen akzeptiert und reinvestiert dieses Kapital in eine Vielfalt von individuellen Stocks. Jeder dieser „Individuellen“ hat einen Anspruch auf seinen proportionalen Anteil des Portfoliowertes des Fonds.

vereinfacht die Form des erreichbaren bzw. zulässigen Bereichs erheblich. Es transformiert nämlich den oberen Rand in eine gerade Linie. Diese Linie ist die effiziente Grenze. Die geradlinige Grenze berührt den ursprünglich erreichbaren Bereich (der Bereich, der nur durch die risikobehafteten Assets definiert wird) in einem einzigen Punkt F . Das führt uns nun zum wichtigen One-Fund Theorem.

3.3 One-Fund Theorem

⇒ *Das ONE FUND THEOREM*

Es gibt einen Singlefond F von risikoreichen Assets, sodass jedes effiziente Portfolio konstruiert werden kann als Kombination des Fonds F und dem risikofreien Asset.

Das heißt, dass Investoren, welche effiziente Portfolios suchen, nur in einen Masterfond von risikoreichen Assets und in das risikolose Asset investieren müssen. Verschiedene Investoren werden verschiedene Kombinationen von diesen zweien bevorzugen.

4 Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)

4.1 Definition laut Börselexikon

Diese Portfolio-Theorie besagt, dass in effizient funktionierenden Märkten, wo jede Information bereits in die Preise eingeflossen ist, ein Mehr an Ertrag nur durch ein Mehr an Risiko erkaufte werden kann.

4.2 Einführung

Die Investitionswissenschaften beschäftigen sich vor allem mit folgenden zwei Hauptproblemen:

1. den besten Ablauf in einer Investitionssituation zu bestimmen (das beste Portfolio zu entwerfen, die optimale Strategie für das Managen einer Investition bzw. Anlage zu entwerfen,...)
2. den korrekten, arbitragefreien, fairen oder Gleichgewichts-Preis eines Assets zu bestimmen

Hier konzentrieren wir uns hauptsächlich auf das Preisproblem, das heißt auf die Frage nach dem Preis. Es wird der korrekte Preis eines risikobehafteten Assets im Rahmen des Mean-Variance Settings hergeleitet. **Das Ergebnis ist das Capital Asset Pricing Model (CAPM).**

Das CAPM wurde von William F. Sharpe, John Lintner und Jan Mossin in den sechziger Jahren unabhängig voneinander entwickelt und baut auf der Portfoliotheorie von Harry M. Markowitz auf.

4.3 Markt-Gleichgewicht

Stellen wir uns vor, dass jeder ein Mean-Variance-Optimierer ist, wie bereits vorher beschrieben wurde.

Weiters nehmen wir an, dass jeder der wahrscheinlichkeitstheoretischen Struktur von Assets beipflichtet. Dh. also, jeder teilt den Returns von Assets dieselben Erwartungswerte, dieselben Varianzen und dieselben Kovarianzen zu.

Außerdem nehmen wir an, dass es einen eindeutigen risikofreien Zinssatz für „borrowing and lending“ gibt, der für alle verfügbar ist.

Eine weitere Annahme: Der Markt ist friktionslos, d.h., es gibt keine Handelskosten (Transaktionskosten), wie Börsengebühren etc., oder Steuern.

Was geschieht nun unter diesen Annahmen?

Vom One-Fund-Theorem wissen wir, dass jeder den Singlefond von risikobehafteten Assets kaufen wird und dazu kann man auch „borrow or lend“ zum risikolosen Zinssatz.

Außerdem, da dieselben Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen betrachtet werden, wird auch derselbe risikobehaftete Fond verwendet werden. Der Mix dieser 2 Assets, dem risikobehafteten Fond und dem risikolosen Asset, wird wahrscheinlich unter den einzelnen Personen variieren. Einige werden danach streben, Risiko zu vermeiden und werden

dementsprechend einen hohen Anteil von dem risikolosen Asset in ihrem Portfolio haben. Andere, die „aggressiver“ sind, werden eher einen hohen Anteil von dem risikobehafteten Fond haben.

Jeder wird also ein Portfolio zusammenstellen, welches ein Mix aus dem risikolosen Asset und dem Single, risikobehafteten One Fund ist.

Deshalb ist der One Fund in dem Theorem wirklich der einzige Fond, der verwendet wird.

Wenn jeder denselben Fond von risikobehafteten Assets bezieht, was muss dieser Fond dann sein? Die Antwort ist, dass dieser Fond dem Marktportfolio gleichen muss. Das Marktportfolio ist die Gesamtheit aller Assets. In der Welt der Dividendenpapiere ist es die Gesamtheit aller Shares von IBM, GM, DIS,... Wenn jeder nur einen Fond kauft und deren Käufe ergeben den Markt, dann muss dieser eine Fond ebenfalls der Markt sein; dh. er muss Anteile von jedem Stock beinhalten, im Verhältnis zur Repräsentation dieses Stocks im gesamten Markt.

Die Gewichtung eines Assets in einem Portfolio wird definiert als der Anteil am Portfolio-Kapital, welcher auf dieses Asset entfällt. Daher ist die Gewichtung eines Assets im Marktportfolio gleich dem Verhältnis des totalen Kapitalwertes des Assets zum totalen Kapitalmarktwert. Diese Gewichtungen werden auch *Kapitalisierungsgewichtungen* genannt.

In der Situation, wo jeder der Mean-Variance Methode folgt, mit der gleichen Schätzung der Parameter, wissen wir, dass der effiziente Fond von risikobehafteten Assets das Marktportfolio sein wird. Unter diesen Voraussetzungen müssen wir daher nicht das Mean-Variance Problem formulieren, um die zugrundeliegenden Parameter zu schätzen oder das Gleichungssystem zu lösen, das das optimale Portfolio definiert. Wir wissen, dass das optimale Portfolio das Marktportfolio sein wird. Wie kann das sein, dass wir das Problem gelöst haben, ohne die erforderlichen Daten zu kennen? Die Antwort beruht auf einem Gleichgewichtsargument.

Wenn jeder (oder zumindest eine große Anzahl an Menschen) dieses Problem löst, bleibt uns diese Arbeit erspart.

Es funktioniert folgendermaßen: Der Return eines Assets hängt sowohl vom anfänglichen Preis als auch von Endpreis ab. Die anderen Investoren lösen das Mean-Variance Portfolio Problem, indem sie ihre üblichen und geläufigen Schätzungen verwenden. Wenn ihre Auswertungen nicht mit dem zusammenpassen, was verfügbar ist, müssen sich die Preise ändern. Die Preise der Assets unter starker Nachfrage werden steigen, die Preise von Assets unter schwacher Nachfrage werden fallen. Diese Preisänderungen beeinflussen die Schätzungen von Asset Returns augenblicklich und daher werden die Investoren ihre optimalen Portfolios neu berechnen. Dieser Prozess wird solange fortgesetzt, bis die Nachfrage dem Angebot entspricht. Dh. es wird solange fortgesetzt, bis ein Gleichgewicht herrscht. In einer idealisierten Welt, wo jeder Investor ein Mean-Variance Investor ist und alle dieselben Schätzungen und Annahmen treffen, kauft jeder dasselbe Portfolio und dieses muss gleich dem Marktportfolio sein. In anderen Worten: Preise passen sich an, um den Markt zur Effizienz zu führen. Nachdem die anderen Personen die Angleichungen gemacht haben, können wir sicher sein, dass das effiziente Portfolio das Marktportfolio ist, also müssen wir keine Berechnungen tätigen.

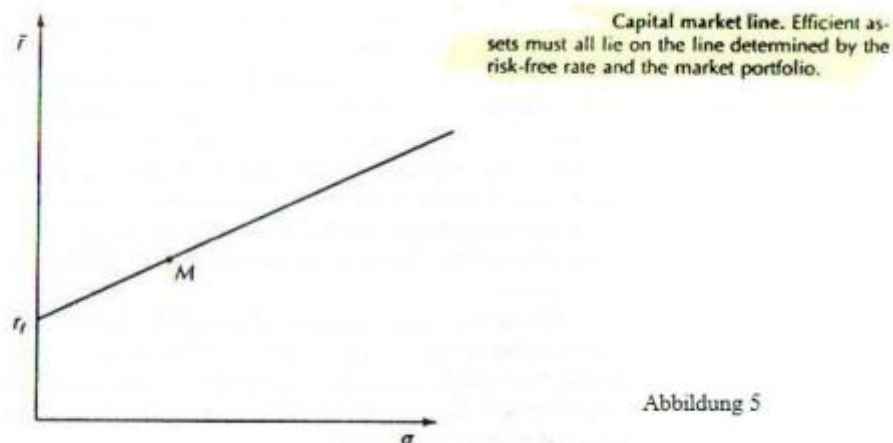
Die Hauptaussage des Mean-Variance Ansatzes ist, dass der One Fund das Marktportfolio sein muss.

Bemerkung: Dies gilt nur bei Existenz eines risikolosen Assets.

4.4 Die Capital Market Line

Mit den vorhergehenden Schlüssen, dass der effiziente Singlefond von risikobehafteten Assets das Marktportfolio ist, können wir diesen Fond im $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Diagramm mit einem **M** für **Market** benennen.

Somit besteht das Efficient Set aus einer einzigen geraden Linie, ausgehend vom risikofreien Punkt und durch das Marktportfolio durchgehend. Diese Linie wird auch *Capital Market Line* genannt (siehe Abbildung 5)



Diese Linie zeigt die Beziehung zwischen dem erwarteten Rate of Return und dem Risk of Return (gemessen an der Standardabweichung) für effiziente Assets oder Portfolios von Assets.

Sie wird auch *Pricing Line* genannt, da Preise angepasst werden sollen, damit effiziente Assets auf diese Linie fallen.

Die Capital Market Line (CML) sagt aus, dass, wenn das Risiko steigt, der entsprechende erwartete Rate of Return auch steigen muss. Weiters kann diese Beziehung durch eine gerade Linie beschrieben werden, wenn das Risiko an der Standardabweichung gemessen wird. Mathematisch ausgedrückt, sagt die CML folgendes aus:

$$\mathbb{E}(r) = r_f + \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma$$

$\mathbb{E}(r_M)$ bezeichnet den Erwartungswert des Market Rate of Return.

σ_M bezeichnet die Standardabweichung des Market Rate of Return.

$\mathbb{E}(r)$ bezeichnet den Erwartungswert des Rate of Return eines beliebigen effizienten Assets.

σ bezeichnet die Standardabweichung eines beliebigen effizienten Assets.

Die Steigung der CML ist

$$K = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

und wird häufig auch *Marktpreis für das Risiko* genannt. Es besagt, um wieviel sich der erwartete Rate of Return eines Portfolios erhöhen muss, wenn die Standardabweichung zunimmt.

4.5 Das Pricing Model

Die Capital Market Line setzt den erwarteten Rate of Return eines effizienten Portfolios mit seiner Standardabweichung in Beziehung. Es zeigt aber nicht, wie der erwartete Rate of Return eines individuellen Assets mit seinem individuellen Risiko zusammenhängt. Diese Beziehung wird durch das Capital Asset Pricing Model ausgedrückt.

⇒ *Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)*

Wenn das Marktportfolio M effizient ist, erfüllt der erwartete Return $\mathbb{E}(r_i)$ eines beliebigen Assets i

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

mit $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$.

Beweis:

Für ein beliebiges α bestehe das Portfolio aus einem Teil α , der in Asset i investiert wird und aus einem Teil $(1 - \alpha)$, der in das Marktportfolio M investiert wird. Wir erlauben $\alpha < 0$, was borrowing zum risikolosen Zinssatz entspricht.

Der erwartete Rate of Return dieses Portfolios ist

$$\mathbb{E}(r_\alpha) = \alpha\mathbb{E}(r_i) + (1 - \alpha)\mathbb{E}(r_M)$$

und die Standardabweichung des Rate of Returns ist

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{iM} + (1 - \alpha)^2\sigma_M^2}$$

Da α variiert, beranden diese Werte eine Kurve im $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Diagramm (siehe Abbildung 6).

Insbesondere entspricht $\alpha = 0$ dem Marktportfolio M . Diese Kurve kann die Capital Market Line nicht überschreiten.

Angenommen die Kurve würde die CML kreuzen, würde das Portfolio, das einem Punkt über der CML entsprechen würde, die Definition der Kapitalmarktlinie (der effiziente Rand des Feasible Sets zu sein) verletzen.

Da α durch 0 geht, muss die Kurve die CML bei M tangieren.

Diese Berührungsbedingung kann auf die Bedingung übertragen werden, dass die Steigung der Kurve gleich der Steigung der Kapitalmarktlinie im Punkt M ist. Um diese

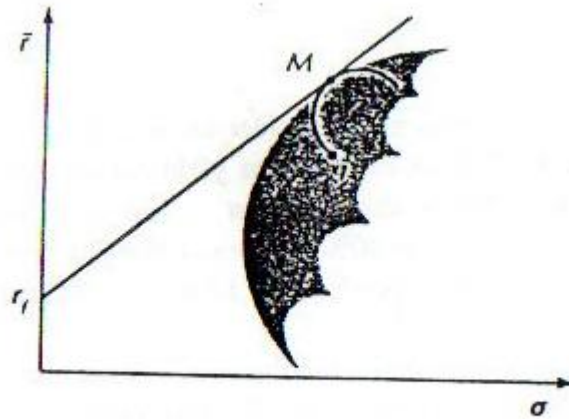


Abbildung 6

Bedingung aufzustellen, müssen wir einige Ableitungen berechnen.

$$\frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)}{d\alpha} = \mathbb{E}(r_i) - \mathbb{E}(r_M)$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1 - 2\alpha)\sigma_{iM} + (\alpha - 1)\sigma_M^2}{\sigma_\alpha}$$

Daraus erhalten wir

$$\left. \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

Wir verwenden nun die Beziehung

$$\frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)}{d\sigma_\alpha} = \frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)/d\alpha}{d\sigma_\alpha/d\alpha}$$

um folgendes zu erhalten:

$$\left. \frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)}{d\sigma_\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{(\mathbb{E}(r_i) - \mathbb{E}(r_M))\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

Diese Steigung muss der Steigung der Kapitalmarktlinie gleichen. Daher,

$$\frac{(\mathbb{E}(r_i) - \mathbb{E}(r_M))\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

Auflösen nach $\mathbb{E}(r_i)$ liefert:

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \left(\frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \right) \sigma_{iM} = r_f + \beta_i (\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

und somit das gewünschte Ergebnis. ■

Der Wert β_i wird auch *Beta* eines Assets genannt. Es ist nach wie vor richtig, dass allgemein das Risiko eines Portfolios bzgl σ gemessen wird, die geeignete Messgröße für das Risiko von einzelnen Assets ist aber deren β . Das Beta eines Assets ist alles, was man über das Risiko eines Assets wissen muss, um die CAPM Formel anzuwenden.

Der Wert $(\mathbb{E}(r_i) - r_f)$ wird auch *erwarteter Excess Rate of Return des Assets i* genannt. Ebenso ist $(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$ der *erwartete Excess Rate of Return des Marktportfolios*. Bezüglich dieser erwarteten Excess Rates of Return sagt das CAPM, dass der erwartete Excess Rate of Return eines Assets proportional zum erwarteten Excess Rate of Return des Marktportfolios ist, und der Proportionalitätsfaktor ist β .

4.5.1 Beta eines Portfolios

Es ist einfach, das gesamte Beta eines Portfolios bezüglich der Betas der einzelnen Assets in einem Portfolio zu berechnen.

Nehmen wir zum Beispiel an, dass ein Portfolio n Assets beinhaltet, mit den Gewichtungen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Der Rate of Return dieses Portfolios ist

$$r = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i.$$

Daraus folgt

$$\text{cov}(r, r_M) = \sum_{i=1}^n \omega_i \text{cov}(r_i, r_M).$$

Es folgt sofort, dass

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i$$

ist.

In anderen Worten: Das Portfolio-Beta ist nur ein gewichtetes Mittel der Betas von den einzelnen Assets im Portfolio, wobei die Gewichtungen identisch zu jenen sind, die das Portfolio definieren.

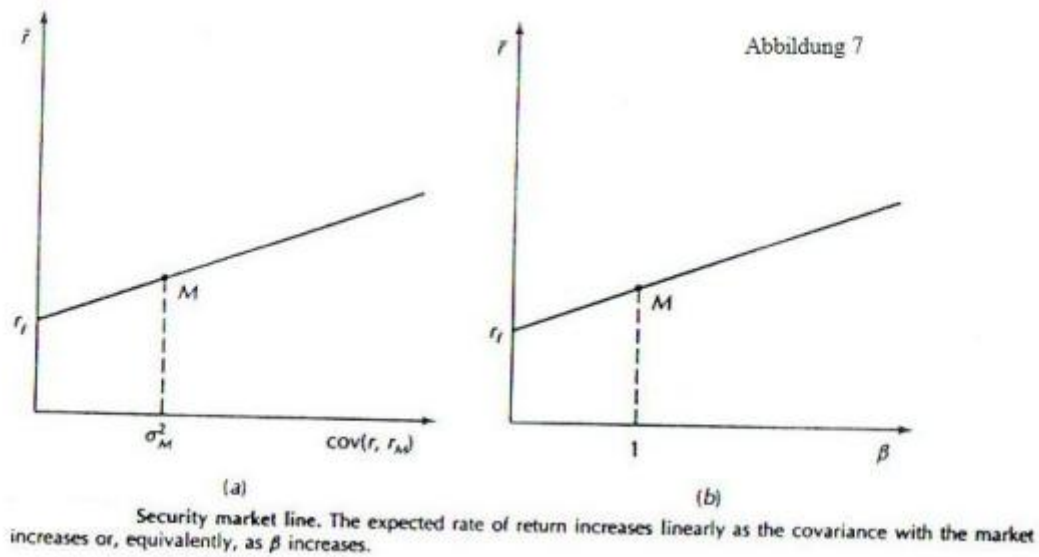
4.6 Die Security Market Line

Die CAPM-Formel kann in grafischer Form ausgedrückt werden, indem die Formel als lineare Beziehung aufgefasst wird. Diese Beziehung wird *Security Market Line* (SML) genannt. Zwei Versionen werden in Abbildung 7 gezeigt.

Beide Graphen zeigen die lineare Abweichung von $\mathbb{E}(r)$. Der 1. Graph drückt dies in Kovarianzform mit $\text{cov}(r, r_M)$ aus auf der horizontalen Achse. Das Marktportfolio entspricht dem Punkt σ_M^2 .

Der 2. Graph zeigt die Bedingung in Betaform, mit β auf der horizontalen Achse. In diesem Fall entspricht der Markt dem Punkt $\beta = 1$.

Beide dieser zwei Linien beleuchten das Wesentliche der CAPM-Formel. Unter den Gleichgewichtsbedingungen (vom CAPM vorausgesetzt), soll jedes Asset auf die Security Market Line fallen (auf der Linie liegen).



Die SML drückt die Risiko-Preis-Struktur von Assets gemäß dem CAPM aus und hebt hervor, dass das Risiko eines Assets von seiner Kovarianz mit dem Markt abhängig ist, oder äquivalent dazu, abhängig von seinem Beta ist.

4.6.1 systematisches Risiko

Um zu zeigen, warum Beta das wichtigste Maß für das Risiko ist, schreiben wir den zufälligen Rate of Return von Asset i als

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i. \quad (1)$$

Die Zufallsvariable ϵ_i ist hier der Exaktheit halber angebracht. Die CAPM- Formel sagt einige Dinge über ϵ_i aus:

- Bildet man in (1) den Erwartungswert, so besagt das CAPM, dass

$$\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0 \quad \text{ist.}$$

- Nimmt man in (1) die Korrelation mit r_M (und verwendet die Definition von β_i), so erhält man

$$\text{cov}(\epsilon_i, \sigma_M) = 0.$$

Wir können daher

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \text{var}(\epsilon_i)$$

schreiben und sehen, dass σ_i^2 die Summe von 2 Termen ist.

Den ersten Teil, $\beta_i^2 \sigma_M^2$, nennt man *systematisches Risiko*.

Das ist das zum gesamten Markt dazugehörige Risiko (also jenes Risiko, das dem gesamten Markt beizuordnen ist). Dieses Risiko kann nicht durch Diversifikation reduziert werden, da jedes Asset mit einem $\beta \neq 0$ dieses Risiko enthält.

Den zweiten Teil, $\text{var}(\epsilon_i)$, nennt man *unsystematisches Risiko, idiosynkratisches oder*

spezifisches Risiko

Dieses Risiko ist unkorreliert mit dem Markt und kann durch Diversifikation reduziert werden. Das systematische (oder nicht-diversifizierbare) Risiko, gemessen an Beta, ist sehr wichtig, da es direkt mit dem systematischen Risiko anderer Assets zusammenhängt.

Betrachten wir ein Asset auf der CML (um exakt auf der Linie zu sein, muss das Asset äquivalent sein zu einer Kombination aus dem Marktportfolio und dem risikofreien Asset) mit einem β -Wert.

Die Standardabweichung dieses Assets ist $\beta\sigma_M$. Es hat nur systematisches Risiko; es gibt hier kein unsystematisches Risiko.

Dieses Asset hat einen erwarteten Rate of Return, der gleich

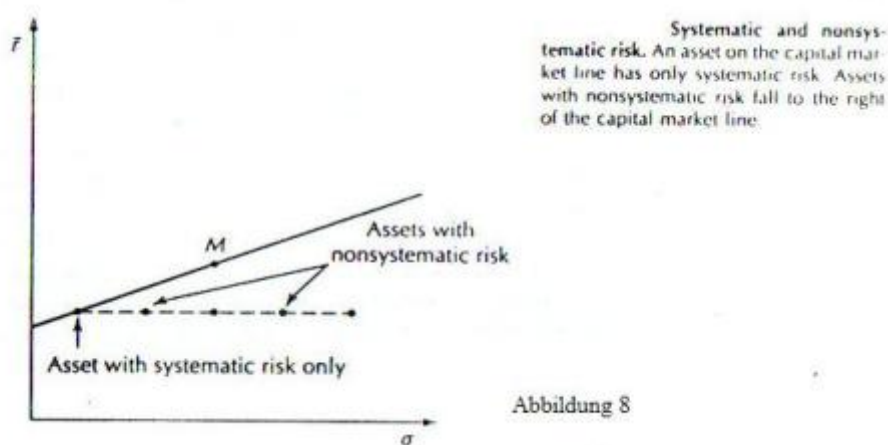
$$\mathbb{E}(r) = r_f + \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

ist.

Nun betrachten wir eine ganze Gruppe von anderen Assets, alle mit demselben β -Wert. Dem CAPM zufolge haben diese alle denselben erwarteten Rate of Return, äquivalent zu $\mathbb{E}(r)$.

Wenn diese Assets unsystematisches Risiko tragen, fallen sie nicht von der Capital Market Line. Wenn allerdings das unsystematische Risiko steigt, weichen die Punkte auf der $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Ebene (die diese Assets repräsentieren) nach rechts ab (siehe Abbildung 8).

Die horizontale Distanz eines Punktes von der CML ist daher ein Maß für das unsystematische Risiko.



4.7 Auswirkungen und Konsequenzen von Investitionen

Die interessante Frage für einen Investor ist:

Kann das CAPM bei Investitionsentscheidungen helfen? Diese Frage ist nicht so einfach zu beantworten.

Das CAPM behauptet (oder nimmt an)– basierend auf einem Gleichgewichtsargument– dass die Lösung zum Markowitzproblem folgende ist: Dass das Marktportfolio der One Fund (und auch der einzige Fond) von risikobehafteten Assets ist, den jeder halten muss.

Dieser Fond wird nur durch das risikofreie Asset aufgestockt.

Die Investitions-Empfehlung ist, dass ein Investor lediglich das Marktportfolio einkaufen muss.

Da es für einen einzelnen sehr mühsam wäre, das Marktportfolio zusammenzustellen, wurden gemeinsame Fonds designed, die dem Marktportfolio gleichkommen. Diese Fonds nennt man *Indexfonds*, da sie normalerweise versuchen, das Portfolio eines „Major Stock Market Index“ (Haupt-Stock-Markt-Index), wie z.B. Standard&Poor's 500 (S&P500) (hat einen Durchschnitt von 500 Stocks), die als Gruppe den Gesamtmarkt vertreten, zu kopieren. Andere Indizes verwenden sogar eine größere Anzahl an Stocks. Ein CAPM-Purist (Das ist jemand, der die CAPM-Theorie (so wie sie für öffentlich gehandelte Wertpapiere angewendet wird)) vollkommen akzeptiert, könnte also einfach einen dieser Indexfonds (der als der One Fund fungiert) kaufen, genauso wie einige risikofreie Wertpapiere wie die U.S. Treasury bills.

Ein Bereich, wo der CAPM-Ansatz direkte Anwendung hat, ist in der Analyse von Assets, die keine bekannten bzw. gängigen Marktpreise hat. In diesem Fall kann das CAPM verwendet werden, um einen angemessenen und vernünftigen Preis zu finden. Eine wichtige Klasse von Problemen dieses Typs sind die sogenannten Project Evaluation Problems (Abweichungen bzw. Schwankungen von „Capital Budgeting Problems“), die in Firmen auftreten.

Die CAPM-Theorie kann verwendet werden, um die Effizienz bzw. die Leistung eines Investmentportfolios zu bewerten und in der Tat ist es heutzutage üblich, institutionelle Portfolios (wie z.B. Pensionsfonds und Mutual Funds) mit dem CAPM-Gerüst/System zu bewerten.

(Ein Beispiel dazu: siehe [Luenberger, Beispiel „ABC fund analysis“, S.184ff])

4.8 CAPM als Pricing Formel

Das CAPM ist ein Preismodell. Allerdings enthält die Standard CAPM-Formel nicht explizit Preise, sondern nur erwartete Rates of Return. Um zu sehen, warum das CAPM Pricing Model genannt wird, müssen wir zurück zur Definition des Returns gehen.

Nehmen wir an, dass ein Asset zum Preis P erworben wird und später zum Preis Q wieder verkauft wird. Der Rate of Return ist dann $r = \frac{Q-P}{P}$. Hier ist P bekannt und Q zufällig. Dies in die CAPM-Formel ($R(r_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\mathbb{E}(Q) - P}{P} = r_f + \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

Aufgelöst nach P , erhalten wir

$$P = \frac{\mathbb{E}(Q)}{1 + r_f + \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f)}.$$

Das gibt uns den Preis des Assets laut CAPM.

\Rightarrow Pricing Form des CAPMs:

Der Preis P eines Assets mit Payoff Q ist:

$$P = \frac{\mathbb{E}(Q)}{1 + r_f + \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f)},$$

wobei β das Beta des Assets ist.

Diese Preisformel hat eine Form, welche die bekannte Diskontierungsformel für deterministische Situationen verallgemeinert.

Im deterministischen Fall muss die zukünftige Auszahlung bei einem Zinssatz r_f diskontiert werden (unter Verwendung des Faktors $\frac{1}{1+r_f}$).

Im zufälligen Fall ist der angemessene Zinssatz $r_f + \beta(E(r_M) - r_f)$, der als ein Risikoangepasster Zinssatz betrachtet werden kann.

4.9 Linearität von Pricing und die Certainty Equivalent Form

Certainty bedeutet Gewissheit bzw. Sicherheit.

Wir diskutieren nun ein sehr wichtiges Merkmal der Pricing Formel, nämlich, dass sie linear ist.

Das heißt, dass der Preis der Summe zweier Assets die Summe derer Preise ist und der Preis eines Vielfachen eines Assets ist dasselbe Vielfache des Preises.

Das ist wirklich sehr überraschend, da die Formel überhaupt nicht linear aussieht (zumindest für Summen).

Wenn z.B.

$$P_1 = \frac{\mathbb{E}(Q_1)}{1 + r_f + \beta_1(\mathbb{E}(r_M) - r_f)},$$

$$P_2 = \frac{\mathbb{E}(Q_2)}{1 + r_f + \beta_2(\mathbb{E}(r_M) - r_f)},$$

scheint es nicht offensichtlich zu sein, dass

$$P_1 + P_2 = \frac{\mathbb{E}(Q_1) + \mathbb{E}(Q_2)}{1 + r_f + \beta_{1+2}(\mathbb{E}(r_M) - r_f)}$$

ist, wobei β_{1+2} das Beta eines neuen Assets ist, welches die Summe der Assets 1 und 2 ist.

Darüber hinaus, bezogen auf die Erkenntnis, dass die Kovarianz zwischen Assets wichtig ist in der Beurteilung für die Verwendung dieser in einem Portfolio, scheint es nicht eindeutig ersichtlich zu sein, dass die Pricing Formel linear ist.

Wir können zunächst die Formel auf eine andere Gestalt umformen, die linear aussieht. Die Form der CAPM Pricing Formel, die deutlich Linearität zeigt, nennt man *certainty equivalent form*.

Nehmen wir an, dass wir ein Asset mit Preis P und Endwert Q haben (Hier ist P wieder bekannt und Q zufällig).

Wir wissen $r = \frac{Q}{P} - 1$.

Daraus folgt, dass der Wert von Beta

$$\beta = \frac{\text{cov}[(Q/P - 1), r_M]}{\sigma_M^2}$$

ist.

Wir erhalten

$$\beta = \frac{\text{cov}(Q, r_M)}{P\sigma_M^2}.$$

Dies in die Pricing Formel ($P = \frac{\mathbb{E}(Q)}{1+r_f+\beta(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}$) substituiert und Division durch P ergibt

$$1 = \frac{\mathbb{E}(Q)}{P(1+r_f) + \text{cov}(Q, r_M)(\mathbb{E}(r_M) - r_f)/\sigma_M^2}.$$

Auflösen nach P ergibt folgende Formel:

\Rightarrow *Certainty equivalent Pricing Formel*

Der Preis P eines Assets mit Payoff Q ist

$$P = \frac{1}{1+r_f} \left[\mathbb{E}(Q) - \frac{\text{cov}(Q, r_M)(\mathbb{E}(r_M) - r_f)}{\sigma_M^2} \right].$$

Der Term in den eckigen Klammern heißt *certainty equivalent* von Q . Die Bedeutung des certainty equivalent ist folgende:

Man stellt sich die Frage, welche deterministische Zahlung der risikobehafteten Zahlung Q entsprechen soll, bzw. welcher Abschlag aufgrund der Zufälligkeit von Q gegenüber dem $\mathbb{E}(Q)$ nötig ist.

Das certainty equivalent wird wie ein bestimmter bzw. gewisser Betrag behandelt und der normale Diskontierungsfaktor wird benötigt, um P zu erhalten.

Die Certainty Equivalent Form zeigt eindeutig, dass die Formel für die Preisfestsetzung linear ist, da beide Terme in den eckigen Klammern linear von Q abhängen.

Der Grund für die Linearität kann zurückverfolgt werden zu dem Prinzip von NO ARBITRAGE: Wenn der Preis von der Summe zweier Assets nicht gleich der Summe von den einzelnen Preisen wäre, wäre es möglich, Arbitrageprofit zu machen. Wenn zum Beispiel das Combination-Asset niedriger im Preis wäre, als die Summe von den einzelnen Preisen, könnten wir die Kombination (zu einem niedrigeren Preis) kaufen und die individuellen Stücke (zum höheren Preis) verkaufen und dabei Profit machen.

Würden wir dies in großen Mengen machen, könnten wir beliebig großen Profit machen. Wenn umgekehrt das Combination-Asset höher im Preis wäre, als die Summe der beiden Assets, würden wir die Assets einzeln kaufen und die Kombination verkaufen und dabei wieder Arbitrageprofit machen.

Solche Arbitragegelegenheiten sind ausgeschlossen, dann und nur dann, wenn das Pricing von Assets linear ist.

Diese Linearität von Pricing ist daher ein fundamentaler Grundsatz der Finanztheorie (im Rahmen von Perfect Markets).

Literatur

- [EG] ELTON / GRUBER: **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**, 1995, New York
- [K] ROBERT A KORAJCZYK: **Asset Pricing and Portfolio Performance**, 1999, London
- [L] DAVID G. LUENBERGER: **Investment Science**, Oxford University Press 1998, Oxford
- [W] WIKIPEDIA: http://de.wikipedia.org/wiki/Capital_Asset_Pricing_Model, 16.Dezember 2008
- [M] HARRY M. MARKOWITZ: **Portfolio Selection**, 1959