Seminar aus Finanz-und Versicherungsmathematik

Martingaltheorie

Ismail Cetin GÜLÜM

TU-Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Wiederholung von Martingalen in diskreter Zeit **3**
2.1 Der bedingte Erwartungswert 3
2.2 Martingale in diskreter Zeit 4
2.3 Stoppzeiten und gestoppte Martingale in diskreter Zeit 6
2.4 Sub- und Supermartingale in diskreter Zeit 7
2.5 Martingalkonvergenz 8

3 Martingale in stetiger Zeit **10**
3.1 Definition von Martingalen und Stoppzeiten in stetiger Zeit 10
3.2 Martingalsätze in stetiger Zeit 11

4 Brownsche Bewegung **12**
4.1 Brownsche Bewegung 12
4.2 Die standard Brownsche Filtrierung 13
4.3 Brownsche Bewegung als Martingal 13

5 Einführung in das Itô-Integral **14**
5.1 Motivation 14
5.2 Definition des Itô-Integrals 15

6 Das Girsanov-Theorem **17**
6.1 Motivation 17
6.2 Die „Tilting-Formel“ 17
6.3 Einige Hilfsmittel 18
6.4 Einfaches Girsanov- Theorem 19
6.5 Konstruktion von Martingalen 20
6.6 Verallgemeinertes Girsanov-Theorem 20

1 Einführung

Das Wort Martingal hat mehrere Bedeutungen. Es steht für Hilfszügel beim Zaumzeug eines Reitpferdes, welches zu starke Kopfbewegungen des Pferdes verhindert, aber auch für ein die Takelage bei Segelschiffen absicherndes Seil.
Vor allem bedeutet es aber wohl eine Spielstrategie beim Roulettespiel, im Provenzalischen genannt „jouga a la martegalo“. Diese Strategie besteht in der jeweiligen Verdoppelung des beim vorausgegangenen Spiel verlorenen Einsatzes, um somit zu einem unbestimmten Zeitpunkt alle Verluste zu egalisieren und einen sicheren Gewinn zu machen, unerschöpfliches Vermögen, unerschöpfliche Zeit, und Nichtexistenz eines Höchsteinsatzes vorausgesetzt.
In der Mathematik beschreiben Martingale „faire Spiele“. Weiters spielen sie eine zentrale Rolle in der Untersuchung von Konvergenz von Zufallsvariablen.
Ziel dieser Arbeit ist es zunächst Martingale in diskreter Zeit zu definieren. Dazu wird die Theorie zu bedingten Erwartungswerten in aller Kürze wiederholt. Danach folgen einige Konvergenzaussagen über Martingale, sowie Martingale in stetiger Zeit. Am Ende soll das Girsanov-Theorem formuliert werden. Dazu werden kurz Brownsche Bewegungen besprochen und in Kapitel 5 folgt dann eine Einführung in das Itô-Integral.

2 Wiederholung von Martingalen in diskreter Zeit

In diesem Kapitel soll kurz die Theorie zu bedingten Erwartungswerten , zu Martingalen in diskreter Zeit und zu Stoppzeiten in diskreter Zeit, sowie deren wichtigsten Eigenschaften wiederholt werden ([STEEL], Kapitel 2,4 und [WILL], Kapitel 9,10).

2.1 Der bedingte Erwartungswert

Sei X eine integrierbare Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Aus der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bekannt, dass für jedes $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbf{P}(A) \neq 0$ gilt $\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]}{\mathbf{P}(A)}$, wobei $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion bezeichnet. Ist $\mathcal{G}$ nun eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$, so stellt sich die Frage was unter dem Ausdruck $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ zu verstehen ist.

Definition 2.1. (***bedingter Erwartungswert***)**:** Ist X eine Zufallsvariable und $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$, so heißt eine Zufallsvariable Y der bedingte Erwartungswert von X gegeben $\mathcal{G}$, wenn:

1. Y $\mathcal{G}$- messbar ist,
2. Y integrierbar ist, und
3. $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{G}$.

Man schreibt dann $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Für eine messbare Zufallsvariable Z definieren wir $\mathbb{E}[X|Z] := \mathbb{E}[X|\sigma(Z)]$.

Es gilt, dass der bedingte Erwartungswert $\mathbf{P}$-fast sicher eindeutig ist (vergleiche Williams Kapitel 9), man spricht daher auch oft von einer Version des bedingten Erwartungswertes. Es stellt sich jedoch die Frage nach der Existenz des bedingten Erwartungswertes.
Ist $\mathcal{G}$ endlich, das heißt wird $\mathcal{G}$ von endlich vielen Atomen $A_1, A_2, \dots, A_n$ erzeugt, dann kann man den bedingten Erwartungswert von X gegeben $\mathcal{G}$ anschreiben als:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}, \tag{2.1}$$

wobei gilt, dass

$$a_k = \begin{cases} \mathbb{E}[X|A_k] & \text{falls } \mathbf{P}(A_k) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man überprüft leicht, dass (2.1) die Bedingungen des bedingten Erwartungswertes erfüllt.
Eine weitere Möglichkeit den bedingten Erwartungswert zu konstruieren, beginnt mit der Annahme, dass eine Folge von endlichen Partitionen $\{G_n|n \in \mathbb{N}\}$ von Ω existiert, sodass $\{G_{n+1}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Verfeinerung von $\{G_n\}$ ist, und sodass $\mathcal{G}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle G_n enthält. Diese Annahme ist sehr mild und lässt sich in vielen häufig verwendeten Wahrscheinlichkeitsräumen leicht überprüfen. Sei nun $\mathcal{G}_n$ die kleinste σ-Algebra, die $G_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_{m_n}\}$ enthält. Definiert man nun den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$ genau wie in (2.1) für jedes $n \in \mathbb{N}$, so bekommt man eine Folge von Zufallsvariablen Y_n, welche gegen eine integrierbare Zufallsvariable Y konvergiert (siehe Steele Kapitel 4). Diese Zufallsvariable ist ein Kandidat für $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
Eine dritte Möglichkeit den bedingten Erwartungswert zu konstruieren, wären orthogonal Projektionen im L^2. Ist $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so existiert eine fast sicher eindeutige Zufallsvariable $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, für die

$$||X - Y||_2 = \min_{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})} ||X - Z||_2$$

gilt, wobei $||.||_2$ die Norm ist, die vom inneren Produkt $< X, Y >:= \mathbb{E}[X \cdot Y]$ induziert wird. Man nennt so ein Y beste Approximation von X in $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ und tatsächlich erfüllt Y auch die Bedingungen des bedingten Erwartungswertes.
Das nächste Lemma beinhaltet die wichtigsten Rechenregeln mit bedingten Erwartungswerten.

Lemma 2.2. (***Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes***)**:** Seien X und Y integrierbare Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, a und b zwei reelle Zahlen und $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ zwei Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Dann gilt:

1. **Linearität**: $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y|\mathcal{G}] = a \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
2. Ist X $\mathcal{G}$-messbar so gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ fast sicher.
3. $\mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\ ] = \mathbb{E}[X]$ fast sicher.
4. Ist Y $\mathcal{G}$-messbar und $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ so gilt $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ fast sicher.
5. **Turmeigenschaft**: Ist $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ so gilt $\mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\ |\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ fast sicher.
6. **bedingte Jensen'sche Ungleichung**: Ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion so dass $\mathbb{E}[\phi(X)] < \infty$ gilt, dann ist

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \quad \text{fast sicher.}$$

2.2 Martingale in diskreter Zeit

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sei $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein stochastischer Prozess in diskreter Zeit, also eine Folge von Zufallsvariablen.

Definition 2.3. (***Martingale in diskreter Zeit***)**:** Der Prozess $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ heißt Martingal bezüglich einer Folge von Zufallsvariablen $\{Y_n|n \in \mathbb{N}\}$ wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $n \geq 1$ existiert eine Funktion $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sodass $f_n(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = X_n$,
2. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \quad \forall\, n \geq 1$ und
3. $\mathbb{E}[X_{n+1}|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = X_n$ für alle $n \geq 1$.

Die erste Bedingung bedeutet nichts anderes, als das X_n messbar ist bezüglich der von $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ aufgespannten σ-Algebra $\sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Definiert man $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, so bildet die Folge $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$ eine Filtrierung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und Bedingung 1 heißt dann, dass die Folge $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ adaptiert ist an $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$. Man sagt auch $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$.
Bedingung 3 aus der obigen Definition kann also geschrieben werden als $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ für alle $n \geq 1$. Setzt man $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$, so kann diese Gleichheit nun so interpretiert werden, dass ein Martingal ein faires Spiel ist. Der Erwartungswert einer zukünftigen Beobachtung zum Zeitpunkt $n+1$, gegeben, dass alle Beobachtungen bis zum Zeitpunkt n bekannt sind, ist gleich der Beobachtung zur Zeit n.
Das nächste Lemma beinhaltet die fundamentalsten Eigenschaften von Martingalen.

Lemma 2.4. Ist $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$ so gilt:

1. $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_k] = X_k$, wenn $k < n$.
2. $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_1]$, für alle $n \geq 1$.

Beweis

1. Aus der Turmeigenschaft folgt unmittelbar
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\ |\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1},$$
woraus Behauptung 1 durch Induktion folgt.
2. Aus Lemma 2.2 Punkt 3 folgt
$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\ ] = \mathbb{E}[X_{n+1}],$$
was zu zeigen war.

■

Intuitiv ist klar, dass ein faires Spiel nicht unfair werden kann, in dem man sich vorher überlegt wie hoch man die Einsätze in einem späteren Zeitpunkt wählt. Diese Intuition führt uns zu einem wichtigen Satz, der zeigt, wie man aus alten Martingalen neue gewinnen kann. Davor sei noch an die Definition eines vorhersehbaren Prozesses erinnert: Man nennt eine Folge von Zufallsvariablen $\{A_n|n \in \mathbb{N}\}$ vorhersehbar bezüglich der Filtrierung $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$, wenn A_0 konstant ist und A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist für alle $n \geq 1$.

Satz 2.5. (*Martingaltransformation*): Ist $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$ und $\{A_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein beschränkter, vorhersehbarer Prozess bezüglich $\{\mathcal{F}_n|n \in \mathbb{N}\}$, so ist der Prozess $\{\widetilde{X_n}|n \in \mathbb{N}\}$, definiert durch

$$\widetilde{X_0} = 0 \quad \text{und} \quad \widetilde{X_n} = A_1(X_1 - X_0) + A_2(X_2 - X_1) + \cdots + A_n(X_n - X_{n-1})$$

auch ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$. Dieser neue Prozess $\{\widetilde{X_n} | n \in \mathbb{N}\}$ wird Martingaltransformation von $\{X_n\}$ bezüglich $\{A_n\}$ genannt.

Beweis Offensichtlich ist $\{\widetilde{X_n} | n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{F}_n$-messbar, und die Tatsache, dass die A_n beschränkt sind, garantiert, dass $\widetilde{X_n}$ endlichen Erwartungswert hat. Außerdem gilt

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{X_n} - \widetilde{X_{n-1}} | \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}[A_n \cdot (X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] = A_n \cdot \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

was aus den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte und aus der Martingaleigenschaft folgt. Die letze Gleichung impliziert auch $\mathbb{E}\left[\widetilde{X_n} | \mathcal{F}_{n-1}\right]$, was den Beweis abschließt. ■

Bemerkung 2.6. Statt $\widetilde{X_n} = A_1(X_1 - X_0) + A_2(X_2 - X_0) + \cdots + A_n(X_n - X_{n-1})$, wird auch oft $(A \cdot X)_n$ geschrieben und als diskretes stochastisches Integral bezeichnet.

2.3 Stoppzeiten und gestoppte Martingale in diskreter Zeit

Ein sehr wichtiger Begriff in der Wahrscheinlichkeitstheorie und auch in der Martingaltheorie ist der einer Stoppzeit.

Definition 2.7. (*Stoppzeiten in diskreter Zeit*): Eine Zufallsvariable τ, die Werte in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ annimmt, heißt Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$, wenn

$$\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{gilt.}$$

Im folgenden wird statt $\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq n\}$ einfach nur $\{\tau \leq n\}$ geschrieben.

In Glücksspielen kann eine Stoppzeit so interpretiert werden, dass sie eine Regel beschreibt, an die man sich halten kann, um mit dem Spielen aufzuhören. Offensichtlich kann so eine Regel nicht von dem Ausgang eines zukünftigen Spieles abhängen. Das folgende Beispiel soll diese Interpretation näher bringen.

Beispiel 2.8.
Ein Glücksspieler startet mit einem Anfangskapital von 10 Euro und absolviert Spiele, bei denen er mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit einen Euro gewinnt und ansonsten einen Euro verliert. Die Wartezeit, bis der Spieler sein gesamtes Geld verspielt hat, und somit gezwungen ist aufzuhören, ist dann zum Beispiel eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtrierung des Experiments: zu jedem Zeitpunkt weiß der Spieler, ob er bereits Pleite ist oder nicht. Dagegen wäre die Wartezeit bis zum Augenblick seines vorletzten Spiels keine Stoppzeit: in dem Moment, wo man sein vorletztes Spiel absolviert, weiß man noch nicht, dass das nächste Spiel das letzte sein wird.

Jetzt wo wir Stoppzeiten und Martingale definiert haben, ist es an der Zeit beide zu kombinieren.

Definition 2.9. (*gestoppte Zufallsvariable*): Ist $\{Y_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Zufallsvariablen und τ eine beschränkte Stoppzeit bezüglich einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$, so nennt man

$$Y_\tau := \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \mathbb{1}_{\{\tau = k\}}$$

die mit τ gestoppte Zufallsvariable.

Definiert man sich nun zu einer beliebigen Stoppzeit τ eine neue Stoppzeit durch $n \wedge \tau := \min\{n, \tau\}$, so ist diese beschränkt und für jeden Prozess $\{Y_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist dann die Folge von gestoppten Zufallsvariablen $\{Y_{n\wedge\tau} | n \in \mathbb{N}\}$ wohldefiniert und wird der mit τ gestoppter Prozess genannt. Der nächste Satz zeigt, was passiert, wenn ein Martingal auf solche Art gestoppt wird.

Satz 2.10. (*Optional Stopping Theorem*): Ist $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ und τ eine Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$, dann ist der gestoppte Prozess $\{X_{n\wedge\tau} | n \in \mathbb{N}\}$ auch ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis Zunächst sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X_0 = 0$ (ansonsten betrachte $X_n^{'} = X_n - X_0$). Als nächstes definieren wir $A_k := \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{\tau \leq k-1\}}$ und sehen, dass der Prozess $\{A_k | k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und vorhersehbar bezüglich der Filtrierung $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist, weil τ eine Stoppzeit ist. Jetzt gilt

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \cdot (X_k - X_{k-1}) = X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq n-1\}} + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} = X_{n\wedge\tau},$$

was leicht einzusehen ist. Man sieht, dass $\{X_{n\wedge\tau} | n \in \mathbb{N}\}$ eine Martingaltransformation von $\{X_n\}$ bezüglich $\{A_n\}$ ist und somit ein Martingal ist. $\blacksquare$

Aus dem Optional Stopping Theorem folgt insbesondere $\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0]$, was so interpretiert werden kann, dass man in einem fairen Spiel keinen Gewinn machen kann. Diese Gleichheit gilt allgemeiner für Stoppzeiten τ, die nur endlich viele Werte annehmen.

2.4 Sub- und Supermartingale in diskreter Zeit

Wir erweitern die bisherigen Ergebnisse, um auch Aussagen über Spiele treffen zu können, die günstig beziehungsweise ungünstig für eine Partei sind.

Definition 2.11. (*Sub- und Supermartingale in diskreter Zeit*): Ist $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine Filtrierung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ so heißt eine integrierbare und an $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ adaptierte Folge von Zufallsvariablen $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$

- Submartingal bezüglich$\{\mathcal{F}_n\}$, wenn $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, beziehungsweise
- Supermartingal bezüglich$\{\mathcal{F}_n\}$, wenn $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Man überzeugt sich leicht davon, dass Submartingale günstige Spiele beschreiben und Supermartingale ungünstige Spiele.
Offensichtlich ist $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Submartingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}$, genau dann wenn $\{-X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Supermartingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}$ ist. Deswegen werden im Folgenden nur Submartingale besprochen. Alle diese Aussagen lassen sich dann sinngemäß auf Supermartingale übertragen.
Man erhält folgendes Lemma für Submartingale.

Lemma 2.12. Ist $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Submartingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ so gilt:

1. $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_k] \geq X_k$, wenn $k < n$.
2. $\mathbb{E}[X_1] \leq \mathbb{E}[X_2] \leq \dots$

Weiters gilt, dass wenn $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ und ϕ eine konvexe Funktion ist, dass dann $\{\phi(X_n) | n \in \mathbb{N}\}$ ein Submartingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Beweis Punkt 1. und 2. beweist man analog zu Punkt 1. und 2. aus Lemma 2.4. Die dritte Aussage folgt aus den bedingten Jensen'schen Ungleichung:

$$E[\phi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \geq \phi(\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]) = \phi(X_n),$$

was den Beweis abschließt. ■

Ein Analogon zu Lemma 2.5 ist gegeben durch das folgende Lemma.

Lemma 2.13. Ist $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein nichtnegatives Submartingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}$ und $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein beschränkter, vorhersehbarer Prozess bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}$, der nur die Werte 0 und 1 annimmt, so gilt für den Prozess $\{\widetilde{X_n} | n \in \mathbb{N}\}$, definiert durch $\widetilde{X_0} = 0$ und $\widetilde{X_n} = A_1(X_1 - X_0) + A_2(X_2 - X_0) + \cdots + A_n(X_n - X_{n-1})$:

$$\mathbb{E}[\widetilde{X_n}] \leq \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis Da A_k $\mathcal{F}_{k-1}$-messbar ist, und nur die Werte 0 und 1 annimmt, folgt aus der Submartingaleigenschaft von $\{X_n\}$

$$\mathbb{E}[A_k \cdot (X_k - X_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}] = A_k \cdot \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}] \leq \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Bildet man über diese Ungleichung den Erwartungswert, so erhält man aus Lemma 2.2 Punkt 3 :

$$\mathbb{E}[A_k \cdot (X_k - X_{k-1})] \leq \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})]$$

Summiert man über alle $1 \leq k \leq n$ auf, so erhält man letztendlich:

$$\mathbb{E}[\widetilde{X_n}] \leq \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_0] \leq \mathbb{E}[X_n],$$

was den Beweis abschließt. ■

Die Interpretation von Lemma 2.13 ist folgende: Spielt man ein „günstiges“ Spiel $\{X_n\}$, so sollte man auf keinen Fall eine Runde aussetzten ($A_k = 0$), da sonst die Erwartung eventuell sinkt.

2.5 Martingalkonvergenz

In diesem Kapitel wird untersucht unter welchen Bedingungen ein Martingal $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ für $n \to \infty$, in welchem Sinne auch immer, konvergiert. Eine wichtiges Hilfsmittel wir dabei die sogenannte Up-crossing Ungleichung sein. Zunächst folgt eine Definition.

Definition 2.14. (*Up-Crossings*): Ist $S = \{c_i | 0 \leq i \leq n\}$ eine Folge reeller Zahlen, so definieren wir die Anzahl der Up-Crossings auf dem Intervall $[a, b]$ von S als die größte natürliche Zahl k, sodass $2k$ natürliche Zahlen $0 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \cdots < i_k < j_k \leq n$ existieren, für die die Elemente der Menge $\{c_{i_s} | 1 \leq s \leq k\}$ kleiner oder gleich a ist und für die die Elemente der Menge $\{c_{j_s} | 1 \leq s \leq k\}$ größer oder gleich b ist.

Jetzt definieren wir für ein Submartingal $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ eine Zufallsvariable $N_n(a,b)$ als die Anzahl der Up-Crossings von $\{X_k(\omega)|1 \leq k \leq n\}$ auf dem Intervall $[a,b]$.

Satz 2.15. (***Up-Crossing Ungleichung***)**:** Ist $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein Submartingal, so gilt für alle alle $a < b$

$$\mathbb{E}[N_n(a,b)] \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - a)_+]}{b-a}.$$

Beweis Der Beweis ergibt sich durch Anwendung von Lemma 2.13 und kann in Steele Kapitel 2 nachgelesen werden. ■

Mit der Up-crossing Ungleichung ist es nun nicht mehr schwer unsere erste Konvergenzaussage zu beweisen.

Satz 2.16. (***Martingalkonvergenz für L^1-beschränkte Martingale***)**:** Sei $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}$ und es existiere eine Konstante $B < \infty$, sodass $\mathbb{E}[|X_n|] \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert eine Zufallsvariable X_∞ mit $\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq B$ und

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty\right) = 1.$$

Beweis Für $a < b$ sei $N_n(a,b)$ wie oben definiert. Dann gilt klarerweise, dass $N_n(a,b)$ monoton wachsend ist, und somit existiert $N(a,b) := \lim_{n\to\infty} N_n(a,b)$. Aus der Up-Crossing Ungleichung und dem Satz von monotoner Konvergenz folgt:

$$\mathbb{E}[N(a,b)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[N_n(a,b)] \leq \frac{1}{b-a} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[(X_n - a)_+] \leq \frac{B + |a|}{b-a} < \infty \tag{2.2}$$

Das wiederum impliziert $\mathbf{P}(N(a,b) < \infty) = 1$.
Definieren wir nun für $a < b$ Λ_{ab} durch

$$\Lambda_{ab} := \{\omega \in \Omega | \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\},$$

so folgt aus Ungleichung (2.2) $\mathbf{P}(\Lambda_{ab}) = 0$. Die Tatsache, dass die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, liefert nun

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\ a<b} \Lambda_{ab}\right) = 0,$$

woraus folgt, dass X_n für $n \to \infty$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable X_∞ konvergiert, das heißt $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty) = 1$. $\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq B$ folgt unmittelbar aus $\mathbb{E}[|X_n|] \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dem Lemma von Fatou. ■

Satz 2.14 kann noch etwas verallgemeinert werden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.17. (***Martingalkonvergenz für L^p-beschränkte Martingale***)**:** Sei $\{X_n|n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal und es existiere eine Konstante $B < \infty$, sodass $\mathbb{E}[|X_n^p|] \leq B$, $p > 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert eine Zufallsvariable X_∞ mit $\mathbb{E}[|X_\infty^p|] \leq B$ und

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty\right) = 1, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} ||X_n - X_\infty||_p = 0.$$

Beweis Für den Beweis wird auf Steele Kapitel 6 verwiesen. ■

Man beachte, dass im Fall von $p = 1$ im Allgemeinen keine L^1-Konvergenz vorliegt.
Ein wichtiges und effektives Hilfsmittel in der Martingaltheorie, ist der Begriff der gleichmäßigen Integrierbarkeit.

Definition 2.18. (***Gleichmäßig integrierbar***)**:** Eine Menge $\mathcal{H}$ von integrierbaren Zufallsgrößen heißt gleichmäßig integrierbar (oder auch gleichgradig integrierbar), dann und nur dann wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|X|\geq c\}}\right] = 0$$

Ein Grund, warum die obige Definition so hilfreich ist, zeigt das nächste Lemma.

Lemma 2.19. Ist $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{N}\}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmäßig integrierbar.
2. Es existiert ein integrierbares X_∞, für das gilt
$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty\right) = 1, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$
3. Es existiert ein integrierbares Y für das gilt: $X_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ fast sicher und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist einer dieser Bedingungen erfüllt, so kann die Zufallsvariable Y aus Punkt 3 als fast sicher Limes des Martingals $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ gewählt werden.

Beweis Der Beweis kann in Eichelsbacher auf Seite 35 nachgelesen werden. ■

Bemerkung 2.20. Martingale, für die Punkt 3 aus Lemma 2.19 erfüllt ist, nennt man abgeschlossene Martingale.

3 Martingale in stetiger Zeit

Ziel dieses Kapitels ist es, die Definition und Sätze aus Kapitel 2 sinngemäß in stetiger Zeit zu formulieren. Für die Beweise, wird ein „Standard Trick“ benützt, der eine Art diskrete Approximation darstellt.

3.1 Definition von Martingalen und Stoppzeiten in stetiger Zeit

Die Definition von Martingalen (und auch von Sub- und Supermartingalen) in stetiger ist sehr ähnlich zu der in diskreter Zeit.

Definition 3.1. (***Martingale in stetiger Zeit***)**:** Sei $\{X_t | 0 \leq t < \infty\}$ ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit und
$\{\mathcal{F}_t | 0 \leq t < \infty\}$ eine wachsende Folge von σ-Algebren, also eine Filtrierung in stetiger Zeit. Dann heißt der Prozess $\{X_t\}$ Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}$, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. X_t ist $\mathcal{F}_t$- messbar für alle $0 \leq t < \infty$, das heißt $\{X_t\}$ ist adaptiert an $\{\mathcal{F}_t\}$.
2. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $0 \leq t < \infty$.
3. $\mathbb{E}[X_t|F_s] = X_s$ fast sicher, für alle $0 \leq s \leq t < \infty$.

Submartingale und Supermartingale werden analog definiert.

In stetiger Zeit sind besonders die Martingale $\{X_t|0 \leq t < \infty\}$ interessant, für die ein $N \subseteq \Omega$ existiert, mit $\mathbf{P}(N) = 0$, sodass die Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \backslash N$ stetig ist. Solche Martingale nennt man auch stetige Martingale. Stetige Sub- und Supermartingale werden analog definiert.
Stoppzeiten in stetiger Zeit werden wie folgt definiert.

Definition 3.2. (***Stoppzeiten in stetiger Zeit***)**:** Man nennt eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Stoppzeit bezüglich einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_t|0 \leq t < \infty\}$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

3.2 Martingalsätze in stetiger Zeit

Jetzt da Martingale und Stoppzeiten in stetigier Zeit definiert sind, ist es an der Zeit, das Optional Stopping Theorem in stetiger Zeit zu formulieren. Dazu definieren wir wieder für einen stochastischen Prozess $\{X_t|0 \leq t < \infty\}$ und eine Stoppzeit τ die gestoppte Zufallsvariable X_τ auf der Menge $\{\omega \in \Omega|\tau(\omega) < \infty\}$ durch $X_\tau(\omega) = X_t(\omega)$, wenn $\tau(\omega) = t$.

Satz 3.3. (***Optional Stopping Theorem in stetiger Zeit***)**:** Ist $\{X_t|0 \leq t < \infty\}$ ein stetiges Martingal bezüglich einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_t|0 \leq t < \infty\}$, welche die usual conditions erfüllt (siehe Kapitel 4), und τ eine Stoppzeit bezüglich dieser Filtrierung, so ist der Prozess $M_t := X_{t\wedge\tau}$ auch ein stetiges Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_t|0 \leq t < \infty\}$.

Beweis Wir beginnen den Beweis, indem wir eine Approximation an τ in diskreter Zeit konstruieren, was ein standard Trick ist. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s \leq t < \infty$ definieren wir die Menge $S(n)$ durch

$$S(n) := \{s + \frac{(t-s) \cdot k}{s^n} \mid 0 \leq k \leq 2^n\}.$$

$\tau_n(\omega)$ sei nun definiert als das kleinste Element in $S(n)$ das größer oder gleich $\tau(\omega)$ ist. Man überprüft leicht, dass $\{\tau_n|n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Stoppzeiten ist, und dass $\tau_n(\omega) \searrow \tau(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.
Bezeichnet man nun mit $\{X_u, \mathcal{F}_u\}_{(n)}$ das Martingal $\{X_u\}$ eingschränkt auf $S(n)$, so ist $\{X_u, \mathcal{F}_u\}_{(n)}$ ein Martingal in diskreter Zeit und daraus folgt, dass $\{|X_u|, \mathcal{F}_u\}_{(n)}$ ein Submartingal in diskreter Zeit ist. Aus Lemma 2.11 Punkt 2 folgt nun

$$\mathbb{E}[|X_{t\wedge\tau_n}|] \leq \mathbb{E}[|X_t|]. \tag{3.1}$$

Lässt man jetzt $n \to \infty$ laufen, so folgt aus Ungleichung (3.1) und dem Lemma von Fatou, dass $\mathbb{E}[|X_{t\wedge\tau}|] < \infty$ für alle $t \geq 0$.
Die Tatsache, dass $\{M_t\}$ adaptiert an $\{\mathcal{F}_t\}$ ist, folgt daraus, dass $\{X_t\}$ ein Martingal und τ eine Stoppzeit ist und $\{\mathcal{F}_t|0 \leq t < \infty\}$ die usual conditions erfüllt. Bleibt also nur noch Punkt 3.

aus Definition 3.1 zu zeigen.
Da s, t und τ_n Elemente der Menge $S(n)$ sind, gilt auf Grund des Optional Stopping Theorems in diskreter Zeit (Satz 2.9), dass

$$\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s] = X_{s\wedge\tau_n}.$$

Um den Beweis abzuschließen muss nur überlegt werden, was für $n \to \infty$ passiert. Da die Martingale stetig sind, gilt auf jeden Fall, dass $X_{s\wedge\tau_n}$ für alle $\omega \in \Omega$ gegen M_s konvergiert. Dass die Konvergenz auch in L^1 stattfindet, ist etwas schwieriger zu zeigen und kann in Steele Kapitel 4 nachgelesen werden. ■

Der nächste Satz ist das zeitstetige Analogon zu den Sätzen 2.16 und 2.17.

Satz 3.4. (***Martingalkonvergenz in stetiger Zeit***)**:** Sei $\{X_t|0 \leq t < \infty\}$ ein stetiges Martingal und es existiere eine Konstante $B < \infty$, sodass $\mathbb{E}[|X_t^p|] \leq B$, $p > 1$, für alle $t \geq 0$ gilt. Dann existiert eine Zufallsvariable X_∞ mit $\mathbb{E}[|X_\infty^p|] \leq B$ und

$$\mathbf{P}\left(\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty\right) = 1, \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} ||X_t - X_\infty||_p = 0.$$

Ist $\{X_t|0 \leq t < \infty\}$ jedoch ein stetiges Martingal, für das eine Konstante $B < \infty$ existiert, sodass $\mathbb{E}[|X_t|] \leq B$ für alle $t \geq 0$ gilt, so existiert eine Zufallsvariable X_∞ mit $\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq B$ und

$$\mathbf{P}\left(\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty\right) = 1.$$

Beweis Für den Beweis wird auf Steele Kapitel 4 verwiesen. ■

4 Brownsche Bewegung

In diesem Kapitel sollen kurz die Definition und die Eigenschaften von Brownschen Bewegungen besprochen werden.

4.1 Brownsche Bewegung

Einer der wichtigsten stochastischen Prozesse ist die Brownsche Bewegung, die erstmals von Louis Bachelier und Albert Einstein verwendet worden ist. In der Literatur wird sie auch oft als Wiener Prozess bezeichnet, benannt nach nach dem amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener.

Definition 4.1. (***Brownsche Bewegung***)**:** Ein zeitstetiger stochastischer Prozess $\{B_t|0 \leq t < T\}$ heißt Brownsche Bewegung auf $[0, T]$, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

1. $B_0 = 0$ fast sicher.
2. Die Inkremente von $\{B_t\}$ sind unabhängig.
3. Die Inkremente von $\{B_t\}$ sind normalverteilt: $B_t - B_s \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2(t-s))$, für $t > s$.

4. $B_t(\omega)$ ist stetig in t für alle $\omega \in \Omega \backslash N$, wobei N eine beliebige **P**-Nullmenge ist.

Bei σ=1 spricht man von einer standard Brwonschen Bewegung.

Die Trajektorien von Brownschen Bewegungen haben folgende zwei interessante Eigenschaften. Zunächst sind sie nirgends differenzierbar, obwohl sie überall stetig sind. Außerdem haben sie unbeschränkte Variation mit Wahrscheinlichkeit 1.
Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch eine Klasse von stochastischen Prozessen definieren, mit der wir uns dann in Kapitel 6 befassen.

Definition 4.2. **(*Brownsche Bewegung mit Drift*):** Sei $\{B_t|0 \leq t < T\}$ eine standard Brownsche Bewegung und $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann nennt man den Prozess $\{X_t|0 \leq t < T\}$, definiert durch $X_t = B_t + \mu t$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ. Für $\mu = 0$ spricht man klarerweise von einer Brownschen Bewegung ohne Drift.

4.2 Die standard Brownsche Filtrierung

Als nächstes soll eine Filtrierung $\{F_t\}$ konstruiert werden, die den Namen standard Brownsche Filtrierung verdient. Ein erster möglicher Kanditat wäre natürlich $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s|s \leq t)$, wobei $\{B_s\}$ eine standard Brownsche Bewegung bezeichnet, doch es hat sich herausgestellt, das es besser ist mit einer etwas anderen Filtration zu arbeiten.
Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller **P**-Nullmengen in $\sigma(B_s|s \leq t)$ und $\mathcal{N} := \{A \subseteq \Omega \mid \exists\, C \in \mathcal{C} \text{ mit } A \subseteq C\}$. Um den Elementen in $\mathcal{N}$, also allen Teilmengen von **P**-Nullmengen, eine Wahrscheinlichkeit zuordnen zu können, definiert man $\mathbf{P}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{N}$.

Definition 4.3. **(*standard Brownsche Filtrierung*):** Eine Filtrierung $\{\mathcal{F}_t|t \in [0, T]\}$ heißt standard Brownsche Filtrierung, wenn $\mathcal{F}_t$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\sigma(B_s|s \leq t)$ und $\mathcal{N}$ enthält.

Die standard Brownsche Filtrierung hat nun zwei wichtige Eigenschaften, die in der Literatur auch mit „usual conditions“ bezeichnet werden. Die erste Eigenschaft ist, dass $\mathcal{F}_0$ nicht die triviale σ-Algebra ist, sondern alle Teilmengen von Nullmengen enthält. Diese Eigenschaft erlaubt es, für den Fall zweier stochastischer Prozesse $\{X_t\}$ und $\{Y_t\}$, die **P** -fast sicher identisch sind, aus $\{X_t\}$ adaptiert an $\{\mathcal{F}_t\}$ zu folgern, dass $\{Y_t\}$ ebenso adaptiert an $\{\mathcal{F}_t\}$ ist. Die zweite Eigenschaft ist, dass für alle $t \geq 0$ gilt, dass $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s:s>t} \mathcal{F}_s$. Das heißt, dass die standard Brownsche Filtrierung in gewissem Sinne rechtsstetig ist.

4.3 Brownsche Bewegung als Martingal

Brownsche Bewegungen sind nicht nur wichtige stochastische Prozesse sondern auch wichtige Martingale, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 4.4. Sei $\{B_t|0 \leq t < T\}$ eine standard Brownsche Bewegung. Dann ist jeder der folgenden Prozesse ein Martingal bezüglich der standard Brownschen Filtrierung:

1. B_t,
2. $B_t^2 - t$,
3. $\exp\left(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis Im Folgenden sei stets $t > s$.

1. Aus den elementaren Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte und der Definition der Brownschen Bewegung folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s, \end{aligned}$$

   weil $B_t - B_s$ einerseits unabhängig ist von B_s und andereseits normalverteilt ist mit Erwartungswert 0.

2. Hier geht man ähnlich vor wie im 1. Teil:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 - t|\mathcal{F}_s] = \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[2B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2|\mathcal{F}_s] - t = \\ &= t - s + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

3. Um die dritte Aussage zu zeigen, brauchen wir folgendes Resultat aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}[\exp(\alpha \cdot X)] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \mu t\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

   Daraus folgt nun mit $X_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[X_s \cdot \exp\left(\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)\right)|\mathcal{F}_s\right] = \\ &= X_s \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)\right)\right] = X_s, \end{aligned}$$

   was den Beweis abschließt.

■

5 Einführung in das Itô-Integral

5.1 Motivation

Das Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion eines sinnvollen Itô-Integrals

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t)\, dB_t. \tag{5.1}$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass eine Definition im Sinne des Riemann-Stieltjes-Integrals nicht möglich ist, da die Pfade der Brownschen Bewegung von unbeschränkter Variation sind. Das Itô-Integral gibt uns eine weitere Möglichkeit Martingale zu erzeugen, und ist auch deswegen ein sehr wichtiges und häufig verwendetes Hilfsmittel in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

5.2 Definition des Itô-Integrals

In diesem Kapitel werden wir uns ausschließlich auf Integranden aus $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0,T]$ konzentrieren, das heißt messbare, adaptierte Prozesse $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, für die

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right] < \infty$$

gilt. Der erste Schritt zur Konstruktion des Itô-Integrals wird sein sich zu überlegen, was wir uns von (5.1) erwarten, wenn $f(\omega,t)$ der Indikator eines Intervalls $(a,b] \subseteq [0,T]$ ist. Um dem Namen Integral gerecht zu werden, muss gelten

$$I(\mathbb{1}_{(a,b]})(\omega) = \int_a^b dB_t = B_b(\omega) - B_a(\omega).$$

Außerdem erwarten wir uns, dass das Itô-Integral linear ist. Wir definieren mit $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2$ die Menge aller Funktionen der Gestalt

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \cdot \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

wobei a_i $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar ist , $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty$, und $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_n = T$. Aus der gewünschten Linearität folgt nun, dass das Itô-Integral für Funktionen $f \in \mathcal{H}_0^2$ wie folgt ausschaut:

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \cdot (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)).$$

Um jetzt das Integral auf $\mathcal{H}^2$ zu erweitern, müssen wir sicherstellen, dass I eine stetige Funktion von $\mathcal{H}_0^2$ in $L^2(d\mathbf{P})$ ist. Dass das tatsächlich der Fall ist zeigt das nächste Lemma.

Lemma 5.1. ***(Itô's Isometrie auf*** $\mathcal{H}_0^2$**):** Für jedes $f \in \mathcal{H}_0^2$ gilt

$$\mathbb{E}\left[I(f)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right]. \tag{5.2}$$

Beweis Um Gleichung 5.2 zu beweisen, betrachten wir beide Seiten getrennt. Für die linke Seite gilt

$$\mathbb{E}\left[I(f)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=0}^{n-1} a_i \cdot a_j \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \cdot (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2] \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Für die rechte Seite erhält man auf ähnliche Art und Weise

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \cdot \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\ dt\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2] \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

was die Gültigkeit von Itô's Isometrie auf $\mathcal{H}_0^2$ zeigt. ■

Das folgende Lemma besagt, dass $\mathcal{H}_0^2$ dicht in $\mathcal{H}^2$ liegt, das heißt, dass man Elemente aus $\mathcal{H}^2$ beliebig gut mit Elementen aus $\mathcal{H}_0^2$ approximieren kann.

Lemma 5.2. Für jedes $f \in \mathcal{H}^2$ existiert ene Folge $\{f_n\}$ in $\mathcal{H}_0^2$, so dass

$$||f - f_n||_{L^2(d\mathbf{P}\times dt)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Beweis Einen genauen Beweis findet man in Steele Kapitel 6. Dennoch wird an dieser Stelle die benutzte Approximation $A_n(f)(\omega, t)$ angegeben:

$$A_n(f)(\omega, t) := \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\omega, u)du \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]},$$

wobei $t_i = \frac{iT}{2^n}$. ■

Ein natürlicher Kanditat für das Itô-Integral einer Funktion $f \in \mathcal{H}^2$ ist jetzt $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$, wobei f_n eine Folge in $\mathcal{H}_0^2$ ist. Um sicher zu gehen, dass diese Definition legitim ist, müssen zwei Sachen überprüft werden.
Zunächst muss gezeigt werden, dass $||f - f_n||_{L^2(d\mathbf{P}\times dt)} \to 0$ impliziert, dass $I(f_n)$ in $L^2(d\mathbf{P})$ konvergiert. Das ist ganz einfach: Da $f - f_n$ gegen 0 in $L^2(d\mathbf{P} \times dt)$ konvergiert, ist die Folge $\{f_n\}$ dort eine Cauchyfolge. Itô's Isometrie besagt nun, dass $\{I(f_n)\}$ eine Cauchyfolge in $L^2(d\mathbf{P})$ ist, und da $L^2(d\mathbf{P})$ ein vollständiger Raum ist, konvergiert $\{I(f_n)\}$ in $L^2(d\mathbf{P})$ gegen ein Element, das mit $I(f)$ bezeichnet wird.
Die zweite Sache, die überprüft werden muss, ist, dass I wohldefiniert ist, in dem Sinne, das wenn f_n' eine weitere Folge ist, für die $||f - f_n'||_{L^2(d\mathbf{P}\times dt)} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, dass dann $I(f_n')$ den selben Grenzwert in $L^2(d\mathbf{P})$ hat wie $I(f_n)$. Auch das ist leicht zu zeigen: Denn aus der Dreiecksungleichung folgt sofort $||f_n - f_n'||_{L^2(d\mathbf{P}\times dt)} \to 0$ und daraus und aus Itô's Isometrie folgt dann $||I(f_n) - I(f_n')||_{L^2(d\mathbf{P})} \to 0$.

Die bisherige Konstruktion der Abbildung $I : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(d\mathbf{P})$ ist gut, aber noch nicht gut genug. Wünschenswert wäre nämlich eine Abbildung I, die einen stochastischen Prozess wieder in einen stochastischen Prozess überführt. Wir gehen dabei so vor, dass wir versuchen den Parameter t über eine Funktion $m_t \in \mathcal{H}^2$ einzuführen und definieren

$$m_t(\omega, s) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } s \in [0, t] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft leicht, dass m_t tatsächlich Element aus $\mathcal{H}^2$ ist, und dass für $f \in \mathcal{H}^2$ auch das Produkt $m_t f$ in $\mathcal{H}^2$ liegt, also ist $I(m_t f)$ ein wohldefiniertes Element in $L^2(d\mathbf{P})$. Ein guter Kanditat für das Itô-Integral in Form eines Prozesses von f wäre nun der Prozess $X_t'(\omega) = I(m_t f)(\omega)$, für alle $t \in [0, T]$. Das Problem ist, dass $I(m_t f)$ für alle $t \in [0, T]$ nur bis auf einer Nullmenge definiert ist, und dass die Vereinigung von überabzählbaren Nullmengen im Allgemeinen keine Nullmenge mehr ist.
Doch es gibt eine Lösung zu diesem Problem, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 5.3. Für jedes $f \in \mathcal{H}^2$ existiert ein Prozess $\{X_t | t \in [0, T\}$, für den gilt:

$$\mathbf{P}(X_t = I(m_t f)) = 1 \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Dieser Prozess $\{X_t | t \in [0, T\}$ ist ein Martingal bezüglich der standard Brownschen Filtrierung.

Beweis Der Beweis dazu kann in Steele Kapitel 6 nachgelesen werden. ■

Der nächste Schritt wäre das Itô-Integral auf eine größere Klasse von Funktionen zu erweitern, auf den sogenannten $\mathcal{L}^2_{LOC}$, der alle Funktion $f : \Omega \times [0, t] \to \mathbb{R}$ enthält, so dass

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T f^2(\omega, t)dt < \infty\right) = 1$$

gilt, doch das wird hier nicht mehr besprochen und kann in Büchern zu stochastischer Integration nachgelesen werden.

6 Das Girsanov-Theorem

6.1 Motivation

Kann eine Brownsche Bewegung mit Drift auch als Brownsche Bewegung ohne Drift „gesehen“ werden? Der Satz, der besagt, wie man einen Drift verschwinden lassen kann, ist in der Literatur bekannt als Girsanov-Theorem. Außerdem ist es eine weitere Methode um neue Martingale zu konstruieren.

6.2 Die „Tilting-Formel“

Im Mittelpunkt unserer Betrachtung steht eine standard Brownsche Bewegung mit Drift

$$X_t = B_t + \mu t \quad t \geq 0,$$

wobei B_t die standard Brownsche Bewegung bezeichnet. Die Frage ist jetzt, wie man

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})]$$

berechnet, wobei $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte borelmessbare Funktion ist. Um die unabhängigen Inkremente der Brownschen Bewegung auszunützen, betrachten wir eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die gilt $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$ (die Tatsache, dass so eine Funktion g überhaupt existiert ist leicht zu überprüfen). Wir können uns jetzt also auf die Dichte ϕ des Vektors $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ fokussieren und erhalten:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot t_1^{-\frac{1}{2}} \cdot (t_2 - t_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot (t_n - t_{n-1})^{-\frac{1}{2}}}_{:=C} \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{((x_i - x_{i-1}) - \mu(t_i - t_{i-1}))^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right),$$

wobei $x_0 = 0$ gesetzt wurde. Durch elementare Umformungen erhält man

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(\mu(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}\mu^2(t_i - t_{i-1})\right) = \\
&= C \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\mu(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}\mu^2(t_i - t_{i-1})\right)\right) = \\
&= C \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \cdot \exp\left(\mu x_n - \frac{1}{2}\mu^2 t_n\right).
\end{aligned}$$

Man sieht nun, dass sich die Dichte von $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ von der Dichte von $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ nur um den Faktor $\exp\left(\mu x_n - \frac{1}{2}\mu^2 t_n\right)$ unterscheidet. Es folgt daher:

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})] = \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \cdot \exp\left(\mu B_{t_n} - \frac{1}{2}\mu^2 t_n.\right)\right] \tag{6.1}$$

Eine wichtige Eigenschaft dieses neuen Korrekturfaktors $M_{t_n} := \exp\left(\mu x_n - \frac{1}{2}\mu^2 t_n\right)$ ist, dass es sich um ein Martingal bezüglich der Brownschen Filtrierung handelt, wie in Lemma 4.4 Punkt 3 bereits gezeigt wurde. Da $f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ adaptiert an die Brownschen Filtrierung ist und $t_n \leq T$ kann Gleichung (6.1) umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})] &= \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \cdot M_{t_n}] = \mathbb{E}[\ f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \cdot \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_{t_n}]\ ] = \\
&= \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \cdot M_T|\mathcal{F}_{t_n}]\ ] = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \cdot M_T],
\end{aligned}$$

wobei $\{\mathcal{F}_n\}$ die standard Filtrierung bezeichnet.
Zusammenfassend erhält man die sogenannte „Tilting-Formel“:

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})] = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \cdot M_T]. \tag{6.2}$$

Erstaunlich daran ist, dass dieser Korrekturfaktor M_T nicht von den Zeitpunken $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$ abhängt, sondern nur von T.

6.3 Einige Hilfsmittel

Um das Girsanov-Theorem beweisen zu können, sind vorerst einige Hilfsmittel nötig. Es werden im folgenden zwei neue Mengensysteme eingeführt und dann zwei Lemmatar vorgestellt, welche Zusammenhänge zwischen diesen beiden erklären.

Definition 6.1. **(π-*System*):** Ein Mengensystem $\mathcal{C}$ heißt π-System genau dann, wenn gilt:

$$A \in \mathcal{C} \text{ und } B \in \mathcal{C} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathcal{C}.$$

Definition 6.2. **(λ-*System*):** Ein Mengensystem $\mathcal{C}$ auf Ω heißt λ-System genau dann, wenn gilt:

- $\Omega \in \mathcal{C}$,
- $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ und $B \subseteq A \ \Rightarrow\ A \backslash B \in \mathcal{C}$, und
- $A_n \in \mathcal{C}$ und $A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

Lemma 6.3. Ist $\mathcal{C}$ ein λ-System und ein π-System, dann ist $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra.

Beweis Es gilt $\Omega \in \mathcal{C}$ und $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{C}$ für alle $A \in \mathcal{C}$, weil $\mathcal{C}$ ein λ-System ist.
Außerdem gilt für $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$, dass $B_1 \cup B_2 = (B_1^c \cap B_2^c)^c \in \mathcal{C}$, was aus den Eigenschaften von π-Systemen und λ-Systemen folgt. Durch Induktion bekommt man, dass für $B_1, B_2, \ldots B_n \in \mathcal{C}$ auch $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \in \mathcal{C}$ ist. Hat man nun eine Folge $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{C}$, so kann man sich eine monoton wachsende Mengenfolge $A_n := B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ konstruieren, für die dann gilt, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. So bekommt man, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$ ist. ■

Lemma 6.4. (***π-λ Theorem***)**:** Ist $\mathcal{A}$ ein π-System und $\mathcal{B}$ ein λ-System, so gilt:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}.$$

Beweis Es bezeichne $\lambda(\mathcal{A})$ das von $\mathcal{A}$ erzeugte λ-System, also das kleinste λ-System, das $\mathcal{A}$ enthält. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \lambda(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Kann man jetzt also zeigen, dass $\lambda(\mathcal{A})$ ein π-System ist, so folgt aus Lemma 6.3 die Behauptung.
Definiert man für ein $C \in \lambda(\mathcal{A})$ das Mengensystem $\mathcal{G}_C$ durch $\mathcal{G}_C := \{B \in \lambda(\mathcal{A}) | B \cap C \in \lambda(\mathcal{A})\}$, so gilt:

1. Für alle $C \in \lambda(\mathcal{A})$ ist $\mathcal{G}_C$ ein λ-System (was leicht zu überprüfen ist).
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}_A$ (weil $\mathcal{A}$ ein π-System ist).
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}_A$ (weil laut Punkt 2. $\mathcal{G}_A$ ein λ-System ist, das $\mathcal{A}$ enthält).
4. $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \lambda(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{A})$ (was unmittelbar aus Punkt 3. folgt).
5. $B \in \lambda(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}_B$ (was aus Punkt 4. folgt).

Aus Punkt 1. und Punkt 5. folgt jetzt unmittelbar, dass für jedes $B \in \lambda(\mathcal{A})$, $\lambda(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}_B$ gilt, was nichts anderes bedeutet, als das $\lambda(\mathcal{A})$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem ist, und somit ein π-System, was den Beweis abschließt. ■

6.4 Einfaches Girsanov- Theorem

Ziel dieses Kapitels ist es, einen neuen Messraum zu definieren mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß, unter welchem der Drift einer standard Brownschen Bewegung verschwindet.
Betrachtet man den Raum $C[0,T]$ aller auf dem Intervall $[0,T]$ stetigen Funktionen zusammen mit der gewöhnlichen Supremumsnorm, so bekommt man einen metrischen Raum. Diese Metrik definiert offene Mengen und die σ-Algebra $\mathcal{B}$ sei nun definiert, als die kleinste σ-Algebra, die alle diese offenen Mengen enthält. Man nennt $\mathcal{B}$ auch die Borel-σ-Algebra auf $C[0,T]$. Wir definieren nun einen neuen Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$, wobei $\Omega = C[0,T]$ und $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ gesetzt wird.
Betrachtet man nun einen beliebigen stochastischen Prozess $\{X_t |\ t \in [0,T]\}$ mit stetigen Trajektorien auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, so kann man sich eine Abbildung $X : \tilde{\Omega} \to C[0,T] : \tilde{\omega} \mapsto X(\tilde{\omega})$, definieren, wobei $X(\tilde{\omega})$ die Funktion ist, welche $t \mapsto X_t(\tilde{\omega})$ für $t \in [0,T]$ leistet.
Wir betrachten jetzt ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}$ auf $(C[0,T], \mathcal{B})$, das definiert ist durch

$$\mathbf{Q}(A) = \tilde{\mathbf{P}}(X^{-1}(A)).$$

Man sagt auch, $\mathbf{Q}$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C[0,T], \mathcal{B})$, welches durch den stochastischen Prozess $\{X_t |\ t \in [0,T]\}$ induziert wird.
Im folgenden sei $\mathbf{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß, das von einer standard Brownschen Bewegung induziert wird, und $\mathbf{Q}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß, das von einer standard Brownschen Bewegung mit konstantem Drift μ induziert wird.

Satz 6.5. (***Einfaches Girsanov-Theorem***)**:** Sei der Prozess $\{B_t |\ t \in [0,T]\}$ eine standard Brownsche Bewegung bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $C[0,T]$, welches vom Prozess $X_t = B_t + \mu t$ induziert wird. Dann gilt für jede beschränkte borelmessbare Funktion W auf dem Raum $C[0,T]$, das

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[W] = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[W M_T], \tag{6.3}$$

wobei $M_t = \exp\left(\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$ das schon bekannte $\mathbf{P}$-Martingal ist.

Beweis Wir zeigen Gleichung (6.3) zuerst für Funktionen W der Form $W = \mathbb{1}_A$, wobei $A \in \mathcal{B}$. Bezeichnet man mit $\mathcal{I}$ das Mengensystem, das alle Mengen der Form

$$A = \{\omega \in C[0,T] \mid \omega(t_i) \in [a_i, b_i] \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$$

enthält, wobei n eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet und a_i, b_i beliebige reelle Zahlen, so gilt laut Tilting-Formel (6.2) Gleichung (6.3) für $W = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{I}$. Weiters gilt, dass $\mathcal{I}$ ein durchschnittstabiles Mengensystem ist, also ein π-System.
Definieren wir als nächstes das Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, das alle Mengen A enthält, für die $W = \mathbb{1}_A$ Gleichung (6.3) erfüllt, dann gilt:

- $\Omega \in \mathcal{C}$, weil $\mathbb{E}_\mathbf{Q}[\mathbb{1}_\Omega] = 1$ und $\mathbb{E}_\mathbf{P}[\mathbb{1}_\Omega M_T] = \mathbb{E}_\mathbf{P}[M_0] = 1$, was aus Lemma 2.4 Punkt 2 folgt.
- $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ und $B \subseteq A \;\Rightarrow\; A \backslash B \in \mathcal{C}$, was aus $\mathbb{1}_{A\backslash B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ und des Linearität des Integrals folgt.
- $A_n \in \mathcal{C}$ und $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{C}$, weil

  $$\mathbb{E}_\mathbf{Q}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_\mathbf{Q}[\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\mathbf{Q}[\mathbb{1}_{A_n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\mathbf{P}[\mathbb{1}_{A_n} M_T] = \mathbb{E}_\mathbf{P}[\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} M_T] = E_\mathbf{P}[\mathbb{1}_A M_T],$$

  was aus der monotonen Konvergenz folgt.

$\mathcal{C}$ ist somit ein λ-System, das das π-System $\mathcal{I}$ enthält. Aus dem π-λ Theorem (Lemma 6.4) folgt nun $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{C}$ und daher $\sigma(\mathcal{I})$ genau die Borel- σ-Algebra auf $C[0,T]$ ist, gilt Gleichung (6.3) für alle $W = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{B}$.
Aus der Linearität des Integrals folgt jetzt unmittelbar, dass Gleichung (6.3) für einfache Funktionen gilt und daher jede beschränkte borelmessbare Funktion W der Grenzwert von einfachen Funktionen ist, ist der Beweis abgeschlossen. ■

6.5 Konstruktion von Martingalen

Betrachtet man den Prozess $X_t = B_t + \mu t$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, wobei B_t wieder eine standard Brownsche Bewegung ist, so ist für $\mu \neq 0$ X_t sicher kein $\mathbf{P}$-Martingal bezüglich der standard Brownschen Filtrierung. Definiert man jedoch ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, durch

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\right],$$

dann besagt das einfache Girsanov-Theorem, dass $\{X_t \mid t \in [0,T]\}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ eine standard Brownsche Bewegung ist und somit ein $\mathbf{Q}$-Martingal.

6.6 Verallgemeinertes Girsanov-Theorem

Wir haben jetzt gesehen, dass man durch geschickte Wahl eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, eine konstante Drift verschwinden lassen kann. Doch diese Idee funktioniert noch viel allgemeiner, mit einer nicht konstanten Drift.

Satz 6.6. (*Verallgemeinertes Girsanov-Theorem*): Sei $\mu(\omega, t)$ ein beschränkter, adaptierter Prozess auf dem Intervall $[0,T]$, $\{B_t \mid t \in [0,T]\}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbf{P}$, und $\{X_t \mid t \in [0,T]\}$ ein Prozess definiert durch

$$X_t = B_t + \int_0^t \mu(\omega, s)\, ds \quad \text{für } t \in [0,T].$$

Dann ist der Prozess $\{M_t |\ t \in [0,T]\}$ definiert durch

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \mu(\omega,s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu^2(\omega,s)ds\right)$$

ein **P**-Martingal bezüglich der Brownschen Filtirerung. Außerdem ist $\{X_t |\ t \in [0,T]\}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}$, das definiert ist durch $\mathbf{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[\mathbb{1}_A M_T]$.

Beweis Der Beweis kann in Steele Kapitel 13 nachgelesen werden. ■

Literatur

[STEEL] J. MICHAEL STEELE: **Stochastic Calculus and Financial Applications**, Springer-Verlag, New-York, 2001

[WILL] DAVID WILLIAMS: **Probability with Martingales**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991

[SHRE] STEVEN E. SHREVE: **Stochastic Calculus for Finance 1**, Springer-Science + Buisness Media, New-York, 2004

[PRAB] NARAHARI U PRABHU: **Stochastic Processes**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007

[EICH] PETER EICHELSBACHER: **Stochastische Modelle**, Vorlesungsskriptum, Ruhr-Universität Bochum, 2004

[KUSO] NORBERT KUSOLITSCH: **Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie**, Vorlesungsskriptum, Technische Universität Wien, 2008