

Seminararbeit aus Finanz- und  
Versicherungsmathematik

**Fondsgebundene  
Lebensversicherung**

Andrea Orthofer

TU-WIEN

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Stetiger Fall</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Das ökonomische Modell</b>	<b>8</b>
3.1	Black-Scholes-Marktmodell . . . . .	9
3.2	Berechnung der Optionspreise . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Berechnung der nötigen Einmaleinlagen bei zusätzlicher Garantie</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Die Thielesche Differentialgleichung</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Hedging</b>	<b>17</b>
6.1	Delta-Hedging . . . . .	18
6.2	Hedging-Kosten durch diskretes Handeln . . . . .	18
6.3	Vega-Hedging . . . . .	19
6.4	Rho-Hedging . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Sensitivitätsanalyse</b>	<b>21</b>
<b>8</b>	<b>Variations- und Verfeinerungsmöglichkeiten</b>	<b>22</b>

# 1 Einführung

Die Befürchtung vieler Menschen, dass ihre staatliche Pension eine Tages nicht mehr ausreichen wird, um den bisherigen Lebensstandard zu halten, lässt viele von ihnen über das Thema der privaten Altersversorgung nachdenken. Der immer größer werdende Konkurrenzkampf der Versicherungsunternehmen bei der Gewinnung von Neukunden, führt zur Entwicklung von neuen Produkten. Ein Produkt, welches in der Vergangenheit immer größere Popularität gewann, ist die fondsgebundene Lebensversicherung. Die so genannten „Unit-Linked“-Produkte versprechen im Allgemeinen bei dem Eintritt des versicherten Ereignisses eine bestimmte Anzahl von Anteilen eines Fonds. Sie möchten sozusagen stärker als das klassische Produkt von den Chancen der Kapitalmärkte profitieren. Für diese Art der Versicherung ist es charakteristisch, dass die Leistungen im Erlebens- als auch im Todesfall nicht deterministisch, sondern zufällig sind. Jedoch kann dem Anleger trotzdem eine risikolose Anlage gewährt werden, indem man eine Mindestgarantie einführt.

Weiters ist zu erwähnen, dass die Risikosumme bei traditionellen Produkten konstant ist, bei anteiligen Versicherungen jedoch vom Wert des zugrunde liegenden Fonds abhängt.

Im Folgenden werden wir uns auf das Buch von [KO] beziehen.

Wenn wir nun Fondsgebundene Versicherungen betrachten, müssen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$N(t)$  = Anzahl der Leistungsanteile zur Zeit  $t$

$S(t)$  = Wert eines Anteils zur Zeit  $t$

Wenn man nun  $N(t)$  als deterministisch annimmt, können wir eine reine Todesfallversicherung folgendermaßen anschreiben:

	<b>Traditionell</b>	<b>(pure)Unit Linked</b>
Auszahlung beim Tod	$C(t) = 1$	$C(t) = S(t)$
Wert (Zeit 0)	$\pi_0(t) = \exp(-\delta t)$	$\pi_0 = S(0)$
Einmalprämie	$\mathbb{E}[\int_0^T \pi_0(t) d(I_{\{T_x \leq t\}})]$ $= \int_0^T e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$	$\mathbb{E}[\int_0^T \pi_0(t) d(I_{\{T_x \leq t\}})]$ $= S(0) \int_0^T {}_t p_x \mu_{x+t} dt$ $= (1 - {}_T p_x) S(0)$

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass wir bei der Berechnung der Einmalprämie, implizit angenommen haben, dass der auf die Zeit 0 diskontiert Wert des Fonds zur Zeit  $t$  im Mittel stets dessen Wert zur Zeit 0 entspricht. Bis jetzt haben wir uns Produkte ohne Zinsgarantie angesehen, doch wie schon erwähnt kann man eine Garantie (z.B. Rückgewähr der einbezahlten Prämien) einbauen.

Diese Garantie hat zum Beispiel folgende Gestalt:

$$G(t) = \int_0^t \bar{p}(s) ds$$

wobei  $\bar{p}(s)$  die Prämiedichte zur Zeit  $s$  bezeichnet.

Des Weiteren könnte es auch eine Garantie in der Höhe der zu einem fixierten Zinssatz verzinsten Prämien geben:

$$G(t) = \int_0^t e^{r(t-s)} \bar{p}(s) ds$$

Somit hat man eine Auszahlungsfunktion:

$$C(t) = \max\{S(t), G(t)\}$$

Wir nehmen nun an, dass sich der Wert des Fonds gemäß eines stochastischen Prozesses mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  entwickelt. Wollen wir dann den Wert der diskontierten Auszahlung  $C(t)$  zur Zeit  $t$  berechnen, darf man nicht einfach den Erwartungswert unter  $\mathbf{P}$  bilden, da man sonst möglicherweise einen Gewinn ohne Risiko (Arbitrage) erzielen könnte. Aus diesem Grund zeigt die Finanzmarkttheorie, dass man ein äquivalentes Martingalmaß finden kann, welches die Arbitragemöglichkeiten ausschließt. Wenn wir von einem „fairen“ Markt ausgehen, ist der Wert des diskontierten Auszahlung

$$\pi_0(C(t)) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\max\{S(t), G(t)\}],$$

wobei  $\mathbf{Q}$  ein zu  $\mathbf{P}$  äquivalentes Maß ist, unter welchem der diskontierte Wert ein Martingal ist.

Betrachten wir nun die Auszahlung  $C(t)$ , so können wir feststellen, dass es sich um eine Option handelt, deren Preis wir mit Hilfe der „arbitrage free pricing“-Theorie, bestimmen können.

Wir müssen uns somit damit beschäftigen, welchen Wert unsere Option zum Zeitpunkt 0 hat.

Wie schon erwähnt, führt der Erwartungswert bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  zu verfälschten Preisen und somit zur Arbitrage.

Aus diesem Grund werden wir als Vereinfachung die einfachste Ökonomie betrachten, indem wir uns auf endliche Modelle beschränken.

Im Folgenden werden wir einige Definitionen aus der Finanzmathematik benötigen, die wir deshalb kurz wiederholen werden.

Wir betrachten:

- den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit  $|\Omega| < \infty$
- $P(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$
- einen endlichen Zeithorizont  $T$
- $\mathcal{F}_t$  ist die  $\sigma$ -Algebra der zur Zeit  $t$  beobachtbaren Ereignisse
- es gibt  $k < \infty$  stochastische Prozesse, welche den Verlauf der Wertschriften  $1, \dots, k$  repräsentieren.

$$S = \{S_t, t = 0, 1, 2, \dots, T\} \quad \text{mit Komponenten } S^0, S^1, \dots, S^k.$$

- $S_t^0$  ist die nullte Wertschrift und hat eine besondere Bedeutung, da wir annehmen, dass  $S_t^0 = (1 + r)^t$  ist, wodurch wir die Möglichkeit haben risikofrei zu einem Zins  $r$  zu investieren.

**Definition:**

Eine Handelsstrategie ist ein vorhersehbarer ( $\phi \in \mathcal{F}_{t-1}$ ) Prozess  $\Phi = \phi_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  mit Komponenten  $\phi_t^k$ , wobei  $\phi_t^k$  die Anzahl der  $k$ -ten Wertschriften, welche wir zwischen  $[t-1, t)$ , halten. Deswegen nennt man  $\phi_t$  auch

Portfolio, dessen Wert zur Zeit  $t$ , wie folgt angeschrieben wird:

**Zeit    Wert des Portfeuillees**

$$t - 1 \quad \phi_t \cdot S_{t-1}$$

$$t^- \quad \phi_t \cdot S_t$$

Dadurch erhalten wir einen Gewinn von  $\phi_t \Delta S_t$  im Intervall  $[t - 1, t)$

$$G(\phi) = \sum_{\tau=1}^t \phi_\tau \cdot \Delta S_\tau \quad \text{im Intervall } [0, t]$$

mit  $G_0(\phi) = 0$ .

$G$  ist ein adaptierter, reellwertiger stochastischer Prozess, welcher in unserem Fall als Gewinnprozess bezeichnet wird.

**Definition:**

Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzierend, falls

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t-1} \cdot S_t \quad \forall t = 1, 2, \dots, T - 1.$$

Das bedeutet, dass zu keiner Zeit dem Portefeuille Geld zugeführt oder abgezogen wird.

**Definition:**

Der Preis des Portfeuillees wird mit

$$\pi = V_0(\phi)$$

bezeichnet.

**Definition:**

Eine Handelsstrategie heißt Arbitragemöglichkeit, falls für den zugehörigen diskontierten Portefeuilleprozess gilt:

- $\phi \in \Phi$  mit  $V_0(\phi) = 0$
- $V_T(\phi) \geq 0$
- $P[V_T(\phi) > 0] > 0$

**Definition:**

Eine Abbildung

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty), X \mapsto \pi(X)$$

heißt genau dann Preissystem, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- $\pi(X) = 0 \iff X = 0$
- $\pi$  ist linear

**Definition:**

Ein Preissystem nennt man konsistent, falls

$$\pi(V_T(\phi)) = V_0(\phi) \quad \text{für alle } \phi \in \Phi$$

**Definition:**

Die Menge  $\mathbb{P}$  sind die zu  $\mathbf{P}$  äquivalenten Maße  $\mathbf{Q}$ , unter welchem  $\beta_t S$  ein Martingal ist, wobei  $\beta_t$  den Diskontierungsfaktor von der Zeit  $t$  nach 0 bezeichnet.

Wir wissen auch, dass zwischen der Menge der konsistenten Preissysteme und den Maßen  $\mathbf{Q} \in \mathbb{P}$  eine Bijektion existiert, die folgendermaßen definiert ist:

1.  $\pi(X) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\beta_T X]$
2.  $\mathbf{Q}(A) = \pi(S_T^0 I_{\{A\}})$  für alle  $A \in \mathcal{A}$

## 2 Stetiger Fall

**Definition:**

Unter einer Handelsstrategie  $\phi$  verstehen wir einen lokal beschränkten, vorhersehbaren Prozess.

**Definition:**

Der Wertprozess, welcher der Handelsstrategie  $\phi$  zugeordnet ist, ist definiert als:

$$V : \Pi \rightarrow \mathbb{R} \quad \phi \mapsto V(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^k \phi_t^i \cdot S_t^i$$

**Definition:**

Der Gewinnprozess  $G$  ist definiert durch:

$$G : \Pi \longrightarrow \mathbb{R} \quad \phi \mapsto G(\phi) = \int_0^\tau \phi dS = \int_0^\tau \sum_{i=0}^k \phi^i dS^i$$

**Definition:**

$\phi$  ist selbstfinanzierend, falls:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)$$

**Definition:**

Der Preis einer Bezugsgröße  $X$  ist gegeben durch:

$$\pi(X) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\beta_T X]$$

### 3 Das ökonomische Modell

Um einen Preis zu berechnen, ist ein zugrundeliegendes ökonomisches Modell notwendig.

Betrachten wir nun das meist verwendete Modell der geometrischen Brownschen Bewegung.

**Allgemeine Konventionen:**

- $T_x$  bezeichnet stets die zukünftige Lebensdauer eines  $x$ -jährigen
- $\mathcal{H}_t = \sigma(\{T > s\}, 0 \leq s \leq t)$  ist die von  $T_x$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra
- Für die Wertschriften nehmen wir an, dass sich das Portfolio gemäß einer standardisierten Brownschen Bewegung  $\mathbf{W}$  entwickelt.
- $\mathcal{G}_t$  bezeichnen wir die von  $\mathbf{W}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra, erweitert um die  $\mathbf{P}$ -Nullmenge

Ein wichtiger Aspekt in unserer Betrachtung ist die Unabhängigkeit der Finanzvariablen. Das bedeutet, dass die  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{G}_t$  und  $\mathcal{H}_t$  stochastisch unabhängig sind. Dies bedeutet, dass die Finanzvariablen unabhängig von der zukünftigen Lebensdauer sind.

Somit bezeichnen wir die von  $\mathcal{G}_t$  und  $\mathcal{H}_t$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t)$ , wobei das Maß auf  $\mathcal{F}_t$  das Produktmaß darstellt.

### 3.1 Black-Scholes-Marktmodell

Dieses Marktmodell besteht aus zwei Anlagemöglichkeiten:

Risikofreie Anlage:

$$B(t) = \exp(\delta t)$$

Fonds, durch eine geometrische Brownschen Bewegung modelliert:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right)$$

mit  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ .

$S$  stellt die Lösung folgender stochastischer Differentialgleichung dar:

$$dS = \eta S dt + \sigma S dW$$

Nun betrachten wir die diskontierten Werte von  $B$  und  $S$ :

$$\begin{aligned} B^*(t) &= \frac{B(t)}{B(t)} = 1 \\ S^*(t) &= \frac{S(t)}{B(t)} = S(0) \exp\left[\left(\eta - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + W(t)\right] \end{aligned}$$

### 3.2 Berechnung der Optionspreise

Um die Optionspreise zu bestimmen muss man zuerst ein äquivalentes Martingalmaß bestimmen. Wir benötigen somit ein Maß  $\mathbf{Q}$ , sodass  $S^*$  ein Martingal unter  $\mathbf{Q}$  ist.

Hierzu definieren wir uns folgende Radon-Nikodym-Dichte:

$$\xi_t = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta - \delta}{\sigma}\right)^2 t - \frac{\eta - \delta}{\sigma}W(t)\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Wegen eines Folgesatzes des Girsanov-Theorems aus der Theorie der stochastischen Integration folgt, dass

$$\hat{W}_t = W(t) + \frac{\eta - \delta}{\sigma}t$$

unter  $\mathbf{Q} = \xi\mathbf{P}$  eine standardisierte Brownsche Bewegung ist.

**Lemma:**

Nach dieser Transformation ist

$$S^*(t) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\hat{W}(t)\right)$$

unter  $\mathbf{Q}$  ein Martingal ist.

Somit entsprechen die Preise einer Option dem Erwartungswert unter  $\mathbf{Q}$ .

**Beweis:**

Für  $t, u \in \mathbb{R}, u > t$  ist die folgende Gleichheit zu beweisen:

$$\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[S^*(u)|\mathcal{F}_t] = S^*(t).$$

Dafür ist folgende Notation notwendig:  $u = t + \Delta t, \hat{W}_u = \hat{W}_t + \Delta\hat{W}$  und  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[S^*(u)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\hat{W}(t) + \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + \sigma\Delta\hat{W}\right)\right) | \mathcal{F}_t\right] \\ &= S^*(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\hat{W}(t)\right) \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z\right) | \mathcal{F}_t\right] = S^*(t). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  $\mathbf{Q}$  ein zu  $\mathbf{P}$  äquivalentes Maß ist, unter welchem  $S^*$  ein Martingal ist. Somit existiert mindestens ein konsistentes Preissystem.

Nachdem wir nun eine geeigneten Ökonomie mit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ,  $S$  und  $B$  definiert haben, können wir nun den Preis einer Todesfallsumme  $C(T)$  zur Zeit  $t$  bestimmen:

$$\pi_t = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\exp(-\delta(T - t))C(T)|\mathcal{F}_t]$$

Wir können nun auch die Einmaleinlagen für dieses Marktmodell für die Erlebensfallversicherung, sowie für die Temporäre Todesfallversicherung berechnen:

- **Erlebensfallversicherung**

$$V(0) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\exp(-\delta T)C(T)]_T p_x$$

- **Temporäre Todesfallversicherung**

$$V(0) = \int_0^T E^{\mathbf{Q}}[\exp(-\delta t)C(t)]_t p_x \mu_{x+t} dt$$

## 4 Berechnung der nötigen Einmaleinlagen bei zusätzlicher Garantie

Bisher haben wir dem Versicherungsnehmer keine Garantie zugesprochen. Nun wollen wir analysieren, was passiert, wenn man dem Versicherungsnehmer eine garantierte Leistung zusagt. Dazu ist folgende Notation notwendig:

$C(\tau)$	Versicherungssumme zur Zeit $\tau$
$N(\tau)$	Anzahl der Fondsanteile zur Zeit $\tau$
$S(\tau)$	Kurs der Wertschrift zur Zeit $\tau$
$G(\tau)$	Garantierte Leistung zur Zeit $\tau$
$C(\tau) = \max\{N(\tau)S(\tau), G(\tau)\}$	Versicherte Summe

Für unsere Berechnung der Nettoeinmalprämie für eine reine Erlebensversicherung und Todesfallversicherung verwenden wir das Black-Scholes-Modell. Black und Scholes gehen in ihrem Modell davon aus, dass

- der zu betrachtende Wertpapierkurs einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt,

- es keine Transaktionskosten gibt,
- dass zeitstetigen Handeln möglich ist,
- und dass Arbitragefreiheit vorliegt.

Als wichtiges Instrument nutzen wir die Black-Scholes-Formel:

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1(t, S(t))) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, S(t)))$$

mit

$$d_1(t, S(t)) = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(t, S(t)) = d_1(t, S(t)) - \sigma\sqrt{T-t}$$

Wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Die Black-Scholes-Formel beschreibt den Preisprozess eines europäischen Calls. Ein europäischer Call mit Strike  $K$  für ein Wertpapier  $S$  hat den Payoff

$$(S_T - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\}.$$

Ein europäischer Call kann erst zum Zeitpunkt  $T$ , am Ende der Laufzeit, ausgeübt werden. Ähnliches gilt auch für die Mindestgarantie in unserem Vertrag, die nur dann greift, wenn die Anlage nicht ausreichend gut ist. Sie stellt somit eine Art Option dar.

Zum Vertragsende ( $t = T$ ) wird der Wert des Wertpapiers ausbezahlt, mindestens aber die Mindestgarantie  $G$ . Der Zahlungsanspruch lautet folglich:

$$C(T) = \max\{G(T), N(T)S(T)\}$$

Man muss den Zahlungsanspruch so umformen, dass er den Wert eines europäischen Calls beschreibt.

Wir wollen vorerst die Nettoeinmalprämie für die Erlebensfallversicherung betrachten.

Der Wert der Erlebensfallversicherung zur Zeit Null beträgt  $\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[C^*(T)]$  somit gilt:

$${}_T G_x = {}_T p_x \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\max\{N(T)S^*(T), G^*(T)\}]$$

wobei

$$S^*(T) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \hat{W}(T)\right) \quad \text{mit} \quad \hat{W}(T) \sim N(0, T).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} {}_T G_x &= {}_T p_x \int_{-\infty}^{\infty} \max\left[N(T)S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \xi\right), G^*(T)\right] f(\xi) d\xi \\ f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\xi^2\right). \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $\bar{\xi} = \frac{1}{\sigma} \left[ \ln\left(\frac{G^*(T)}{N(T)S(0)}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right]$ . Wenn nun  $\xi > \bar{\xi}$ , dann ist auch  $N(T)S^*(T) > G^*(T)$ .

Somit berechnet sich die Einmaleinlage wie folgt

$$\begin{aligned} {}_T G_x &= {}_T p_x (G^*(T) \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} f(\xi) d\xi + N(T)S(0) \int_{\bar{\xi}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \xi\right) f(\xi) d\xi) \\ &= {}_T p_x (G^*(T) \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} f(\xi) d\xi + N(T)S(0) \int_{\bar{\xi}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}(\xi - \sigma T)^2\right) d\xi), \end{aligned}$$

womit man durch Vereinfachen der Terme zu folgendem Ergebnis kommt:

$${}_T G_x = {}_T p_x [G(T) \exp(-\delta T) \Phi(-d_2^0(T)) + S(0)N(T) \Phi(d_1^0(T))]$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ d_1^t(s) &= \frac{\ln\left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}\right] + \left(\delta + \frac{1}{2}\sigma^2(s-t)\right)}{\sigma\sqrt{s-t}}, (s > t) \\ d_2^t(s) &= \frac{\ln\left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}\right] + \left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2(s-t)\right)}{\sigma\sqrt{s-t}}, (s > t) \end{aligned}$$

Analoge Rechnungen wie oben, führen für die Nettoeinmalprämie für eine temporäre Todesfallversicherung in der Höhe von

$$C(t) = \max\{N(t)S(t), G(t)\}$$

auf folgendes Ergebnis:

$$G_{x:T}^1 = \int_0^T (G(t) \exp(-\delta t) \Phi(-d_2^0(t)) + S(0)N(t) \Phi(d_1^0(t))) {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

## 5 Die Thielesche Differentialgleichung

Die Ausführungen aus diesem Kapitel beziehen sich auf die Unterlagen von [KO] und [K].

Um die Thielesche Differentialgleichung herzuleiten, muss zuerst die Prämie für diesen Versicherungstyp eingeführt werden. Wir bezeichnen nun mit  $\bar{p}(t)$  die Prämien-dichte zur Zeit  $t$ .

Mit Hilfe des Äquivalenzprinzips gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} {}_T G_x &= \int_0^T \bar{p}(t) \exp(-\delta t) {}_t p_x dt \\ G_{x:T}^1 &= \int_0^T \bar{p}(t) \exp(-\delta t) {}_t p_x \mu_{x+t} dt \end{aligned}$$

Weiters muss das Deckungskapital der beiden Typen berechnet werden. Erlebensfallversicherung:

$$V(t) = {}_{T-t} p_{x+t} \pi_t(T) - \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t)) {}_{\xi-t} p_{x+t} d\xi$$

Todesfallversicherung:

$$V(t) = \int_t^T (\pi_t(\xi) \mu_{x+\xi} - \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))) {}_{\xi-t} p_{x+t} d\xi$$

mit

$$\pi_t(s) = G(s) \exp(-\delta(s - t)) \Phi(-d_2^t(s)) + N(s) S(t) \Phi(d_1^t(s))$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln\left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}\right] + (\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln\left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}\right] + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}$$

für  $s > t$ .

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass im Gegensatz zum klassischen Fall die Reserven nicht deterministisch sind, sondern vom Wert der zugrundeliegenden Wertschriften  $S$  abhängen.

Aus diesem Grund müssen wir anstatt der deterministischen Differentialgleichung, die Itô-Formel verwenden.

Im stetigen Fall lautet diese

$$df(W) = f'dW + \frac{1}{2}f''ds,$$

wobei  $W$  eine standardisierte Brownsche Bewegung bezeichnet.

Somit ergibt sich:

- Die Differentialgleichung für den Marktwert einer reinen Erlebensversicherung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Die Differentialgleichung für den Marktwert einer temporären Todesfallversicherung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - C(t)\mu_{x+t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$$

**Beweis:**

Mit der Definition des Nettodeckungskapitals:

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t}\pi_t^*(T) \exp(\delta t) - \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi-t)) {}_{\xi-t}p_{x+t} d\xi$$

mit  $\pi_t^*(T) = \exp(-\delta t)\pi_t(T)$ ,

lässt sich  $\pi_t^*(T)$  in folgender Gestalt anschreiben:

$$\pi_t^*(T) = \Psi(t) \left[ V(t) + \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))_{\xi-t} p_{x+t} d\xi \right]$$

mit  $\Psi(t) = \frac{\exp(-\delta t)}{T-t p_{x+t}}$ .

Da  $\pi_t^*$  eine Funktion von  $S(w)$  und  $t$  ist, kann die Itô-Formel auf die Funktion  $\pi_t^*(t, S)$  angewendet werden.

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\pi_t^* &= \frac{\partial}{\partial t} \pi_t^* \frac{\partial}{\partial S} \pi_t^* (rS dt + \sigma S d\hat{W}_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \pi_t^* \sigma^2 S^2 dt \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} \pi_t^* + \frac{\partial}{\partial S} \pi_t^* rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \pi_t^{*2} S^2 \right] dt + \frac{\partial}{\partial S} \pi_t^* \sigma S d\hat{W}_t \end{aligned}$$

Nun werden noch die einzelnen Terme bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t^*}{\partial S} &= \Psi(t) \frac{\partial V}{\partial S} \\ \frac{\partial^2 \pi_t^*}{\partial S^2} &= \Psi(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \end{aligned}$$

Um  $\frac{\partial \pi_t^*}{\partial t}$  zu berechnen, braucht man folgende Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi-t p_{x+t} &= \mu_{x+t} \xi-t p_{x+t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) &= \left( \frac{A}{B} \right)' = \frac{A'}{B} - \frac{A}{B^2} B' \\ &= -(\mu_{x+t} + \delta) \Psi(t) \end{aligned}$$

Nun muss man nur noch die obigen Terme einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t^*}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left( V(t) + \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))_{\xi-t} p_{x+t} dt \right) \\ &+ \Psi(t) \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))_{\xi-t} p_{x+t} dt \right) \\ &= \Psi(t) \left( \frac{\partial V}{\partial t} - (\mu_{x+t} + \delta) V(t) - \bar{p}(t) \right) \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Kettenregel auf den Term

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))_{\xi-t} p_{x+t} dt$$

anwenden, erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} \pi_s^*(T) &= \pi_t^*(T) + \int_t^s \Psi(\xi) \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S d\hat{W}(\xi) \\ &+ \int_t^s \Psi(\xi) \left[ \frac{\partial V}{\partial S} \delta S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (\mu_{x+\xi} + \delta) V(\xi) + \frac{\partial V}{\partial t} - \bar{p}(\xi) \right] d\xi \end{aligned}$$

Da wir wissen, dass  $\pi^*(T)$  ein Martingal ist, muss der Driftterm verschwinden. Und wir erhalten das gesuchte Resultat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta) V(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Die ersten Terme der Differentialgleichung entsprechen dem klassischen Fall. Das heißt die Abhängigkeit von den Prämien, der Sterblichkeit und dem Zins.
- Bedingt durch den Fonds kommt noch der Term  $-\frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$  hinzu, welcher durch die Fluktuation der zugrunde liegenden Wertschrift  $S$  bedingt ist.
- Für den Fall, dass die Sterblichkeitsdichte und die Prämiedichte gleich null wären, würden wir die Black-Scholes Gleichung erhalten.

## 6 Hedging

Die Informationen der nächsten Kapitel wurden von [HR] und [R] bezogen.

## 6.1 Delta-Hedging

Delta ist eine Kennzahl, welche die wertmäßige Veränderung eines Derivats bei Änderung des Aktienkurses um eine Einheit angibt. Man kann sozusagen mit Delta ein Bezugsverhältnis von Optionen und Aktien ermitteln. Somit kann es zur Bestimmung der Absicherung benutzt werden. Im Falle von Fondsgebundenen Lebensversicherungen soll das Risiko der Erzielung der Mindestgarantie abgesichert werden.

Für diesen Ansatz des Hedgings kann man die Formel des fairen Preises nach Black-Scholes, die wir bereits hergeleitet haben, anwenden.

Man nimmt eine Hedging-Strategie  $(\alpha_t, \beta_t)$  an, wobei  $\alpha_t$  die Anzahl der Zertifikate und  $\beta_t$  die Anzahl der Zero-Bonds mit Wert 1 bei Fälligkeit  $T$  beschreibt, welche zur Zeit  $t$  gehalten werden müssen.

Für die Hedging-Strategie muss zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T)$  gelten:

$$\pi_t(C) \stackrel{!}{=} \alpha_t S(t) + \beta_t e^{-r(T-t)}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \Phi(d_1(t, S(t)))N(t) \\ \beta_t &= G(1 - \Phi(d_2(t, S(t))))).\end{aligned}$$

Um eine selbstfinanzierende Strategie zu behalten, muss zeitstetiges Handeln möglich sein, ebenso müssen Transaktionskosten außer Acht gelassen werden. Da diese Bedingungen in der Praxis nicht immer umsetzbar sind, müssen alternative Methoden angewendet werden.

## 6.2 Hedging-Kosten durch diskretes Handeln

Nun untersuchen wir, welche Hedging-Kosten entstehen, wenn wir zeits-tetiges Handeln nicht mehr zulassen. Diese Annahme ist viel praxisnäher, da ein Versicherer immer nur zu diskreten Zeitpunkten das Portfolio anpassen kann. Diese Annahme ist jedoch nicht mehr mit den Annahmen des Black-Scholes-Modells konform.

Man nimmt an, dass man das Portfolio immer nach gewissen Tagen anpasst, und überprüft, welche Hedging-Kosten dadurch entstehen. Den Wert, den das Hedge-Portfolio zum Zeitpunkt  $t \in [0, T)$  hat, gibt man wie folgt an:

$$\tilde{V}_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}_t S_t + \tilde{\beta}_t e^{-r(T-t)}$$

wobei  $t$  nur die Zeitpunkte annimmt, an denen das Portfolio tatsächlich angepasst wird.

Dieses Portfolio stellen wir dem „idealen“ Wert, welchen wir mit dem Black-Scholes-Modell ermittelt haben, gegenüber:

$$V_t(\alpha, \beta) = \alpha_t S_t + \beta_t e^{-r(T-t)}$$

Nun setzen wir an den Tagen, an denen angepasst wird, die Anzahl der Anleihen und den Zero-Bond auf den idealen Wert:

$$\tilde{\alpha}_t := \alpha_t \quad \tilde{\beta}_t := \beta_t$$

Man muss jedoch beachten, dass durch diese Methode die selbstfinanzierende Eigenschaft des Hedging-Portfolios verloren geht. Aus diesem Grund nimmt man am Kapitalmarkt Geld auf oder legt es an. Der entsprechende Betrag  $C$  lässt sich wie folgt bestimmen:

$$C_t = (\tilde{\alpha}_{t-1} - \tilde{\alpha}_t) S_t + (\tilde{\beta}_{t-1} - \tilde{\beta}_t) e^{-r(T-t)}$$

Die jeweiligen Beträge werden bis zum Laufzeitende verzinst und aufaddiert, sodass sich zum Zeitpunkt  $T$  nachfolgende Hedgingkosten (negative Kosten = Gewinn)  $\sum C_t v(t, T)$  ergeben.

### 6.3 Vega-Hedging

Da der Black-Scholes-Ansatz von der in der Praxis nicht erfüllten Annahme ausgeht, dass die Volatilität  $\sigma$  konstant ist, sollte man somit versuchen, den Wert eines Portfolios auch unempfindlich gegenüber Änderungen der Volatilität zu machen. Dabei benutzt man das Vega eines Portfolios.

Vega beschreibt die Änderungsrate im Verhältnis zur Volatilität des Underlyings:

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \sigma}$$

Aus der Black-Scholes-Formel mit dem dort definierten  $d_2$  ergibt sich das Vega eines Calls auf eine dividendenfreie Aktie als

$$\mathcal{V} = S\sqrt{(T-t)}\varphi(d_2 + \sigma\sqrt{(T-t)}).$$

Da die Black-Scholes-Formel unter der Annahme konstanter Volatilität hergeleitet worden ist, ist es eigentlich nicht gerechtfertigt,  $\mathcal{V}$  durch Ableiten der Black-Scholes-Formel nach  $\sigma$  zu berechnen. Die obige Formel für  $\mathcal{V}$  ist aber sehr ähnlich zu einer Gleichung für  $\partial C/\partial \sigma$ , welche aus einem allgemeineren Modell mit stochastischer Volatilität folgt, so dass sie näherungsweise benutzt werden kann.

## 6.4 Rho-Hedging

Um sich gegen Zinsschwankungen abzusichern bedient man sich zum Beispiel dem Rho-Hedging. Rho ist eine Kennzahl, welche die Änderungsrate des Portfolios im Verhältnis zum Zinssatz darstellt:

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Für einen Call auf eine dividendenfreie Aktie ergibt sich aus der Black-Scholes-Formel:

$$\rho = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Ein Rho von -35,8 bedeutet zum Beispiel, dass bei einer Steigung des Zinssatzes um 1% unser Portfolio sich um 0,358% verringert. Somit ist das Ziel ein „zero Rho“ zu erreichen, um gegen Zinsrisiken perfekt abgesichert zu sein.

Bei Währungsoptionen müssen dabei neben den inländischen auch die

Zinsschwankungen im Land der Fremdwährung berücksichtigt werden, so dass beim Rho-Hedgen zwei verschiedene Werte  $\rho_1, \rho_2$  betrachtet werden.

All diese entsprechende Instrumente, sprich Optionen, für das Rho-, als auch für das Vega-Hedging sind jedoch sehr schwierig zu finden.

## 7 Sensitivitätsanalyse

Sensitivitätsanalysen sind unter anderem für den Vertrieb des Versicherers von wesentlicher Bedeutung. Von Interesse ist zum Beispiel die Variation der Mindestgarantie. Diese Garantie wird zu Vertragsbeginn zwischen Versicherer und Versicherungsnehmer vereinbart. Wird eine geringe Mindestgarantie gewählt, liegt der faire Preis nahe der Einmalzahlung. Dies hängt damit zusammen, dass der Anteil der Komponenten, die die Mindestgarantie sichern sollen, nur sehr gering ist. Somit wirkt sich der Einfluss bei der Berechnung des fairen Preises kaum aus, das heißt der faire Preis entspricht fast der Einmalzahlung. Steigt die Mindestgarantie, so steigt der faire Preis und der relative Wertanteil des Aktieninvestments im Hedge-Portfolio (=Aktienquote) fällt. Der restliche Anteil des Vermögens (d.h. 1- Aktienquote) wird gemäß der Delta-Hedging-Strategie in Zero-Bonds investiert. Das bedeutet, dass ein Teil der Prämien fest verzinst angelegt wird, um die Mindestgarantie zu erreichen. Der andere Teil der Prämien (Aktienquote) jedoch am Markt angelegt wird.

Weiters kann man beobachten, dass bei steigendem Wertpapierkurs auch sukzessive die Aktienquote durch die Delta-Hedging-Methode erhöht wird. Dieses Verhalten stimmt mit dem Verhalten eines europäischen Calls im Black-Scholes-Modell überein, welches wir für die Berechnungen auch zu Grunde gelegt haben. Auch der Wert der Mindestgarantie, also die Gebühr, nimmt bei steigendem Aktienanteil ab und fällt bis auf Null. Das beruht darauf, dass es durch die Kurssteigerungen immer unwahrscheinlicher wird, dass der Wert des Wertpapiers unter die

Mindestgarantie fällt. Die Mindestgarantie greift dann also nicht mehr, was dazu führt, dass die Gebühr wegfällt.

Mit Hilfe dieser Analysen kann mit dem Kunden ein Präferenzprofil entwickelt werden, in dem er die Notwendigkeit, Wichtigkeit und die Höhe der Garantiezahlung bestimmt. Darüberhinaus wird dem Kunden veranschaulicht, wie stark er an den Chancen des Aktienmarkts partizipiert.

## 8 Variations- und Verfeinerungsmöglichkeiten

Üblicherweise schließen Versicherungsunternehmen mit einer Vielzahl von Kunden Lebensversicherungsverträge ab. Diese haben unterschiedliche Laufzeiten und verpflichten zu unterschiedlichen Garantiezahlungen. So wäre es sinnvoll, wenn man bei der Modellierung nicht einen speziellen Vertrag, sondern das gesamte Portfolio als Berechnungsgrundlage heranziehen würde.

Für den fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag gibt es außerdem viele Variationsmöglichkeiten, die jeweils in die Modellierung einbezogen werden müssten. Diese Variationen sind zum Beispiel:

– **Kündigungsrecht:**

Um den Absatz an Produkten zu steigern, sollte der Versicherer seinen Kunden ein Kündigungsrecht einräumen. Man spricht von der sogenannten „Surrender Option“. Bei dieser „Surrender Option“ wird üblicherweise nur der Wert des Wertpapiers  $N(t)S(t)$  zum Kündigungszeitpunkt  $t$  ausbezahlt, auch wenn der Wert unter der Mindestgarantie liegt.

– **Mindestgarantie nur im Todesfall:**

Lebt der Versicherte zum Vertragsende noch, bekommt er nur den Wertpapierwert  $\frac{P}{S_0}S_T$  ausbezahlt. Das bedeutet, der Versicherungsnehmer trägt bis zum Laufzeitende das Risiko der Kapitalanlage selber.

– **Variable Beitragszahlungen:**

Die angenommene Einmalprämie, kann auch durch variable Beitragszahlungen erbracht werden.

– **Variable Anlagemöglichkeiten:**

Viele Versicherungsunternehmen bieten auch die Möglichkeit an, zwischen verschiedenen Anlagemöglichkeiten der Prämie zu wählen. Somit kann der Versicherungsnehmer sein persönliches Portfolio aus verschiedenen Fonds während der gesamten Vertragslaufzeit verändern. Die bestehenden und zukünftige Verteilung der Anteile auf die Fonds können an deren Erfolg angepasst werden.

Abschließend lässt sich sagen, dass das hier erläuterte Modell nur als Grundgerüst für komplexere Annahmen verwenden lässt, und somit eine große Bandbreite an Variationsspielraum zulässt.

## Literatur

- [K] KIESEL: *Financial Methods in Insurance*, Course notes, University of Ulm, 2006
- [KO] KOLLER: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*, Springer, 2000
- [HR] HAMKE, RÜCKERT: *Hedging von fondsgebundneen Lebensversicherungen*, Seminararbeit an der Universität Ulm, 2007
- [R] FRANKE, HÄRDLE, HAFNER: *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, Springer, 2003