

Zinstheorie in Versicherungen

Lisa Hütthaler

20. Januar 2009

- Für Versicherungen ist dieses Gesetz sehr wichtig
- Je größer die Anzahl der versicherten Personen, desto geringer ist der Einfluss des Zufalls
- Großereignisse können das Gesetz der großen Zahlen, zumindest teilweise, unbrauchbar machen

Der t -jährige Diskontierungsfaktor

$$v^t = (1 + i)^{-t} = e^{-rt} = S(t)^{-1}$$

i ist der jährliche Zinssatz

$r = \ln(1 + i)$ ist die Zinsintensität (*force of interest*)

$v = e^{-r}$ ist der Diskontierungsfaktor

Wir betrachten nun den Fall, wo i nicht konstant ist.

$i(s)$ ist die jährliche Zinsrate für das Jahr s

$r(s)$ ist die entsprechende Zinsintensität für das Jahr s

Der t -jährige Aufzinsungsfaktor

$$S(t) = (1 + i(1)) \cdots (1 + i(t)) = \exp\left(\sum_{s=1}^t r(s)\right)$$

Wenn sich der Zinssatz öfter als einmal im Jahr ändern kann, benötigen wir folgenden Faktor:

$r(u)$ ist die Zinsintensität zu irgendeiner Zeit u

Es ergibt sich der neue Aufzinsungsfaktor

Der t -jährige Aufzinsungsfaktor

$$S(t) = \exp\left(\int_0^t r(u) du\right)$$

Und der neue Diskontierungsfaktor

Der t -jährige Diskontierungsfaktor

$$S(t)^{-1} = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)$$

Portfolio von l_x Erlebensfallversicherungen, die zur Zeit n ablaufen und mit einer Einmalprämie $\pi(0)$ zur Zeit 0 bezahlt werden
Der Barwert des Verlustes des Versicherers verbunden mit dem Portfolio ist wie folgt definiert:

$$L = l_{x+n}S(n)^{-1} - l_x\pi(0).$$

$S(n)^{-1}l_{x+n}$ ist der Barwert der Leistung zur Zeit 0

Der Barwert der Prämien ist gleich der Zahlung $l_x\pi(0)$

Die Prämie $\pi(0)$ nennt man angemessen, wenn $L = 0$ ist

Wenn $S(n)$ deterministisch ist oder zur Zeit 0 bekannt ist, dann ist die angemessene Prämie die Äquivalenzprämie

Mit $S(t)^{-1} = \exp(-\int_0^t r(u)du)$ erhalten wir dann

$$\pi(0) = \frac{l_{x+n}}{l_x} \exp(-\int_0^n r(u)du) = {}_n p_x \exp(-\int_0^n r(u)du)$$

was dem erwarteten Barwert der Leistung entspricht.

- Ein *Zero Coupon Bond* ist eine Sonderform des verzinslichen Wertpapiers.
- Keine laufende Zinszahlung
- Nur eine Auszahlung am Ende der Laufzeit
- Der Gewinn ist die Differenz zwischen dem Erwerbkurs und dem Verkaufskurs

Definition

Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T , also eine T -Anleihe, zur Zeit $t \in [0, T]$ wird durch $P(t, T)$ bestimmt, wobei $P(t, t) = 1$ ist.

Eine Anleihe, ausgestellt zur Zeit τ_0 mit Zahlungen c_1, \dots, c_n zu gegebenen Zeiten $\tau_1 < \dots < \tau_n$.

Der Wert einer solchen Anleihe zur Zeit $t \geq \tau_0$, also nach möglichen Zahlungen zur Zeit t , ist:

$$P(t) = \sum_{i:\tau_i > t} P(t, \tau_i) c_i$$

$P(t, \tau_i)$ ist der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t mit Fälligkeit τ_i

Annuity bond

Diese Form der Anleihe erhält man, indem man für $k = 1, \dots, n$
 $c_k = c$ setzt

Bullet bond

Diese Anleihe erhält man, indem man für $k = 1, \dots, n - 1$

$$c_k = L(\tau_k - \tau_{k-1})K$$

und für $k = n$

$$c_n = L(\tau_n - \tau_{n-1})K + K$$

nimmt

L ist eine *simple rate*

K ist ein Geldbetrag

Mit dieser Anleihe erhält der Eigentümer zur Zeit τ_k den einfachen Zins $L(\tau_k - \tau_{k-1})$ auf das Kapital K für das Intervall $[\tau_{k-1}, \tau_k]$.

Zur Zeit τ_n wird das Kapital K gemeinsam mit dem Zins für das Intervall $[\tau_{n-1}, \tau_n]$ zurückgezahlt.

Den Ausdruck *hedgen* könnte man mit absichern übersetzen.
Was ist also der Unterschied zwischen ab- und versichern?

Durch den Kauf bzw. Verkauf von Derivaten können bestehende Wertpapierpositionen gegen negative Kursentwicklungen abgesichert werden.

Annahme: der Versicherer investiert zur Zeit 0 in $I_x \kappa$ Einheiten einer n -Anleihe.

Der Barwert des Verlustes des Versicherers vom Portfolio von I_x Lebensfallversicherungen ist

$$\tilde{L} = (I_{x+n} S(n)^{-1} - I_x \pi(0)) + I_x \kappa (P(0, n) - 1 \cdot S(n)^{-1})$$

1.Term: Barwert des Verlustes des Unternehmens ohne in n -Anleihen zu investieren

2.Term: Barwert des Verlustes vom Kauf von $I_x \kappa$ n -Anleihen zur Zeit 0 zum Preis $P(0, n)$. Die Differenz zwischen dem Preis $P(0, n)$ der Anleihe zur Zeit 0 und dem vom Unternehmen zur Zeit n erhaltenen diskontierten Betrag.

Durch Umordnen erhält man

$$\tilde{L} = (l_{x+n} - l_x \kappa) S(n)^{-1} + l_x (\kappa P(0, n) - \pi(0))$$

Der erste Term ist 0, wenn

$$\kappa = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x$$

und der Zweite, wenn

$$\pi(0) = {}_n p_x P(0, n)$$

$\pi(0)$ ist die angemessene Prämie

Wir betrachten nun ein Portfolio von l_x Risikoversicherungen

Die Anzahl der toten $x + t$ jährigen ist

$$d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}.$$

Versicherungssumme ist am Ende des Jahres zu zahlen, dh. zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots, n$.

Ein Portfolio von Risikoversicherungen hedgen

Das Unternehmen muss jetzt in Nullkuponanleihen mit Ablaufzeiten $t = 1, 2, \dots, n$ investieren.

Genau genommen investiert das Unternehmen zur Zeit 0 in $l_x \kappa(t)$ t -Anleihen mit Preis $P(0, t)$.

Der Verlust des Unternehmens zur Zeit 0 ist dann:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \left(\sum_{t=1}^n d_{x+t-1} S(t)^{-1} - l_x \pi(0) \right) \\ &+ l_x \sum_{t=1}^n \kappa(t) (P(0, t) - 1 \cdot S(t)^{-1}) \end{aligned}$$

Ein Portfolio von Risikoversicherungen hedgen

Dies kann umgeschrieben werden in

$$\tilde{L} = \sum_{t=1}^n (d_{x+t-1} - l_x \kappa(t)) S(t)^{-1} + l_x \left(\sum_{t=1}^n \kappa(t) P(0, t) - \pi(0) \right)$$

Der erste Term ist 0, wenn

$$\kappa(t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = {}_{(t-1)|}q_x = {}_{t-1}p_x {}_1q_{x+t-1}$$

was genau die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine x -jährige Person zur Zeit 0 im Intervall $(t-1, t]$ stirbt.

Der zweite Teil ist 0, wenn

$$\pi(0) = \sum_{t=1}^n (t-1)q_x P(0, t)$$

Bei dieser angemessenen Prämie wurde der übliche Diskontierungsfaktor durch Nullkuponanleihen ersetzt.

Definition

Der *continuously compounded zero coupon yield* $R(t, T)$ für $[t, T]$ wird definiert durch

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T).$$

Damit folgt der Preis der Nullkuponanleihe

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)(T - t))$$

Dies kann als Diskontierungsfaktor interpretiert werden, bestimmt durch den Zinssatz $R(t, T)$ während des Intervalls $[t, T]$.

Definition

Die Rendite zur Fälligkeit zur Zeit t der Anleihe

$P(t) = \sum_{i:\tau_i>t} P(t, \tau_i) c_i$ ist die Lösung $y(t)$ der folgenden Gleichung

$$P(t) = \sum_{i:\tau_i>t} e^{-y(t)(\tau_i-t)} c_i =: F(t, y(t)).$$

Definition

Die Laufzeit $D(t)$ zur Zeit t der Anleihe $P(t) = \sum_{i:\tau_i>t} P(t, \tau_i)c_i$ mit der Rendite zur Fälligkeit $y(t)$ ist definiert durch

$$D(t) = \frac{\sum_{i:\tau_i>t} (\tau_i - t)e^{-y(t)(\tau_i-t)}c_i}{P(t)}.$$

Laufzeit zur Zeit t für eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit τ stimmt mit der Zeit der Fälligkeit $\tau - t$ überein.

Wir benötigen die Zeiten $0 \leq t \leq T' \leq T$:

Der Zinssatz, der zur Zeit t (heute) für eine zukünftige Investition zur Zeit T' vereinbart wird und zur Zeit T endet.

Definition

Der *continuously compounded forward rate* zur Zeit t für das Intervall $[T', T]$ ist definiert als

$$f(t, T', T) = -\frac{\log P(t, T) - \log P(t, T')}{T - T'}$$

Das Verhältnis zwischen dem Preis für eine T -Anleihe zur Zeit t und für eine T' -Anleihe zur Zeit t ist

$$\frac{P(t, T)}{P(t, T')} = \exp(-f(t, T', T)(T - T')).$$

Definition

Der sofortige Terminzins zur Zeit t für die Zeit T ist

$$f(t, T) = -\frac{d}{dT} \log P(t, T)$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$\int_t^T f(t, \tau) d\tau = -\log P(t, T) + \log P(t, t)$$

Da ja $P(t, t) = 1$ ist und $\log(1) = 0$ ist, sehen wir, dass der Wert der Nullkuponanleihe zur Zeit t gegeben ist durch

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, \tau) d\tau\right)$$

Vergleich von Terminzins mit Kassazins

- Kassazins ist das Gegenstück zum Terminzins
- den Terminzins kann man aus den Kassazinsen zu verschiedenen Laufzeiten berechnen

Wenn man beim Verhältnis zwischen dem Preis für eine T -Anleihe zur Zeit t und für eine T' -Anleihe zur Zeit t , $T' = t$ setzt, folgt

$$f(t, t, T) = R(t, T)$$

- ehemalige Zinsen werden in der Berechnung der Zinsen für einen gegebenen Zeitraum nicht berücksichtigt
- Betrag P zur Zeit 0 auf ein Konto mit einfachen Zinsen L einzahlen, dies führt zu einem Zins von $PL(t - s)$ für die Zeitperiode $[s, t]$

Definition

Die einfache Rendite oder der einfache Kassazins für $[t, T]$ ist gegeben durch

$$L(t, T) = -\frac{P(t, T) - 1}{(T - t)P(t, T)}$$

und der einfache Terminzins für $[T', T]$ zur Zeit t ist gegeben durch

$$L(t, T', T) = -\frac{P(t, T) - P(t, T')}{(T - T')P(t, T)}.$$

Aus der Definition des einfachen Kassazinses folgt, dass

$$L(t, T)(T - t)P(t, T) = 1 - P(t, T)$$

- $1 - P(t, T)$ ist die Rendite während des Intervalls $[t, T]$ vom Kauf einer T -Anleihe zur Zeit t zum Preis $P(t, T)$ und vom Einlösen des Betrages 1 zur Zeit T
- $P(t, T)L(t, T)(T - t)$ ist genau der Anteil, der im Intervall $[t, T]$ in Kombination mit der Investition von $P(t, T)$ unter dem konstanten einfachen Zins $L(t, T)$ anfällt

Marktwert der garantierten Zahlungen

- Erlebensfallversicherung mit stetig zu zahlenden Prämien π
- Nach dem Erleben von n , erhält der VN einen garantierten Betrag $b^a(0)$
- b^{ad} ist sofort nach dem Tod vor dem Zeitpunkt n zu zahlen
- Der Vertrag beginnt zur Zeit 0, wenn der VN x Jahre alt ist

Der Marktwert der Zahlung $b^a(0)$ zur Zeit t , garantiert zur Zeit 0, ist:

$$b^a(0)P(t, n)_{n-t}p_{x+t}$$

$_{n-t}p_{x+t}$ ist die Überlebenswahrscheinlichkeit

Marktwert der garantierten Zahlungen

Der Marktwert zur Zeit t für b^{ad} ergibt sich durch

$$b^{ad} \int_t^n P(t, s) {}_{s-t}p_{x+t} \mu(x+s) ds$$

$P(t, s)$ ist der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t mit Ablaufzeit s

Der Marktwert der zukünftigen Prämien zur Zeit t ist

$$\pi \int_t^n P(t, s) {}_{s-t}p_{x+t} ds$$

Wenn wir diese Ausdrücke kombinieren, erhalten wir den Marktwert für die garantierten Zahlungen zur Zeit 0

$$\begin{aligned} V^g(0, t) &= b^a(0)P(t, n)_{n-t}p_{x+t} \\ &+ \int_t^n P(t, s)_{s-t}p_{x+t}(\mu(x + s)b^{ad} - \pi)ds. \end{aligned}$$

$V^g(t)$ bezeichnet den Marktwert zur Zeit t für die garantierten Zahlungen zur Zeit t

Wenn r und μ deterministische Funktionen sind, können die Nullkuponanleihenpreise folgendermaßen geschrieben werden

$$P(t, s) = \exp\left(-\int_t^s r(\tau) d\tau\right).$$

Damit erhalten wir den Marktwert zur Zeit u für die garantierten Zahlungen zur Zeit t

$$\begin{aligned}V^g(t, u) &= b^a(t) \exp\left(-\int_u^n r(\tau) d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ &+ \int_u^n \exp\left(-\int_u^s r(\tau) d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds = \\ &= b^a(t) {}_{n-u}E_{x+u} + b^{ad} A_{x+u:\overline{n-u}|}^1 - \pi a_{x+u:\overline{n-u}|}\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung für den Marktwert zur Zeit $u \geq t$ für die garantierten Zahlungen zur Zeit t , erhalten wir:

$$V^g(t, u) = b^a(t) \exp\left(-\int_u^n f(u, \tau) d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ + \int_u^n \exp\left(-\int_u^s f(u, \tau) d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds.$$

Für $t = u$ ergibt sich der Marktwert $V^g(t)$ zur Zeit t für garantierte Zahlungen zur Zeit t .

Wir betrachten die Thiel'sche Differentialgleichung, welche auch die Möglichkeit zur Herleitung einer Differentialgleichung für *the individual bonus potential* eröffnet.

Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} V^{g,0}(t, u) &= b^a(t) \exp\left(-\int_u^n f(t, \tau) d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ &+ \int_u^n \exp\left(-\int_u^s f(t, \tau) d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds. \end{aligned}$$

$V^{g,0}(t, u)$ ist also nicht wirklich ein Marktwert.

The individual bonus potential

$V(t) \geq V^*(t) \geq V^g(t)$, wobei $V(t)$ die *total reserve* ist

individual bonus potential V^{ib}

$$V^{ib}(t) = V^*(t) - V^g(t).$$

r^* der *first order* Zinssatz

μ^* die *first order* Sterbewahrscheinlichkeit

$V^*(t, u)$ ist die *technical reserve* zur Zeit u für die garantierten Zahlungen zur Zeit t

$R^*(t, u) = b^{ad} - V^*(t, u)$ ist die Risikosumme

The individual bonus potential

Unter Verwendung folgender Differentialgleichungen und der abschließenden Bedingung:

- $\frac{\partial}{\partial u} V^*(t, u) = r^*(u)V^*(t, u) + \pi - \mu^*(x + u)R^*(t, u),$
- $\frac{\partial}{\partial u} V^{g,\circ}(t, u) = f(t, u)V^{g,\circ}(t, u) + \pi - \mu(x + u)R^{g,\circ}(t, u)$
- $V^*(t, n) - V^{g,\circ}(t, n) = b^a(t) - b^a(t) = 0$

erhalten wir

$$V^{ib}(t) = \int_t^n \exp\left(-\int_t^s (f(t, \tau) + \mu(x + \tau))d\tau\right) c(t, s) ds,$$

wobei

$$c(t, s) = (f(t, s) - r^*(s))V^*(t, s) + (\mu^*(x + s) - \mu(x + s))R^*(t, s).$$

- Preise, die jede Arbitrage-Möglichkeit ausschließen
- No-Arbitrage Prinzip
- Preise der gehandelten *assets* werden so bestimmt, dass keine Risikofreien Gewinne entstehen

S^0 und S^1 sind gehandelte *assets*

$$S^0(0) = S^1(0)$$

$$S^0(T) \geq S^1(T) \text{ und } P(S^0(T) > S^1(T)) > 0$$

Zeit 0: Kauf einer Einheit von *asset 0* und Verkauf einer Einheit von *asset 1*

$$\text{Zeit } T: \text{Gewinn } V = S^0(T) - S^1(T) \geq 0$$

Aufgrund der obigen Annahmen ist $P(V \geq 0) = 1$ und $P(V > 0) > 0$

Zur Zeit T erhalten wir $V \geq 0$, ohne etwas zur Zeit 0 gekauft zu haben

$S^0(t)$ und $S^1(t)$ sind die Preise der gehandelten *assets* zur Zeit t
($S^0(u), S^1(u)$), die Preise zur Zeit u sind vor dem Zeitpunkt u
nicht bekannt

$S^i = (S^i(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ ist der Preis für den *asset* i (stochastischer
Prozess)

$\mathbf{F} = (\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ ist das, was zur Zeit t bekannt ist (Filtration)

Wenn der Preis des *asset* i zur Zeit t ein Teil der Information $\mathcal{F}(t)$
ist, heißt S^i adaptiert

$$S^0(t) = (1 + i(1)) \cdots (1 + i(t))$$

S^0 ist die Entwicklung eines Sparkontos mit periodischen Zinsen $i(t)$ für $(t - 1, t]$

Den Prozess S^0 legen wir als Diskontierungsfaktor fest und führen weiters den *discounted price process* X und X^0 ein:

$$X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)} \quad \text{and} \quad X^0(t) = \frac{S^0(t)}{S^0(t)} = 1.$$

zweidimensionaler Prozess $h = (h^0, h^1)$

$h^1(t)$ ist zur Zeit $t - 1$ bekannt (vorhersehbar)

$h^0(t)$ ist zur Zeit t bekannt (adaptiert)

Diese *assets* sind ein Teil des Investitionsportfolios von $t - 1$ bis t

$h(t) = (h^0(t), h^1(t))$ nennt man das Portfolio zur Zeit t

Das Portfolio des Versicherungsunternehmens zur Zeit $t - 1$ ist

$$h(t - 1) = (h^0(t - 1), h^1(t - 1))$$

Also $h^1(t - 1)$ Nullkuponanleihen und ein Guthaben auf dem Sparkonto mit Wert $h^0(t - 1)S^0(t - 1)$

Der diskontierte Wert des Portfolios $h(t-1)$ zur Zeit $t-1$ ist

$$\begin{aligned}V(t-1, h) &= S^0(t-1)^{-1}(h^1(t-1)S^1(t-1) \\ &+ h^0(t-1)S^0(t-1)) \\ &= h^1(t-1)X(t-1) + h^0(t-1)\end{aligned}$$

Der Prozess $(V(t, h))_{t \in \{0, 1, \dots, T\}}$ wird auch der (diskontierte) *value process* genannt.

Dieser Prozess kann für die Konstruktion von Risiko-minimierenden Strategien eingesetzt werden

Wir betrachten das Intervall $(t - 1, t]$, sofort nach dem Zeitpunkt $t - 1$, wird das Portfolio $h(t - 1)$ angepasst, sodass der Hedger nun $h^1(t)$ Anleihen besitzt, indem man zusätzliche $h^1(t) - h^1(t - 1)$ Anleihen kauft

Diskontierte Kosten

$$(h^1(t) - h^1(t - 1))X(t - 1)$$

Das neue Portfolio $(h^0(t), h^1(t - 1))$ wird bis zur Zeit t besitzt, wenn neue Preise $(S^0(t), S^1(t))$ erscheinen und daher der Hedger den folgenden diskontierten Gewinn erhält

$$h^1(t)(X(t) - X(t - 1))$$

Schließlich entscheidet der Hedger das Guthaben des Sparkontos von $h^0(t-1)S^0(t)$ auf $h^0(t)S^0(t)$ zu ändern

Zusätzliche diskontierte Kosten $h^0(t) - h^0(t-1)$

Also kann die Änderung im Wert des Investitionsportfolios folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} V(t, h) - V(t-1, h) &= (h^1(t) - h^1(t-1))X(t-1) \\ &+ h^1(t)(X(t) - X(t-1)) + (h^0(t) - h^0(t-1)) \end{aligned}$$

cost process

$$C(t, h) = V(t, h) - \sum_{s=1}^t h^1(s) \Delta X(s),$$

wobei $\Delta X(s) = X(s) - X(s - 1)$ ist.

Der *cost process* ist definiert als Wert der Strategie, verringert durch das Handeln von Gewinnen

Die Veränderung im *value process* wird durch das Handeln von Gewinnen erzeugt

$$V(t, h) = V(0, h) + \sum_{s=1}^t h^1(s) \Delta X(s),$$

für alle t .

Der *cost process* ist konstant und gleich $V(0, h)$

Arbitrage ist eine Selbstfinanzierungsstrategie h , sodass

$$V(0, h) = 0, \quad P(V(T, h) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad P(V(T, h) > 0) > 0$$

Wir nehmen an, dass die Veränderung bei einem Kassakurs während eines kleinen Zeitintervalls $(t, t + \Delta t]$ wie folgt approximiert werden kann:

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \Delta r(t) \approx v(t, r(t))\Delta t + \sigma(t, r(t))\Delta \bar{W}(t)$$

wobei $\Delta \bar{W}(t) = \bar{W}(t + \Delta t) - \bar{W}(t)$ ist und v und σ bekannte Funktionen

\bar{W} ist eine Brown'sche Bewegung

Um zu zeigen, dass die Gleichung wirklich nur für sehr kleine Zeitintervalle gültig ist

$$dr(t) = v(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}(t)$$

Diese Gleichung können wir integrieren und erhalten

$$r(t) = r(0) + \int_0^t v(s, r(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, r(s)) d\bar{W}(s)$$

Das Sparkonto S^0 ist definiert, indem man $S^0(0) = 1$ und $dS^0(t) = r(t)S^0(t)dt$ zulässt. Dann ist

$$S^0(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau) d\tau\right)$$

$\mathcal{F}(t)$ ist die Information, die zur Zeit t verfügbar ist.

$$\mathcal{F}(t) = \sigma\{\bar{W}(u), u \leq t\}$$

Wir betrachten das Martingalmaß Q und nehmen an, dass

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

wobei v durch μ ersetzt wurde und W eine Brown'sche Bewegung unter Q ist. Mit dem Martingalmaß Q ist der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t mit Fälligkeit T gegeben durch

$$P(t, T) = E^Q \left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)} | \mathcal{F}(t) \right] = E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau) d\tau\right) | \mathcal{F}(t) \right]$$

Einige klassische Beispiele von Zinssatz-Modellen sind

Das Vasiček Modell

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

Das Cox-Ingersoll-Ross Modell

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Diese zwei Modelle sind Beispiele für sogenannte affine Modelle.

Ein Zinssatz-Modell ist affin, wenn

$$\begin{aligned}\mu(t, r(t)) &= \alpha(t)r(t) + \beta(t) \text{ und} \\ \sigma(t, r(t)) &= \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)},\end{aligned}$$

wobei α, β, γ und δ bekannte Funktionen sind.

Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T ist:

$$\begin{aligned}P(t, T) &= E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right)\middle|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= \exp(A(t, T) - B(t, T)r(t))\end{aligned}$$

A und B lösen folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, T) + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)(B(t, T))^2 = -1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, T) = \beta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)(B(t, T))^2,$$

mit $B(T, T) = A(T, T) = 0$

Der sofortige Terminzins ist

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log(P(t, T)) = r(t) \frac{\partial}{\partial T} B(t, T) - \frac{\partial}{\partial T} A(t, T).$$

Mit dem vorigen Modell bekommen wir folgendes:

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T - t))),$$
$$A(t, T) = \frac{(B(t, T) - T + t)(ab - (\frac{1}{2})\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2(B(t, T))^2}{4a}$$

Die Terminzinsen zur Zeit t erhält man

$$f(t, T) = r(t)e^{-a(T-t)} + \left(\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(1 - e^{-a(T-t)})$$
$$+ e^{-a(T-t)} \frac{2\sigma^2 B(t, T)}{4a}.$$

Da $e^{-a(T-t)} \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$, sehen wir, dass $B(t, T) \rightarrow \frac{1}{a}$.

Dies zeigt, dass die Terminzinsen aus der obigen Gleichung gegen

$$\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

konvergiert.

Das Vasiček Modell lässt negative Zinssätze zu

Ebenso werden auch die Terminzinsen negativ, dies ist für große Werte von σ sehr wahrscheinlich

Mit dem Modell erhalten wir

$$B(t, T) = \frac{2(\exp(\xi(T-t))-1)}{(\xi+a)(\exp(\xi(T-t))-1)+2\xi},$$

$$A(t, T) = \frac{2ab}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\xi \exp((a+\xi)\frac{T-t}{2})}{(\xi+a)(\exp(\xi(T-t))-1)+2\xi} \right),$$

wobei $\xi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$

Die Terminzinsen können wieder durch die obige Gleichung für $f(t, T)$ bestimmt werden