Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung
(Abwicklungsdreiecke)

Christina Pommer

10.12.2008

Problemstellung

- zeitliche Differenz zwischen Schadeneintritt und vollständiger Regulierung
- Schaden muss gemeldet und überprüft werden
- Abwicklung nimmt Zeit in Anspruch (z.B. für Reparaturen)

Haftpflichtversicherungen stark betroffen, da

1. Späte Manifestation
   Schaden wird erst lange Zeit nach Verursachung nur unter bestimmten Gegebenheiten bemerkt, z.B.
   - Fehler eines Architekten, die bei besonderer Belastung des Bauwerks bemerkbar werden
   - Fehler eines Notars, die bei Testamenteröffnung auftreten
2. Lange Regulierungsdauer
   kann lange Zeit dauern bis endgültige Schadenhöhe bekannt ist, z.B. wenn sie von Gerichtsprozess oder ärztlichem Gutachten abhängig ist

Schadenarten:

- Schäden nach Nummer 1
  sind schon verursacht bzw. eingetreten, dem Versicherer aber noch nicht bekannt
  = IBNR – Schäden (IBNR= incurred but not reported)
- Schäden nach Nummer 2
  sind dem Versicherer gemeldet, aber noch nicht vollständig reguliert
  = IBNER – Schäden (IBNER= incurred but not enough reserved)

Schadenhöhe zum Ende einer Abrechungsperiode noch nicht vollständig bekannt
$\Rightarrow$ Versicherer muss Schadenreserve bilden

- Ziel: möglichst genaue Schätzung der Schadenreserve
- wichtig für Erstellung der Rechnungslegung und Prämienkalkulation
- Rückversicherer bei Schadenexzedentenrückversicherungsverträgen stark betroffen
  (Rückversicherer übernimmt den Teil der Schadenhöhe, der Priorität übersteigt)
  Erstversicherer ist oft nicht bekannt, ob Schadenhöhe Priorität übersteigt
  $\Rightarrow$ für den Rückversicherer sind auch dies IBNR – Schäden

mathematische Verfahren

- in den letzten Jahren wurden einige mathematische Verfahren entwickelt
- alle versuchen Erfahrungen und Informationen früherer Schadeneintrittsjahre auf spätere zu übertragen
- können jedoch wegen Trend- oder Strukturänderungen versagen

$\Rightarrow$ Wir nehmen deshalb an, dass im Verlauf der betrachteten Jahre keine Trend- oder Strukturbrüche stattfinden.

Das Abwicklungsdreieck

S_{11}	S_{12}	$\dots$	S_{1k}	$\dots$	$S_{1,I+1-i}$	$\dots$	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
S_{21}	S_{22}	$\dots$	S_{2k}	$\dots$	$S_{2,I+1-i}$	$\dots$	$S_{2,I-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$			
S_{i1}	S_{i2}	$\dots$	S_{ik}	$\dots$	$S_{i,I+1-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$					
$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	$\dots$	$S_{I+1-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$							
$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
S_{I1}								

Tabelle 1: Das Abwicklungsdreieck

Zeilen: Anfalljahre

Spalten: Abwicklungsjahre

- den meisten Verfahren liegt das Abwicklungsdreieck zu Grunde:
- $S_{ik},\ 1 \leq i \leq I,\ k = 1, 2, \ldots,$: der im Abwicklungsjahr k aufgewendete Betrag für im Anfalljahr i eingetretene Schäden
- $k = 1$: 1. Abwicklungsjahr = Anfalljahr
- $k = 2$: 2. Abwicklungsjahr = das dem Anfalljahr folgende Kalenderjahr, usw.

- $i = I$: jüngste Anfalljahr = das dem aktuellen Jahr vorangehende Jahr
- $i = 1$: am längsten zurückliegende Jahr, es sind bereits $k = I$ Abwicklungsschritte bekannt
- das erste Anfalljahr wird wenn möglich so gewählt, dass es nach fachmännischer Einschätzung nahezu vollständig abgewickelt ist, d.h. die Beträge $S_{1,I+1}$, $S_{1,I+2}, \ldots$ der künftigen Abwicklungsjahre sind alle gleich Null

- im Abwicklungsdreieck sind nur die Beträge S_{ik} mit $i + k \leq I + 1$ bekannt
- die Parallelen zur Hypotenuse entsprechen den einzelnen Kalenderjahren
- nach einem kurzen Anstieg zu Beginn der Schadenabwicklung nehmen die Beträge S_{ik} für jedes Anfalljahr i mit wachsendem k tendenziell ab und werden schlussendlich gleich Null sein
- oft steht an einer Stelle (i, k) der kumulierte Schadenstand $C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{ik}$
  Zuwächse: $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ mit $C_{i0} = 0$

- Gesamtschaden für Anfalljahr i: $S_{i+} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{iI}$ (unter der Annahme, dass nach I Abwicklungsjahren alle Schäden vollständig reguliert sind)
- bekannt ist nur $S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{i,I+1-i}$
- Ziel ist, den unbekannten Teil $R_i := S_{i,I+2-i} + S_{i,I+3-i} + \ldots + S_{iI}$ zu schätzen

Schätzgenauigkeit

- die zu schätzende Spätschadenreserve ist eine Zufallsvariable
- Angabe über die Genauigkeit der Schätzung wichtig
- verwenden später die bedingte mittlere quadratische Abweichung

Das Chain- Ladder- Verfahren

- eines der ältesten und bekanntesten Verfahren, spielt heute noch eine zentrale Rolle
- verteilungsfrei
- wir lassen für jedes Anfalljahr i einen individuellen Erwartungswert der Reserve zu

Darstellung des Endschadens

Wir schreiben den Endschaden des Anfalljahres i

$$C_{iI} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{iI}$$

in der multiplikativen Form

$$C_{iI} = C_{i1} \cdot F_{i1} \cdot F_{i2} \cdot \ldots \cdot F_{i,I-1},$$

wobei

$$F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

die multiplikative Zunahme des akkumulierten Schadenstandes C_{ik} von Abwicklungsjahr k zu Abwicklungsjahr k+1 ist.

- Annahme: Aufteilung des Endschadens auf die einzelnen Abwicklungsjahre ist im Schnitt für jedes Anfalljahr gleich
- d.h. Zufallsvariablen F_{ik} haben einen vom Anfalljahr i unabhängigen Erwartungswert

$$\mathbb{E}(F_{ik}) = f_k \qquad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1$$

- f_k geben die durchschnittliche Steigerung des Schadenstands von Abwicklungsjahr k auf Abwicklungsjahr k+1 an
- werden mittels des C_{ik}- gewichteten arithmetischen Mittels geschätzt

Schätzer für f_k

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \qquad 1 \leq k \leq I-1$$

Schätzer für Endschaden C_{iI}

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I$$

Schätzer für Reserve $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$$

Schätzer für Gesamtreserve R

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$$

Beispiel

Bekannt sind die kumulierten Beträge C_{ik} für $i + k \leq I + 1$, wobei die Zeilen die Anfalljahre und die Spalten die Abwicklungsjahre darstellen.

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4
2000	100	130	145	150
2001	105	136	151	
2002	109	142		
2003	114			
$\hat{f}_k$	1,299	1,113	1,034	

Wir berechnen die Übergangsfaktoren: $\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}$

Beispiel

Um die fehlenden Beträge $\hat{C}_{i,k+1}$ für $i+k > I+1$ zu berechnen, multiplizieren wir C_{ik} mit $\hat{f}_k$ und erhalten:

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4
2000	100	130	145	150
2001	105	136	151	156
2002	109	142	158	163
2003	114	148	165	171
$\hat{f}_k$	1,299	1,113	1,034	

Beispiel

Schneller erhält man die Endschäden mit
$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}$ für $2 \leq i \leq I$, womit schlussendlich die eigentliche Reserve bestimmt werden kann durch

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1):$$

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Reserve
2000	100	130	145	150	0
2001	105	136	151	156	5
2002	109	142	158	163	21
2003	114	148	165	171	57

Modellannahmen

Prognose beruht nur auf dem aktuellen Schadenstand $C_{i,I+1-i}$ des Anfalljahres i, vergangene Schadenstände $C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i}$ werden nicht berücksichtigt

1. Modellannahme

(CL1) Es gibt Abwicklungsfaktoren $f_1, \ldots, f_{I-1}$ mit

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}\,|C_{i1}, \ldots, C_{ik}\right) = f_k,\ 1 \leq i \leq I,\ 1 \leq k \leq I{-}1,\ \text{für } C_{ik} > 0$$

oder gleichbedeutend $\mathbb{E}(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik} f_k$.

$\Rightarrow$ der bedingte Erwartungswert von $C_{i,k+1}$ hängt nur von C_{ik} ab, $C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}$ verbessern den Informationsgehalt nicht

2. Modellannahme

(CL2) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \ldots, C_{iI}\}, \quad 1 \le i \le I,$ sind global unabhängig.

Satz

Unter den Annahmen CL1 und CL2 gilt

$$\mathbb{E}(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}\,, \quad 2 \leq i \leq I.$$

Beweis siehe T. Mack

$\Rightarrow$ die Chain- Ladder- Projektion basiert tatsächlich auf dem Modell aus CL1 und CL2

Satz

Unter den Annahmen CL1 und CL2 sind die berechneten Schätzer $\hat{f}_k$ erwartungstreu und unkorreliert mit

$$\mathbb{E}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}.$$

Beweis siehe T. Mack

Sensitivität

es gibt zwei heikle Stellen im Abwicklungsdreieck:

- rechte obere Eck: f_{I-1} hängt nur von einem Beobachtungswert ab (S_{1I}), wird aber auf alle anderen Anfalljahre übertragen
- linke untere Eck: C_{I1} beruht nur auf Daten aus einem Beobachtungsjahr, oft sagt dieser Wert selbst am Ende eines Jahres noch wenig aus,
  der Reserveschätzer beruht nur auf dem einen Wert
  Extremfall: $C_{I1} = 0 \;\Rightarrow$ ganze Reserve wird zu Null geschätzt

es ist möglich, ein unplausibles C_{I1} zu korrigieren, indem man es durch den Durchschnitt aller bisher beobachteten Anfalljahre ersetzt:

$$v_I \sum_{i=1}^{I} C_{i1} \,/ \sum_{i=1}^{I} v_i,$$

wobei v_i das Volumen (d.h. die Anzahl der Risiken bzw. deren Gesamtversicherungssumme oder das Prämienvolumen) von Anfalljahr i ist

Bem. Sind mehrere der Erstjahresstände C_{i1} ebenfalls unplausibel, kann man sie durch Rückwärtsprojektion aus den jeweils aktuellen Schadenständen schätzen

Schätzung der Genauigkeit

- Ziel: die Spätschadenreserve R_i für Anfalljahr i möglichst gut durch einen Schätzer $\hat{R}_i$ zu prognostizieren

mittlere quadratische Fehler

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 \,|D)$$

zwischen Schätzer und Prognoseziel, gegeben die Daten des Abwicklungsdreiecks

$$D = \{C_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes bzw. dessen Verallgemeinerung auf bedingte Erwartungswerte erhalten wir:

$$mse(\hat{C}_{iI}) = \underbrace{Var(C_{iI}|D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI})^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

Ziel: diese zwei Komponenten zu schätzen
Bem. wegen $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ und $\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$ gilt

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2|D) = \mathbb{E}((C_{iI} - \hat{C}_{iI})^2|D) = mse(\hat{C}_{iI})$$

3. Modellannahme

(CL3) Es gibt Proportionalitätskonstanten $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{I-1}^2$ mit

$$Var\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}},$$

$1 \leq i \leq I, \;\; 1 \leq k \leq I-1, \;$ für $\; C_{ik} > 0$

oder gleichbedeutend $Var(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik} \; \sigma_k^2.$

Schätzer für σ_k^2

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{j\,k} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{j\,k}} - \hat{f}_k \right)^2, \qquad 1 \leq k \leq I-2$$

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = min \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2} \, , \; \hat{\sigma}_{I-3}^2 \right)$$

Unter den Annahmen (CL1), (CL2) und (CL3) gilt:

Schätzer für $mse(\hat{R}_i)$

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

Bem. Der Standardfehler $s.e.(\hat{R}_i)$ ist die Quadratwurzel des Schätzers $mse(\hat{R}_i)$.

Schätzer für $mse(\hat{R})$

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^{I} \left((s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{iI} \left(\sum_{j=i+1}^{I} \hat{C}_{jI} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\,\hat{\sigma}_k^2/\hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right)$$

Beispiel

die Faktoren $\hat{f}_k$ und die Reserven $\hat{R}_i$ wurden wie im vorigen Beispiel berechnet

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	$\hat{R}_i$
2000	4370	6293	10292	12460	13660	14307	0
2001	2701	5291	7162	8945	9338	9780	442
2002	4483	6729	10074	11142	11971	12538	1396
2003	3254	5804	8351	9874	10608	11111	2760
2004	8010	12118	18028	21315	22901	23986	11868
2005	5582	8864	13187	15592	16752	17546	11964
$\hat{f}_k$	1,588	1,488	1,182	1,074	1,047		
$\hat{R}$							28430

Beispiel

Berechnung der Schätzgenauigkeit: wir ermitteln zunächst $\hat{\sigma}_k$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{j\,k} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{j\,k}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-2$$

und

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = min \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2} \, , \, \hat{\sigma}_{I-3}^2 \right)$$

$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$
12,95	9,073	7,025	3,779	2,033

Beispiel

um nun $s.e.(\hat{R}_i)$ mittels

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

zu berechnen:

$s.e.(\hat{R}_2)$	$s.e.(\hat{R}_3)$	$s.e.(\hat{R}_4)$	$s.e.(\hat{R}_5)$	$s.e.(\hat{R}_6)$
255	599	992	2332	2851

$\hat{R}_2$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_6$
0	442	1396	11868	11964

mittlere quadratische Fehler der Gesamtreserve $\hat{R}$:

$$s.e.(\hat{R}) = 4639$$

wobei $\hat{R} = 28430$

Kreuzklassifiziertes Modell

(CL1) $\mathbb{E}(C_{i,k+1} \,|\, C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik}\, f_k,\ 1 \leq i \leq I,\ 1 \leq k \leq I-1$
Erwartungswert- Operator anwenden und Regel über iterierte Erwartungswerte benutzen $\rightarrow$ sehen, dass das Chain- Ladder- Verfahren ein Spezialfall einer Modellklasse ist, für die

(A) $\mathbb{E}(C_{i,k+1}) = \mathbb{E}(C_{ik})\, f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1$
mit unbekannten positiven Parametern $f_1, \ldots, f_{I-1}$ gilt.

Satz

Jedes Modell, für das (A) gilt, erfüllt auch
(B) $\mathbb{E}(S_{ik}) = x_i\ y_k, \qquad 1 \leq i, \quad k \leq I,$
mit unbekannten Parametern $x_i,\ y_i > 0$ mit $y_1 + \ldots + y_I = 1$.
Umgekehrt ist auch jedes Modell der Art (B) ein Modell der Art (A).

- Ziel: Parameter $x_i,\ y_i$ zu schätzen
- erhalten mit $\hat{x}_i,\ \hat{y}_i$ auch Schätzer für die eigentlich interessanten Werte $\mathbb{E}(S_{ik}),\ i+k>I+1$
- nehmen die Unabhängigkeit aller S_{ik} und die Positivität $S_{ik}>0$ an
  (betrachten also nur Verteilungen, die auf der positiven reellen Achse definiert sind)

Bem. Im Vergleich zum Chain- Ladder- Verfahren sind diese Annahmen deutlich strenger, da wir dort nur die Unabhängigkeit der Anfalljahre vorausgesetzt und negative Zuwächse nicht ausgeschlossen haben.

ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren

Individuelles Modell für die Zufallsvariable S_{ik}

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{v_i} R_{ikn},$$

wobei für das Volumenmaß v_i die Polizzenzahl von Anfalljahr i benutzt wird
R_{ikn}: der von der n-ten Polizze stammende Änderungsbetrag, wird für die meisten Polizzen gleich Null sein

allgemeiner Ansatz

$$\mathbb{E}(R_{ikn}) = x_i \; y_k, \quad mit \quad Var(R_{ikn}) = \frac{(x_i \; y_k)^2}{\alpha}, \quad 1 \leq n \leq v_i$$

mit Formparameter $\alpha < 1$

Gammaverteilung mit...

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(S_{ik}) = v_i \; x_i \; y_k$$

und Varianz

$$Var(S_{ik}) = \frac{v_i \; (x_i \; y_k)^2}{\alpha}, \quad 1 \leq n \leq v_i$$

mit Formparameter $v_i \, \alpha$

weiteres Vorgehen

- Likelihoodfunktion aufstellen
- Likelihoodschätzer sind die Werte $\hat{x}_i, \hat{y}_k,$ die L maximieren
- erhalten sie durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen von L nach den Parametern
- Reserveschätzer

$$\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i \, \hat{x}_i \, \hat{y}_k$$

  und
- Endschaden

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i$$

  können berechnet werden

weitere Verfahren

- ein Verfahren mittles der Methode der kleinsten Quadrate, das auf der Lognormalverteilung aufbaut. Es ist das Basismodell einer verbreiteten Schadenreservierungs- Software (ICRFS von Ben Zehnwirth).
- ein auf der Inversen Gaußverteilung beruhendes Verfahren. Hier kann durch einen zusätzlichen Parameter ein Nachteil in der Varianzstruktur verbesser werden.
- ein Modell mit der Poissonverteilung, aus dem das Chain- Ladder- Verfahren hergeleitet werden kann.
- u.v.m

IBNR- und IBNER- Schäden

- bis jetzt IBNR- und IBNER- Schäden zusammengefasst
- zerlegen nun den Änderungsbetrag $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ des Schadenstands von Anfalljahr i

$$S_{ik} = T_{ik} + U_{ik}$$

- U_{ik} bezieht sich auf Schäden, die vor Abwicklungsjahr k noch nicht gemeldet waren (IBNR-Schäden)
- T_{ik} bezieht sich auf Schäden, die vor Abwicklungsjahr k schon gemeldet waren (IBNER-Schäden)
- es gilt $T_{i1} = 0$, d.h. $C_{i1} = S_{i1} = U_{i1}$

- Annahme: echte Spätschäden U_{ik} sowohl von $U_{i1}, \ldots, U_{i,k-1}$ als auch von $T_{i1}, \ldots, T_{i,k-1}$ unabhängig
- $\mathbb{E}(U_{ik}) = v_i\, m_k, \quad 1 \leq i,\ k \leq I,$
- unbedingter Erwartungswert von U_{ik}: hängt nur von Abwicklungsjahr k und dem bekannten Volumen v_i des Portefeuilles im Anfalljahr i ab
- $Var(U_{ik}) = v_i\, s_k^2, \quad 1 \leq i,\ k \leq I,$
  mit unbekannten Parametern m_k, s_k

- T_{ik} normalerweise unabhängig von U_{ik}, nicht aber von der vergangenen Schadenabwicklung
- alle hinter T_{ik} stehenden Einzelschäden bereits bekannt
- nehmen an, dass der Erwartungswert von T_{ik} von der Gesamthöhe aller noch offenen Schäden abhängt
- $\mathbb{E}(T_{ik} \,|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\, h_{k-1},$
- $Var(T_{ik} \,|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\, t^2_{k-1},$
  mit unbekannten Parametern h_k, t_k

Modell für C_{ik}

$$\mathbb{E}(C_{ik} \mid D_{i,k-1}) =$$

$$= \mathbb{E}(C_{i,k-1} + T_{ik} + U_{ik} \mid D_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\,(1 + h_{k-1}) + v_i\, m_k$$

$$\mathbb{E}(C_{ik}|D) = \mathbb{E}(C_{ik}|D_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{ik}|D_{i,k-1})|D_i) =$$

$$= v_i\, m_k \; + \mathbb{E}(C_{i,k-1}|D_i)(1 + h_{k-1})$$

mittlerer Endschaden

durch sukzessives Anwenden dieser Beziehung erhält man:

$$\mathbb{E}(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i}\; g_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot g_{I-1} \; + \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i\, m_k\, g_k \cdot \ldots \cdot g_{I-1}$$

mit $g_k = 1 + h_k$

Endschaden

durch Verwendung von Schätzern erhält man:

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i}\ \hat{g}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{g}_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i\, \hat{m}_k\, \hat{g}_k \cdot \ldots \cdot \hat{g}_{I-1}$$

Reserve R_i

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$$

Bem. Falls die Daten nur auf wenigen Schäden beruhen, kann die Trennung von IBNR- und IBNER- Schäden dazu führen, dass das Abwicklungsmuster der Daten schlechter zu erkennen ist als ohne Trennung.
Man sollte das Verfahren der Trennung jedoch auf jeden Fall anwenden, wenn die Datendetaillierung dies zulässt.

Kalenderjahreffekte

- bis jetzt: Annahme: Unbhängigkeit der Anfalljahre; ist jedoch problematisch
- jeder kalenderjahrweise wirkende Einfluss betrifft meist mehrere Anfalljahre zugleich
- z.B. Änderungen der Inflationsrate, der Reservierungs- und Regulierungspraxis, sowie in der Rechtsprechung
  $\Rightarrow$ Abwicklungsdreieck zu Beginn der Spätschadenreserveschätzung auf das Vorhandensein von solchen Kalenderjahreffekten untersuchen
- gegebenenfalls die Auswirkung des Effekts auf die Höhe der Schadenreserve durch Weglassen oder Glätten einzelner Daten eliminieren

Danke für eure Aufmerksamkeit