Riemann-Stieltjes-Integral

- Historische Bemerkung
- Wiederholung zum Riemann-Integral
- Riemann-Stieltjes-Integral
- Anwendungen
- Inperfektion des RS-Integrales

Historische Bemerkung

- Im Jahre 1894 einführte der holländische Mathematiker Thomas-Jean Stieltjes ein neues Integral $\int_a^b f dg$ in einer Arbeit über Kettenbrüche.

- Aber das Stieltjes-Integral fand zunächst wenig Bedeutung.

- Im Jahre 1909 löste der ungarische Mathematiker Friedrich Riesz ein wichtiges funktionalanalytisches Problem.

  In seinem berühmten Darstellungssatz zeigt er, dass jede stetige lineare Abbildung $L : C(I) \to \mathbb{R}$ als Stieltjes-Integral

  $$f \to L(f) = \int_a^b f(t)dg(t) \text{ mit } g \in BV(I)$$

  darstellbar ist.

Historische Bemerkung

- In der Folgezeit wird das Stieltjes-Integral, insbesondere im Lebesgueschen Sinne verallgemeinerten Fassung, zu einem wirkungsvollen Arbeitsmittel der Analysis und zum Vorreiter der allgemeinen Maß-und Integrationstheorie.

Riemann-Integral

- Oberes und unteres Integral
- Das Riemann-Integral
- Kriterien für Integrierbarkeit
- Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren
- Eigenschaften des Integrals
- Die Mittelwertsätze der Integralrechnung
- Integration von Funktionenfolgen und -reihen

Grundidee

Die Bestimmung des Flächeninhaltes von geometrischen Figuren in der Ebene gehört zu den ältesten und prominentesten Aufgabenstellungen der Mathematik.

Eine Vereinfachung und Formalisierung des Problems besteht darin, Flächen unter Graphen von reellen Funktionen zu berechnen. Dadurch gelangt man zu einem Integralbegriff.

Oberes und unteres Integral

$[a, b]$: ein kompaktes Intervall,
f: eine reelle Funktion,
F: die Fläche zwischen der x-Achse und $\Gamma(f)$,

Eine erste Eingrenzung von F erhält man durch

$$(b-a) \cdot \inf_{[a,b]} f \leq F \leq (b-a) \cdot \sup_{[a,b]} f.$$

Zur Verbesserung sucht man die Infimums-bzw. Supremumsbildung auf kleinere Intervalle zu reduzieren. Man zerlegt also das Intervall $[a, b]$.

Zerlegung und Verfeinerung

Eine **Zerlegung** $\mathcal{Z} = I_1, \ldots, I_p$ eines Intervalls $I = [a, b]$ ist eine Darstellung $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_p = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{p-1}, b]$ dieses Intervalls bei der die I_j durch Teilung von I an den Teilungspunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_{p-1}$ entstehen.

Entsteht eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ aus $\mathcal{Z}$ durch die Einführung zusätzlicher Teilungspunkte, so nennt man $\mathcal{Z}'$ eine **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$.

Obere-und Untersumme

Zu jeder Zerlegung $\mathcal{Z} = [a = t_0, t_1] \cup \cdots \cup [t_{p-1}, b = t_p]$ von $[a, b]$ erhält man die

Obersumme:

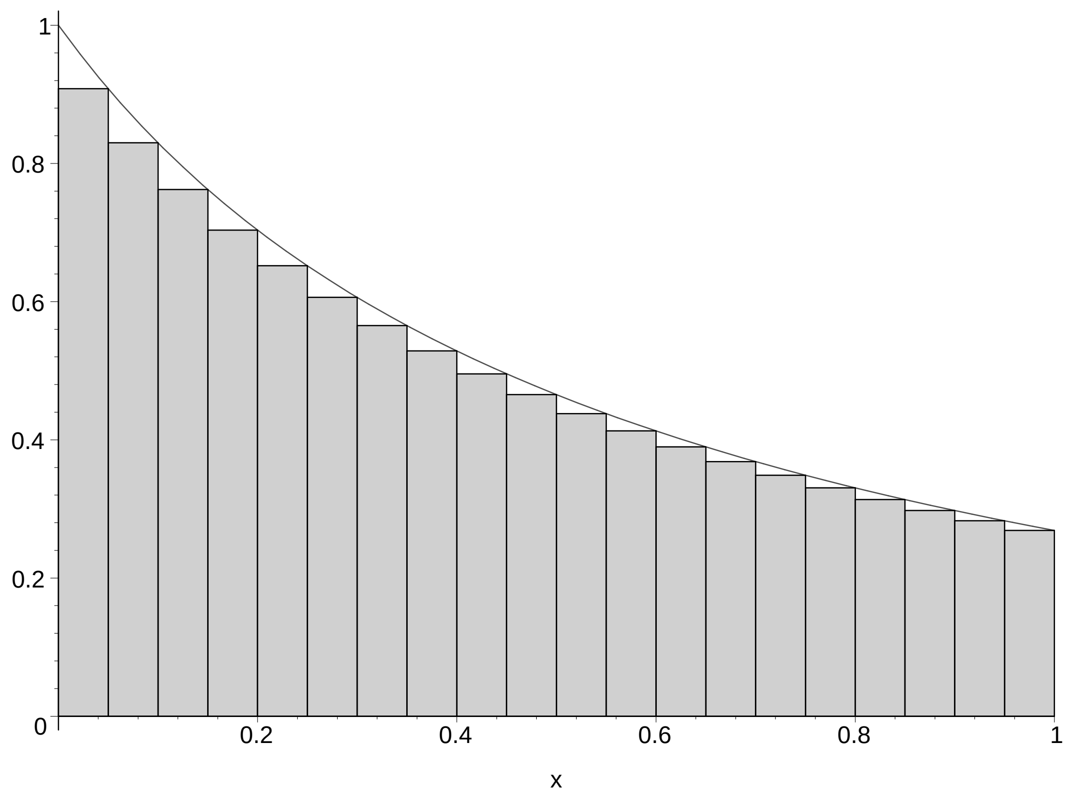
$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{p} (t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{I_j} f$$

Untersumme :

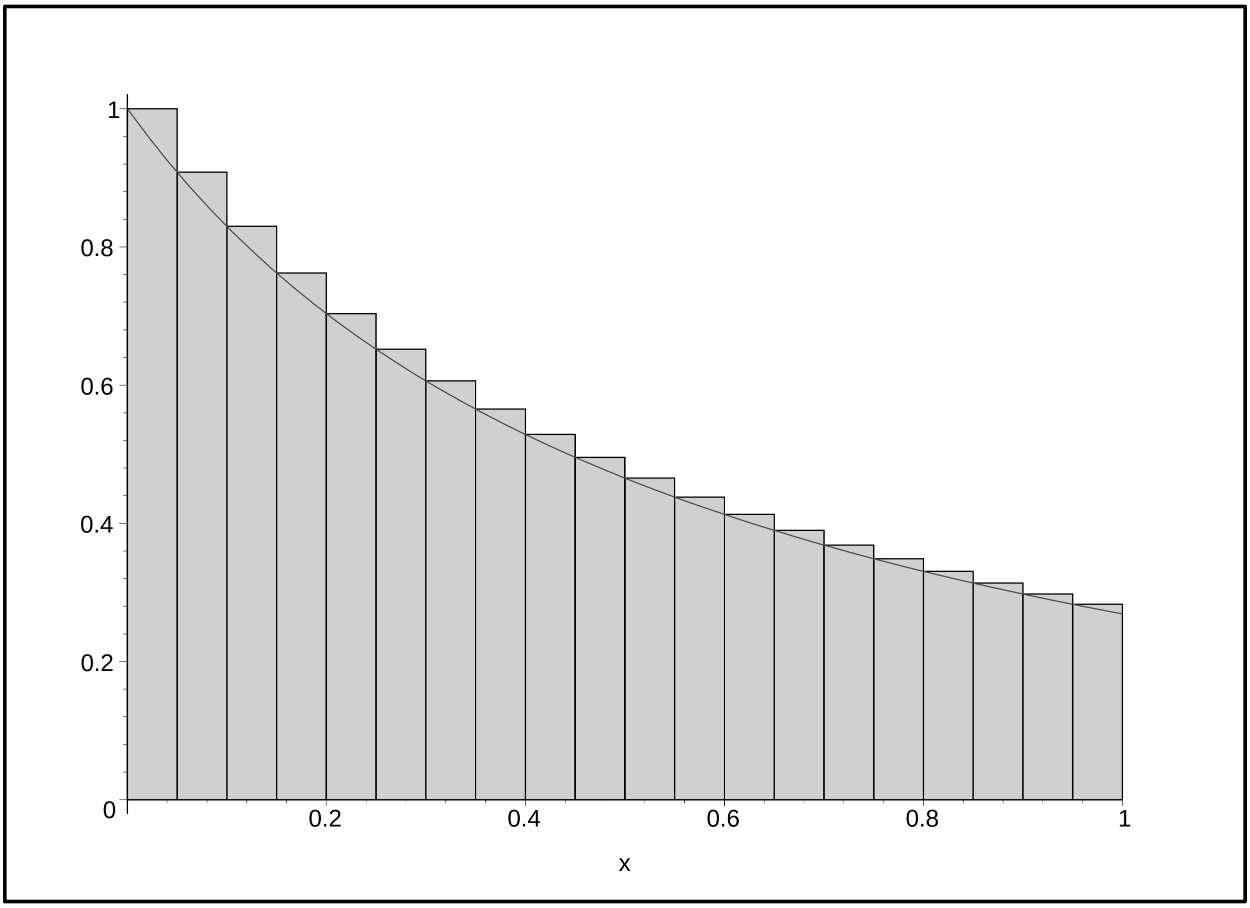
$$\underline{S}(f, \mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{p} (t_j - t_{j-1}) \cdot \inf_{I_j} f$$

Für auf I beschränktes f sind beide endlich.

Obere-und Untersumme



Obere-und Untersumme



Obere-und Untersumme

Ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt:

$$\underline{S}(f,\mathcal{Z}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{Z}') \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}') \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}).$$

Das heißt, die Obersumme fällt, die Untersumme wächst bei Verfeinerung. Und wir sehen, dass Untersummen niemals größer als Obersummen: $\underline{S}(f,\mathcal{Z}_1) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}_2)$ für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ von I.

Unteres und Oberes Integral

Damit erhält man, dass der F zuzuordnende Wert zwischen dem von Darboux eingeführten

unteren Integral:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathcal{Z}} \underline{S}(f, \mathcal{Z})$$

und

oberen Integral :

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathcal{Z}} \overline{S}(f, \mathcal{Z})$$

von f über $[a, b]$ liegen muss. a und b heißen die **Integrationsgrenzen**, f heißt der **Integrand**.

Unteres und Oberes Integral

Man definiert die **Feinheit** $|\mathcal{Z}|$ als das Maximum der Längen der zu $\mathcal{Z}$ gehörigen Teilintervalle von I.

Für jede auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f gilt:

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} \overline{S}(f, \mathcal{Z})$$

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} \underline{S}(f, \mathcal{Z})$$

Man kann daher das obere bzw. untere Integral von f über $[a, b]$ berechnen als Limes der Ober- bzw. Untersummen von f zu den Zerlegungen einer einzigen Folge $\mathcal{Z}_k$ von Zerlegungen von I mit $\lim_{k\to\infty} |\mathcal{Z}_k| = 0$.

Das Riemann-Integral

Riemann verwendete zur Approximation von F Funktionswerte von f anstelle der Suprema und Infima:

Ist $\mathcal{Z} = I_1, \ldots, I_p$ eine Zerlegung von I, so nennt man jede Auswahl $B = b_1, \ldots, b_p$ von Punkten $b_j \in I_j$ eine **zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ gehörige Belegung von I**. Damit erhält man die **Riemann-Summe**

$$S(f, \mathcal{Z}, B) = \sum_{j=1}^{p} (t_j - t_{j-1}) \cdot f(b_j)$$

von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ und Belegung B.

Das Riemann-Integral

Existiert bei beliebiger Wahl der zur jeweiligen Zerlegung $\mathcal{Z}$ gehörigen Belegung B der Grenzwert

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} S(f, \mathcal{Z}, B)$$

in $\mathbb{R}$ und ist er für alle Belegungen gleich, so nennt man diesen Grenzwert das **Riemann-Integral von f über** $[a, b]$; symbolisch:

$$\int_a^b f(x)dx$$

oder kurz $\int_a^b f$.

Existiert $\int_a^b f(x)dx$, so nennt man f über $[a, b]$ **Riemann-integrierbar**.

Riemann-Integral

satz
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn

- f auf [a,b] beschränkt ist und
- das obere und das untere Integral von f über $[a, b]$ gleich sind, oder gleichbedeutend:

$$\inf_{\mathcal{Z}}(\overline{S}(f, \mathcal{Z}) - \underline{S}(f, \mathcal{Z})) = 0$$

oder

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0}(\overline{S}(f, \mathcal{Z}) - \underline{S}(f, \mathcal{Z})) = 0$$

Es gilt dann:

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f.$$

Riemann-Integral

Satz
Ist f über $[a, c]$ und über $[c, b]$ integrierbar ($a < c < b$), so auch über $[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Kriterien für Integrierbarkeit

satz

Jede auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

satz

Das Abändern endlich vieler Werte einer Funktion f auf $[a, b]$ ändert nichts an deren Integrierbarkeit. Der Wert des Integrals bleibt ungeändert.

lemma

Jede Funktion f, die auf $[a, b]$ mit Ausnahme von endlich vielen Sprungstellen stetig ist, ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Kriterien für Integrierbarkeit

Lebesgue-Nullmenge

Eine Teilmenge N von $\mathbb{R}$ heißt **Lebesgue-Nullmenge**, wenn sie für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ durch höchstens abzählbar viele offene Intervalle I_n^ε mit Gesamtlänge $\sum_{n=1}^{k/\infty} l(I_n^\varepsilon) < \varepsilon$ überdeckt werden kann.

satz

Eine auf $[a,b]$ definierte reelle Funktion f ist genau dann über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, wenn

- f auf $[a,b]$ beschränkt ist und
- die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in $[a,b]$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, das heißt, dass f auf $[a,b]$ fast überall stetig ist.

Kriterien für Integrierbarkeit

lemma
Jede auf $[a, b]$ beschränkte Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Speziell ist also jede auf $[a, b]$ monotone Funktion über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

lemma
Sind f und g über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und auf $[a, b]$ fast überall gleich, so gilt:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Für nichtnegative, über $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktionen f gilt sogar:

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{fast überall auf}\, [a, b].$$

Differenzieren VS. Integeren

unbestimmtes Integral Für eine reelle Funktion f und jedes $c \in D(f)$ nennt man die Abbildung

$$x \to \int_c^x f(t)dt$$

ein **unbestimmtes Integral** von f.

Stammfunktion
Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f auf $M \subseteq D(f) \cap D(F)$,wenn für alle $x \in M$ gilt: $F'(x) = f(x)$.

Differenzieren VS. Integeren

Eigenschaften

Jedes unbestimmte Integral $\int_d^x f$ von f hat unabhängig vom Startpunkt $d \in I$ denselben maximalen Definitionsbereich. Je 2 derartige unbestimmte Integrale mit Startpunkten d_1 und d_2 unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante $\int_{d_2}^{d_1} f$.

Jedes unbestimmte Integral ist auf seinem maximalen Definitionsbereich stetig.

Jedes unbestimmte Integral ist an jeder Stetigkeitsstelle x des Integranden f differenzierbar; es gilt dort:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x).$$

Differenzieren VS. Integeren

Der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung

Hat die Funktion f auf einem Intervall I eine Stammfunktion F und existieren dort die unbestimmten Integrale von f, so gilt für jedes von ihnen:

$$\int_c^x f(t)dt = F(x) - F(c).$$

Im Fall der Existenz einer Stammfunktion F von f gilt also auch an den Unstetigkeitsstellen von f:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = F'(x) = f(x),$$

das heißt: existieren auf I eine Stammfunktion F von f und die unbestimmten Integrale von f, so ist jedes von ihnen eine Stammfunktion.

Differenzieren VS. Integeren

lemma

Stammfunktionen sind stets nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Im Fall $F' = f$ gilt:

$$\int f = F + c.$$

Eigenschaften des Integrals

Im Fall der Existenz der entsprechenden Integrale bzw. Stammfunktionen gilt:

1.
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

2.
$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

3.
$$f \leq g \text{ auf } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4.
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Rechenregeln

partielle Integration

Sind f und g auf $[a,b]$ differenzierbar,
hat $f'g$ und fg' über $[a,b]$ Riemann-integrierbar,
so gilt:

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b (fg')(x)dx$$

Substitutionsregel

Ist φ eine differenzierbare Fuinktion, die $[a,b]$ auf $[\alpha,\beta]$ abbildet, so gilt:
Hat f auf $[\alpha,\beta]$ eine Stammfunktion oder ist $\varphi' \geq 0$(bzw.≤ 0) auf $[a,b]$, also φ dort monoton, so gilt:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du$$

falls beide Integrale existieren.

Mittelwertsätze

1.Mittelwertsatz
Sind f und g über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und ist $g \geq 0$ auf $[a,b]$,so gibt es eine Zahl α mit $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$, für die gilt:

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx;$$

ist f auf $[a,b]$ stetig, so gilt $\alpha = f(c)$ für ein $c \in [a,b]$ und es ist

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

lemma
Ist f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so gibt es eine Zahl α mit $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$, für die gilt:

$$\int_a^b f(x) = \alpha(b-a).$$

Ist f auf $[a,b]$ stetig, so gilt $\alpha = f(c)$ für ein $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

$\boxed{\text{Mittelwertsätze}}$

2.Mittelwertsatz Ist f über [a,b] Riemann-integrierbar und g auf $[a,b]$ monoton, so folgt:

$$\int_a^b (fg)(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

für passendes $c \in [a,b]$.

Funktionfolgen und -reihen

Satz

Ist $\{f_n\}$ eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Folge über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Satz

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Reihe Riemann-integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Reihe über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Fazit

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf gliedweise integriert werden, d.h. darf man Limes und Integral vertauschen.

Riemann-Stietjes-Integral

1. Definition des Integrals

2. Existenz des Integrals

3. Eigenschaften

4. Mittelwertsätze

Grundidee

Bei der Konstruktion des Riemann-Integrals über Unter- bzw. Ober bzw. Riemann-Summen werden Infima bzw. Suprema bzw. Funktionswerte des Integranden durch die Länge des entsprechenden Zerlegungsintervalls gewichtet.

Nun sollen auch andere Gewichtungen betrachtet werden: man denke etwas bei einer Bewegung an eine Gewichtung durch die zurückgelegte Strecke anstelle der Länge des Zeitintervalls.

Definition

Seien f und g: $[a, b] \to L$ beschränkte Funktionen

sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit der Teilungspunkten: $a = t_0, t_1, \ldots, t_{p(\mathcal{Z})} = b$

sei $B = \{b_1, \ldots, b_{p(\mathcal{Z})}\}$ die zugehörige Belegung.

Dann heißen:

Definition

die **Stieltjes-Untersumme** von f bezüglich g zur Zerlegung $\mathcal{Z}$

$$\underline{\sigma}(f, \mathcal{Z}, g) = \sum_{j=1}^{p(\mathcal{Z})} \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot (g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

die **Stieltjes-Obersumme** von f bezüglich g zur Zerlegung $\mathcal{Z}$

$$\overline{\sigma}(f, \mathcal{Z}, g) = \sum_{j=1}^{p(\mathcal{Z})} \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot (g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

die **Riemann-Stieltjes-Summe** von f bezüglich g zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ und zur Beleung B

$$\sigma(f, \mathcal{Z}, B, g) = \sum_{j=1}^{p(\mathcal{Z})} f(b_j) \cdot (g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

Definition

Aufpassen

Für nicht monoton wachsendes g ist im allgemeinen nicht zu erwarten, dass die Riemann-Stieltjes-Summe zwischen den entsprechenden Unter-und Obersummen liegen. Ebensowenig wird das Supremum der Untersummen bzw. das Infimum der Obersummen gleich deren Limes für $|\mathcal{Z}| \longrightarrow 0$ sein.

Man gelangt daher zu 2 verschiedenen Integralbegriffen.

$\boxed{\text{Definition}}$

Darboux-Stieltjes-Integral

f und g: $[a,b] \to L$ beschränkte Funktionen
$\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

Falls

$$\sup_{\mathcal{Z}} \underline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g) = \inf_{\mathcal{Z}} \overline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g)$$

Dann heißt dieser Wert das **Darboux-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g über $[a,b]$.

Definition

Riemann-Stieltjes-Integral

f und g: $[a, b] \to L$ beschränkte Funktionen
$\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$
B die zugehörige Belegung.

Konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen für $|\mathcal{Z}| \to 0$ unabhängig von den gewählten Belegungen gegen einen einzigen Grenzwert, das heißt:

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} \sigma(f, \mathcal{Z}, B, g) = \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f dg$$

so nennt man diesen Grenzwert das **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g über $[a, b]$.

Definition

Das heißt: es existiert genau der Wert $I = \int_a^b f dg$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von $[a, b]$: $\forall$ Verfeinerungszerlegungen $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ ($\mathcal{Z} \supset \mathcal{Z}_\varepsilon$) und $\forall$ RS-Summen $S := \sigma(f, \mathcal{Z}, B, g)$ von f bezüglich g zur $\mathcal{Z}$ gilt: $|S - I| < \varepsilon$.

Hier heißt f **Integrand** und g **Belegungsfunktion** oder Integratorfunkton von $\int_a^b f dg$.

Definition

Aus den RS-Summen folgt im Fall

$L = \mathbb{R}^d$ mit $f = (f_1, \ldots, f_d)$, $g = (g_1, \ldots, g_d)^T$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= \int_a^b (f_1, \ldots, f_d) d(g_1, \ldots, g_d)^T \\ &= \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j dg_j,\end{aligned}$$

falls die rechte Seite existiert und im Fall

$L = \mathbb{C}$ mit $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= \int_a^b (f_1 + if_2) d(g_1 + ig_2) \\ &= \int_a^b f_1 dg_1 - \int_a^b f_2 dg_2 \\ &+ i \int_a^b f_2 dg_1 + i \int_a^b f_1 dg_2,\end{aligned}$$

falls die rechte Seite existiert.

Definition

satz 1

Ist g auf [a,b] monoton wachsend, so gilt: Für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ und alle zugehörigen Belegungen B

$$\underline{\sigma}(f, \mathcal{Z}, g) \leq \sigma(f, \mathcal{Z}, B, g) \leq \overline{\sigma}(f, \mathcal{Z}, g)$$

satz 2

$\int_a^b f dg$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} (\overline{\sigma}(f, \mathcal{Z}, g) - \underline{\sigma}(f, \mathcal{Z}, g)) = 0$$

satz 3

Aus der Existenz von $\int_a^b f dg$ folgt die des entsprechenden Darboux-Stieltjes-Integrals und dessen Gleichheit mit $\int_a^b f dg$.

Existenz des Integrals

Cauchysches Integrabilitätskriterium

Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ oder $L = \mathbb{R}^d$

$$f : [a,b] \to L$$

$$g : [a,b] \to L$$

Es existiert $\int_a^b f dg$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{Z}(\varepsilon) : \forall \mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \supset \mathcal{Z}(\varepsilon)$ und RS-Summen σ, σ' von f bezüglich g zur $\mathcal{Z}$,$\mathcal{Z}'$, $|\sigma - \sigma'| < \varepsilon$ gilt.

Beweis

Existenz des Integrals

Mit dem Cauchyschen Integrabilitätskriterium kann man die folgenden Lemmen beweisen.

Lemma (1)

$$\exists \int_a^b f dg \Longleftrightarrow \exists \int_a^b g df$$

In diesem Fall gilt die partielle Integrations-Formel:

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Lemma (2)
Für $a < c < b$ gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

wobei das linke Integral genau dann existiert, wenn die beiden rechtsstehenden Integrale existieren.

Existenz des Integrals

Lemma (3)
Das RS-Integral ist linear, dass heißt, wenn die Integrale $\int_a^b f_i dg$ und $\int_a^b f dg_i$ existieren ($i = 1, 2$), dann existieren auch die folgenden Integrale, und es gilt

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dg = \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg,$$

$$\int_a^b f d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f dg_2.$$

Existenz des Integrals

Schwankung

$g : [a,b] \to L$ heißt auf $[a,b]$ **von beschränkter Variation**, oder $g \in BV([a,b])$, wenn gilt:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{k} \|g(t_j) - g(t_{j-1})\| < \infty,$$

wobei $\mathcal{Z}$ alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, $k \in \mathbb{N}$, von $[a,b]$ durchläuft. Hier bedeutet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

Lemma
$g = (g_1, \ldots, g_d)^T \in BV([a,b]) \iff g_j \in BV([a,b])$ $\forall j = 1, \ldots, d$.

Lemma
Für $d = 1$ gilt $g \in BV([a,b])$ genau dann, wenn

$$g(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (-\varphi_2(t)) - (-\varphi_1(t))$$

mit den auf $[a,b]$ monoton steigenden φ_1 und φ_2.

Existenz des Integrals

satz Seien $f : [a,b] \to L$, $g : [a,b] \to L$ gegeben mit $f \in C([a,b])$, $g \in BV([a,b])$.

Dann existiert das Riemann-Stieltjes-Integral von f bezüglich g, also $\exists \int_a^b f(t)dg(t)$.

Im Falle $L = \mathbb{R}^d$ und $f = (f_1, \ldots, f_d)$, $g = (g_1, \ldots, g_d)^T$ gilt:

$$\int_a^b f dg = \sum_{j=1}^{d} \int_a^b f_j dg_j$$

wobei auch rechts alle Integrale existieren.

Existenz des Integrals

Im Falle $L = \mathbb{C}$ und $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= \int_a^b f_1 dg_1 - \int_a^b f_2 dg_2 \\ &+ i\int_a^b f_2 dg_1 + i\int_a^b f_1 dg_2\end{aligned}$$

wobei auch rechts alle Integrale existieren.

Allgemein gilt:

$$\left|\int_a^b f dg\right| \leq \int_a^b \|f(t)\| d\overset{t}{\underset{a}{V}}(g) \leq K\overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

wobei $\forall t \in [a, b]$, $\|f(t)\| \leq K$.

Existenz des Integrals

Für den eindimemsionalen Fall gilt die folgende Aussage:

satz Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Ist $f \in C(I)$ und $g \in BV(I)$,

so existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und

es besteht die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Beweis

Eigenschaften

Transformation
in ein Riemann-Integral

Satz
Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
Sei $g \in C^1(I)$, also auf I stetig differenzierbar.

Dann existiert $\int_a^b f dg$,

und in diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dt.$$

Beweis

Eigenschaften

Transformation in ein Riemann-Integral

Lemma

Jedes Integral $\int_a^b fh dt$ lässt sich als RS-Integral

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = \int_a^b f(t)dg(t)$$

mit

$$g(t) = \int_a^t h(s)ds$$

schreiben, falls f Riemann-integrierbar und h stetig ist.

Eigenschaften

Hat g an $c \in [a, b]$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe α, so ist $g - \alpha \mathbb{1}_{(c,\infty)}$ an c stetig.

satz

Ist f über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und g auf $[a, b]$ mit Ausnahme endlich vieler Stetigkeits- oder Sprungstellen $c_1, \cdots, c_n$ differenzierbar und gilt $\int_a^b |g'(x)|dx < \infty$, so folgt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(c_j),$$

wobei α_j die Sprunghöhe von g an c_j ist.

Beispiel

Eigenschaften

satz

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein Gebiet und seien

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}^m \text{ mit } f \in C([a,b])$$

$$g : G \to \mathbb{R}^m \text{ mit } g \in C^1(G)$$

$$h : [a,b] \to G \text{ mit } \; h \in C([a,b]), h \in BV([a,b])$$

Dann gilt:

$g \circ h \in BV([a,b])$

und mit $g' \in \mathbb{R}^{m \times d}$

$$\exists \int_a^b f(t) dg(h(t)) = \int_a^b f(t) g'(h(t)) dh(t).$$

Eigenschaften

satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und

$$f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ mit } f \in C([a,b]),$$

$$g : G \to \mathbb{C} \text{ mit } g \in H(G), g' \in C(G)$$

$$h : [a,b] \to G \text{ mit } h \in C([a,b]), h \in BV([a,b]).$$

Dann gilt

$$\exists \int_a^b f(t)dg(h(t)) = \int_a^b f(t)g'(h(t))dh(t).$$

Eigenschaften

satz

Sei $L = \mathbb{C}$ oder $L = \mathbb{R}^d$ und seien

$$f : [a,b] \to L, \text{ mit } f \in C([a,b])$$

$$g : [a,b] \to L \text{ mit } g \in C^1([a,b])$$

Dann gilt

$$\exists \int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Mittelwertsätze

Erster Mittelwertsatz

Existiert $\int_a^b f dg$ und ist g in $I = [a, b]$ wachsend, so ist

$$\int_a^b f dg = \mu \int_a^b dg = \mu\Big(g(b) - g(a)\Big)$$

$$\text{mit} \quad \inf f(I) \leq \mu \leq \sup f(I)$$

Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in I$ mit $\mu = f(\xi)$.

Zweiter Mittelwertsatz

Die Funktion f sei im Intervall $I = [a, b]$ monoton, und g sei stetig in I. Dann existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es gibt ein $c \in I$ mit

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg \\ &= f(a)\Big(g(c) - g(a)\Big) + f(b)\Big(g(b) - g(c)\Big).\end{aligned}$$

Anwendungen

1. Funktionalanalysis

2. Warhscheinlichkeitstheorie

3. Naturwissenschaft

Funktionalanalysis

Darstellungssatz von Riesz
Sei $\ell \in (C[0,1])'$ und L eine Hahn-Banach-Fortsetzung zu einem Funktional $L \in (\ell^\infty[0,1])'$. Setze $y_t = \mathbb{1}_{[0,t]} \in \ell^\infty[0,1]$. Dann gilt: $C[0,1] \subset \overline{\text{lin}}\{y_t : t \in [0,1]\}$. Setze $g(t) = L(y_t)$, dann ist g von beschränkter Variation und das Funktonal ℓ hat die Darstellung

$$\ell(x) = \int_0^1 x(t)dg(t), \qquad \forall x \in C[0,1]$$

als Stieltjes-Integral.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Erwartungswert
$(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
$(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein Messraum
$X : (\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) : \omega \mapsto x$ eine reellwertige Zufallsvariable
$\mathbb{P}X^{-1}$ ist das durch X induzierte Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Falls der Der Erwartungswert von X existiert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Laut der Transformationssatz bekommt man

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} xd\mathbb{P}X^{-1}$$

Sei F_X die zu dem Maß $\mathbb{P}X^{-1}$ gehörigen Verteilungsfunktion und stetig differenzierbar.
Wegen der Existenz des Integrals in beiden Sinnen stimmen das Lebesgue-Integral und Riemann-Stieltjes-Integral überein,
es gilt:

$$\int_\mathbb{R} xd\mathbb{P}X^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx.$$

Naturwissenschaft

Man denke sich das Intervall $[0, 1]$ mit punktförmig oder kontinuerlich verteilter Masse belegt. Bezeichnet $g(t)$ die im Intervall $[0, t]$ enthaltene Masse, so entspricht der $g-$Differenz $g(t_i)-g(t_{i-1})$ die Masse im Teilintervall $[t_{t-1}, t_i]$.

Es lassen sich dann die Gesamtmasse M und der Schwerpunkt S dieser eindimensionalen Massenverteilung in einheitlicher Form

$$M = \int_0^1 dg, \quad S = \frac{1}{M} \cdot \int_0^1 t dg$$

angeben, während bisher die Sonderfälle von Massenpunkten bzw. kontinuierlich verteilten Massen gesondert durch endliche Summen bzw. Riemannsche Integrale beschrieben wurden.

Inperfektion

In der Finanzmathematik ist die folgende Berechnung nötig:

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

wobei $\{B_t\}_{t>0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung ist.

Problem: B_t ist nicht von beschränkter Variation.

Lösung: Itô-Integral

(man lernt es in der Vorlesung **Stochastische Analysis**)