Optimale Rückversicherung

Stephanie Puchstein

28. Mai 2009

Rückversicherung = Versicherung der Versicherer

Durch Rückversicherung schützt sich der Erstversicherer vor der Gefahr nicht kalkulierbare Vermögensschäden zu erleiden.

2 wesentliche Grundformen der Risikoteilung

- proportionale Risikoteilung: Schadenvariable X der Form

$$X = cX + (1-c)X,\ 0 < c < 1$$

$\rightarrow$ Aufteilung in:

$$cX \text{ und } (1-c)X$$

- nichtproportionale Risikoteilung: Schadenvariable X der Form

$$X = min(X, a) + max(X - a, 0),\ a > 0$$

$\rightarrow$ Aufteilung in:

$$\text{Erstrisiko } min(X, a) \text{ und Zweitrisiko } max(X - a, 0)$$

Effekt einer gemeinsamen Tragung von Risiken: *Risikoausgleich im Kollektiv*
$\Rightarrow$ Schätz- und Zufallsrisiko des Versicherungsunternehmers wird verringert

Ist die Sicherheitswahrscheinlichkeit $G(b+c)$ für ein Versicherungsunternehmen zu niedrig: Versicherungsschutz kann gekauft werden.

$b \cdots$ (Netto-) Prämieneinnahme
$G \cdots$ Gesamtschadenverteilung
$c \cdots$ Sicherheitskapital

Diese Möglichkeit, einen Teil der übernommenen ungewissen Schadenkosten wieder durch fixe Kosten zu ersetzen, wird RÜCKVERSICHERUNG genannt.

- RÜCKVERSICHERER:
  Versicherungsunternehmen, das einem anderen Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz gewährt
- ERSTVERSICHERER:
  Unternehmen, das die Originalpolizzen ausstellt

Es existiert keine Vertragsbeziehung zwischen Rückversicherer und Versicherungsnehmer!

Unterscheidung zwischen FAKULTATIVER und OBLIGATORISCHER Rückversicherung:

- *fakultative Rückersicherung*:
  einzelne Großrisiken werden unter mehreren Versicherungsnehmern aufgeteilt
- *obligatorische Rückversicherung*:
  ist der überwiegende Teil und erfolgt innerhalb eines Vertrages zwischen Erst- und Rückversicherer, in dem für alle im Vertragszeitrum des Erstversicherers befindlichen Risiken genau festgelegt ist, welchen Teil welcher Risiken bzw. Schäden der Rückversicherer zu tragen hat und welche Prämie er dafür erhält.

Vertragslaufzeit: üblicherweise 1 Jahr

proportionale Rückversicherung

1. *Quoten-Rückversicherung:* Rückversicherer übernimmt einen festen, überall gleichen Prozentsatz von allen Polizzen
2. *Summenexzedenten-Rückversicherung:* Selbstbehaltsanteil beträgt $c = c(v) = min(v_0/v, 1)$
   $\Rightarrow$ Erstversicherer behält Risiken mit Versicherungssumme $v < v_0$ ganz selbst und beteiligt den Rückversicherer nur bei Risiken mit Versicherungssumme über v_0

nichtproportionale Rückversicherung

1. *Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung:* Erstversicherer trägt von allen Schäden X, egal von welchen der unter Vertrag fallenden Risiken, das Erstrisiko $min(X, a_0)$ bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_0 (=*Priorität*); Rückversicherer muss $max(X - a_0, 0)$ zahlen.
2. *Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung:* analog zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit kleiner Ausnahme
3. *Jahresüberschaden-Rückversicherung oder Stop Loss:* Übersteigt der Gesamtschaden S des Erstversicherers aus einem Jahr die vereinbarte Priorität s_0, so übernimmt der Rückversicherer den übersteigenden Teil bis zu einer vereinbarten Höchstgrenze s_1.

2 prinzipielle Entscheidungen

$\cdots$ müssen getroffen werden:

1. - Form (proportional, nichtproportional)
   - auf welchen Schaden bezieht sich X
2. Umfang der Risikoteilung

Ein Rückversicherungsvertrag regelt die Teilung des Jahresgesamtschadens S des Erstversicherers in einer bestimmten Versicherungssparte. Dabei wird ein Teil R, $0 < R < S$, von S zusammen mit einer Prämie $b(R)$ auf den Rückversicherer transferiert.

Bezeichnet b die zu S gehörende, um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieneinnahme des Erstversicherers, so hat dieser das betriebswirtschaftliche Ergebnis

$$b - S \ldots \textbf{vor } \text{Rückversicherung}$$

mit dem Ergebnis

$$b - S - (b(R) - R) - k_1 \ldots \textbf{nach } \text{Rückversicherung}$$

zu vergleichen.
($k_1 \cdots$ zusätzlich verursachte Kosten des Erstversicherers)

Rückversicherer hat als betriebswirtschaftliches Ergebnis aus diesem Vertrag 0 **vor** und $b(R) - R - k_2$ **nach** Vertragsabschluss, wobei k_2 seine auf diesen Vertag entfallenden Akquisitions- und Verwaltungskosten sind.

$b(R)$ muss also mindesten so hoch sein wie $E(R) + k_2$, wenn der Rückversicherer nicht auf Dauer Verlust machen will.

Erst- und Rückversicherer zusammen haben also nach Rückversicherung ein um $k_1 + k_2$ schlechteres betriebswirtschaftliches Ergebnis als vor Rückversicherung.

2 Probleme

$\cdots$ die sich ergeben:

- Können die durch Rückversicherung entstehenden zusätzlichen *Transaktionskosten* $k_0 = k_1 + k_2$ durch *Synergieeffekte* wieder wettgemacht werden können?
- Ein Modell muss entwickelt werden, anhand dessen der Erstversicherer bezüglich eines konkreten Rückversicherungsvertrages entscheiden kann, ob die Variante ohne oder die mit Rückversicherung - und wenn ja: welche? - für ihn günstiger ist.

wichtig:

richtige Bemessung der Rückversicherungsprämie

$\Rightarrow$

- mindestens so hoch, dass sie Betriebskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers deckt
- aber höchstens so hoch, dass dem Erstversicherer genügend bleibt, um seinerseits Transaktionskosten und Schwankungszuschlag erwirtschaften zu können

Erstversicherer bevorzugt natürlich diejenige Rückversicherungsform $(R, b(R))$, die ihm bei gleichem Sicherheitsniveau den größten Anteil an Schwankungszuschlag lässt.

Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
S &= \text{Gesamtschaden des Erstversicherers} \\
b &= \text{um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte} \\
&\quad\ \text{Prämieneinnahme des Erstversicherers} \\
R &= \text{auf den Rückversicherer transferierter Teil von } S \\
b(R) &= \text{Rückversicherungsprämie inkl. Verwaltungskosten und} \\
&\quad\ \text{Schwankungszuschlag des Rückversicherers} \\
Q &= S - R = \text{Selbstbehalts-Gesamtschaden des} \\
&\quad\ \text{Erstversicherers} \\
b(Q) &= b - b(R) = \text{Selbstbehaltsprämie}
\end{aligned}
$$

Entscheidungsprinzip des Erstversicherers

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass für den Selbstbehalt $Q = S - R$ das angestrebte Sicherheitsniveau erreicht ist und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$ maximal ist.“

Wahl der geeigneten Rückversicherungsform

falls es keine vorteilhafte Rückversicherung geben sollte $\Rightarrow$ Erstversicherer muss

- Sicherheitskapital oder
- Prämieneinnahme erhöhen oder
- sich von einigen seiner Risiken trennen oder
- vorübergehend niedrigere Sicherheitsniveaus akzeptieren

Das Sicherheitsniveau bei gegebenem Sicherheitskapital c haben wir bisher mittels des *Modells der einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P(S > b + c) \text{ bzw. } P(Q > b(Q) + c)$$

quantifiziert.

Eine Normalverteilung, insbesondere bei S, ist in der Regel nicht gegeben, doch ist die Varianz auch ohne Normalverteilung ein intuitiv einleuchtendes Sicherheitskriterium und außerdem analytisch einfacher zu behandeln als die Gesamtschadenverteilung. Daher ermöglicht das *Varianzmodell* einige interessante allgemeine Aussagen:

Varianzmodell

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass die Selbstbehaltsvarianz $Var(Q)$ das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q)$ möglichst groß ist.“

weitere Möglichkeit der Quantifizierung des Sicherheitsniveaus: *Ruinwahrscheinlichkeit*
Spezialfall: Beim *Nutzenmodell* wird jedes mögliche Selbstbehaltsereignis $x = b(Q) - Q$ mit Hilfe einer Nutzenfunktion $u(x)$ bewertet, für die gilt:

- $u'(x) > 0$
- $u''(x) < 0$

Gemäß dem Nutzenmodell wird die Rückversicherung so gewählt, dass der Erwartungswert des Nutzens des resultierenden Selbstbehaltergebnisses möglichst groß wird:

> „Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass bei gegebenem Sicherheitskapital c und gegebener Nutzenfunktion u die Nutzenerwartung $E(u(c + b(Q) - Q))$ möglichst groß ist."

Modelle mit Verlustwahrscheinlichkeit und das Varianzmodell besitzen jeweils folgende, zur vorigen äquivalente, Formulierung:

Verlustwahrscheinlichkeitsmodell:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Verlustwahrscheinlichkeit $P(Q > b(Q) + c)$ möglichst klein wird.“

Varianz-Modell:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Varianz $Var(Q)$ möglichst klein wird.“

Nutzenmodell kann analog formuliert werden

Idealisierter funktionaler Ansatz der Transaktionskosten:
die *Transaktionskosten* werden als die Veränderung

$$\begin{aligned} k(R) &= b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) \\ &= b(R) - E(R) \end{aligned}$$

des erwarteten betriebswirtschaftlichen Ergebnisses vor bzw. nach Rückversicherung definiert

Satz(Borch, Kahn, Pesonen)

Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen R gleiche Funktion g des Erwartungswerts $E(R)$, d.h. $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß dem Varianzmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Satz(Beard, Pentikäinen, Peson)

Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen gleiche monoton wachsende Funktion $k(R) = h(Var(R))$ der Varianz des Rückversicherungsschadens R, so ist gemäß dem Varianzmodell die Quoten-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Folgerung aus den Sätze

Optimale Entscheidung des Erstversicherers hängt nicht von der Verteilung des Gesamtschadens S ab, sondern von der Art und Höhe der Transaktionskosten

Stop-Loss- oder Quoten-Rückversicherung sind (aus Sicht des Erstversicherers) nicht die zu bevorzugenden Rückversicherungsformen

Transaktionskosten enthalten

- die durch die Rückversicherung bedingten Verwaltungskosten von Erst- und Rückversicherer
- den Schwankungszuschlag des Rückversicherers

Transaktionskosten sind definiert als die Differenz

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

zwischen Rückversicherungsprämie und Erwartungswert der Rückversicherungsschäden
d.h. sie beinhalten (zusätzlich zu den absichtlich einkalkulierten Verwaltungskosten und dem Schwankungszuschlag) auch noch einen unbeabsichtigten Zu- oder Abschlag durch die Verschätzung bei $E(R)$

Satz(Arrow)

Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen $R = S - Q$ gleiche Funktion g des Erwartungswertes $E(R)$, d.h. gilt $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß dem Nutzenmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Erstversicherer schließt nicht einen einzigen Rückversicherungsvertrag ab
⇒ jede Branche (Feuer, Allgemein-Haftpflicht, Kraft-Haftpflicht, Kraftfahrtkasko, Unfall, Transport, usw.) wird getrennt behandelt

Möchte Erstversicherer in mehreren oder allen getrennt rückversicherten Teilportefeuilles dieselbe Rückversicherungsform anwenden:
⇒ Frage: soll Parameter, der den Umfang der Rückversicherung regelt, überall gleich hoch sein oder nicht?!

falls Teilportefeuilles voneinander unabhängig sind: es können weitgehend explizite Lösungen ermittelt werden

Satz(De Finetti, Bühlmann)

Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i, $1 < i \leq I$, durch getrennte Quoten-Rückversicherungen geschützt, so sind die Selbstbehaltsquoten $c_i = Q_i/S_i$ gemäß dem Varianzmodell proportional zu

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{Var(S_i)}$$

zu wählen, wenn die Transaktionskosten $k(R_i) = z_i E(R_i)$ jeweils mit dem Faktor z_i proportional zum Erwartungswert des abgegeben Schadens R_i sind.

Selbstbehaltsanteil c_i soll

- umso höher sein, je teurer die Rückversicherung, gemessen durch z_i, und je größer das Portefeuille, gemessen durch $E(S_i)$, ist
- umso kleiner sein, je größer die Varianz des Portefeuilles ist

Wie sind Prioritäten von unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherungen zu wählen, wenn mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles auf diese Weise rückversichert werden sollen? Dazu sei

$$S_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}$$

der Gesamtschaden von Teilportefeuille i gemäß dem Kollektiven Modell, d.h. die Schadenhöhen $X_{i1}, X_{i2}, \ldots$ seien unabhängig und identisch wie X_i verteilt und unabhängig von der Schadenzahl N_i. Bei Priorität a_i ist der Selbstbehaltschaden auf Portefeuille i

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_i} min(X_{in}, a_i),$$

der auf den Rückversicherer transferierte Schaden beträgt $R_i = S_i - Q_i$.

Satz(Bühlmann)

Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i, $1 \leq i \leq I$, mit Einzelschadenhöhe X_i und davon abhängiger, poissonverteilter Schadenzahl durch getrennte, unlimitierte Schadenexzedenten-Rückversicherungen geschützt, so sollten deren Prioriäten a_i im Varianzmodell die implizte Gleichung

$$a_i = (k_1/2 + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i))/\beta$$

erfüllen, wenn die Transaktionskosten die Form

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 Var(R_i)$$

haben und der Faktor β so gewählt wird, dass das vorgegebene Varianzniveau eingehalten wird.

Manche Risikoteilungsformen sollten gemieden werden, weil eine für beide Beteiligten bessere Alternative existiert, z.B. *Integral-Franchise* (Jahresbasis):

Ausgehend vom Jahresschaden S und einer vereinbarten Schadengrenze $\underline{a}$ trägt der Erstversicherer

$$Q = \begin{cases} S, & \text{falls } S \leq \underline{a} \\ 0, & \text{falls } S > \underline{a} \end{cases}$$

und der Rückversicherer trägt $R = S - Q$, d.h. er übernimmt den vollen Schaden, wenn er höher als die Grenze $\underline{a}$ ist.

Satz(Beard, Pentikäinen, Peson)

Zu jeder Integral-Franchise $Q + R = S$ mit Schadengrenze $\underline{a}$ gibt es einen unlimitierten Stop-Loss $Q_a + R_a = S$, $Q_a = min(S, a)$, mit Priorität $a < \underline{a}$ und gleichen Erwartungswerten $E(Q_a) = E(Q)$, $(R_a) = E(R)$, aber niedrigeren Varianzen $Var(Q_a) < Var(Q)$, $Var(R_a) < Var(R)$.

$\Longrightarrow$

Für Erst- und Rückversicherer, die nach dem Varianzmodell entscheiden, stellt die Integral-Franchise keine empfehlenswerte Risikoteilung dar, da es eine für beide Seiten bessere Form der Risikoteilung gibt $\Rightarrow$ Stop-Loss (bzw. die Abzugs-Franchise)

$\Rightarrow$ gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Transaktionskosten nur von Erwartungswert und Varianz des Rückversicherungsschadens abhängen

Werden die Transaktionskosten z.B. gemäß $k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 Var(R)$ berechnet, so ergibt der gemäß obigem Satz definierte Stop-Loss sowohl eine niedrigere Selbstbehaltsvarianz wie auch niedrigere Transaktionskosten (falls $k_2 > 0$) als die Interagl-Franchise.

pareto-optimal

Risikoteilungsformen, zu denen es keine Alternative gibt, bei der sich wenigstens eine Seite besser stellt, ohne dass die andere sich verschlechtert, heißen *pareto-optimal*.

Die Integral-Franchise ist im Varianzmodell also nicht pareto-optimal.

Bei pareto-optimalen Rückversicherungsformen geht jede Verbesserung zugunsten des Erstversicherers und zu Lasten des Rückversicherers - und umgekehrt.

Satz

Zu jeder Rückversicherungsform $\underline{Q} + \underline{R} = S$, bei der $\underline{Q}$ und $\underline{R}$ keine Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind, sondern von den Einzelschäden abhängen, gibt es eine Rückversicherungsform $Q + R = S$, bei der Q und R Funktionen von S sind, und zwar derart, dass $E(Q) = E(\underline{Q})$, $E(R) = E(\underline{R})$ und $Var(Q) < Var(\underline{Q})$, $Var(R) < Var(\underline{R})$ gilt.

Korollar

Eine Rückversicherungsform, die sich nicht als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellen lässt, ist im Varianzmodell nicht pareto-optimal.

Die zur Berechnung von $E(Q|S = s)$ erforderlichen Schadenzahl- und Schadenhöhenwahrscheinlichkeiten pro Risiko können in den Zweigen der Schadensversicherung allenfalls approximativ und unter zusätzlichen Modellannahmen ermittelt werden.

Lebens- oder Unfalltod-Versicherung:
möglich, dass sich beide Seiten auf die erforderlichen Rechnungsgrundlagen einigen $\Rightarrow$ Summen- und Schadenexzedenten-Rückversicherung können weiterhin ihren Platz in der Versicherungspraxis beanspruchen, da sie zwar suboptimal sind, doch die theoretisch bessere Rückversicherungsform in der Regel nicht explizit ausgerechnet werden kann

Abstaffelungen des Selbstbehalts: nicht pareto-optimal, d.h. sie können theoretisch durch eine Rückversicherungsform noch weiter verbessert werden, die nur vom Gesamtschaden aller betrachteten Teilportefeuilles abhängt.

$\Rightarrow$ pareto-optimale Rückversicherungsform muss notwendigerweise als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellbar sein. Das allein ist nicht hinreichend, wie das Beispiel der Integral-Franchise (auf Jahresbasis) zeigt.

Der folgende Satz charakterisiert die pareto-optimalen Rückversicherungsformen:

Satz(Pesonen)

Eine Rückversicherungsform $Q + R = S$ ist im Varianz- oder Nutzenmodell genau dann pareto-optimal, wenn der Selbstbehaltsschaden Q und der Rückversicherungsschaden R monoton nicht fallende Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind.

FOLGERUNG:
Quote und Stop-Loss sind pareto-otimal, da Q und R jeweils monoton nicht fallende Funktionen von S sind. Dagegen ist bei der Integralfranchise (auf Jahresbasis) der Selbstbehaltsschaden Q nicht monoton fallend, was erneut zeigt, dass die Integral-Franchise nicht pareto-optimal ist.

optimale Rückversicherungsform kann im konkreten Fall normalerweise nicht ermittelt werden
$\Rightarrow$ man orientiert sich daher oft an der jeweils dominierenden Komponente des versicherungstechnischen Risikos, d.h. an Zufalls- bzw. Änderungsrisiko
Gegen das Zufallsrisiko aus einzelnen Großschäden schützen am besten der Summen- und der Schadenexzedent.
Bei Kumulierung vieler Schäden aus einem Ereignis entlastet natürlich der Kumulschadenexzedent am meisten.
Dem Änderungsrisiko, das sich auf alle Schäden auswirkt, kann offensichtlich durch Quote oder Stop-Loss am besten begegnet werden.
In den Sparten, wo beide Komponenten des versicherungstechnischen Risikos eine Rolle spielen, werden häufig mehrere Rückversicherungsformen miteinander kombiniert („Rückversicherungsprogramm“).

Danke