

Zinsderivate

Philipp Schmöger

28. Mai 2009

Zinsderivate

Inhalt

- 1 Derivate
 - Allgemeines
 - Forward- und Future-Kontrakte
 - Optionen
 - Swaps

Zinsderivate

Inhalt

- 1 Derivate
 - Allgemeines
 - Forward- und Future-Kontrakte
 - Optionen
 - Swaps
- 2 Zinsderivate
 - Das Black- und Black-Scholes-Modell
 - Anleiheoption
 - Zinscaps und Zinsfloors
 - Swaptions

Zinsderivate

Inhalt

- 1 **Derivate**
 - Allgemeines
 - Forward- und Future-Kontrakte
 - Optionen
 - Swaps
- 2 **Zinsderivate**
 - Das Black- und Black-Scholes-Modell
 - Anleiheoption
 - Zinscaps und Zinsfloors
 - Swaptions
- 3 **Short-Rate-Modelle**
 - Gleichgewichtsmodelle
 - No-Arbitrage-Modelle
 - Zinsbäume

Allgemeines

Definition

Ein Derivat ist ein Finanzinstrument, dessen Auszahlung an die Werte anderer Variablen, dem Underlying, gebunden ist.

Solch ein Underlying kann z.B. ein Wertpapier, Aktienindex oder eine Ware sein.

Handel findet statt:

- Derivatbörsen: standartisierte Kontrakte
- Over-The-Counter (OTC) Handel zwischen Finanzinstituten (via Telefon, Computer, . . .)

Grundlegende Arten von Derivaten:

- Forward- und Futures-Kontrakte
- Optionen
- Swaps
- exotische Optionen

Forward-Kontrakte

Definition

Ein Forward-Kontrakt ist eine Vereinbarung, einen Vermögenswert zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt zu einem bestimmten Preis zu kaufen oder zu verkaufen.

Der *Forwardpreis* zu einem bestimmten Zeitpunkt ist der Lieferpreis, der verwendet werden würde, wenn der Kontrakt zu diesem Zeitpunkt eingegangen werden würde.

Für den zu vereinbarenden Lieferpreis auf ein Vermögenswert, der kein Einkommen abwirft, ergibt sich:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

mit:

F_k ... Forward-Preis, wenn Vertrag zur Zeit k abgeschlossen

S_k ... Spot-Preis (tatsächlicher Preis zur Zeit k , Kassakurs)

r ... risikoloser Zinssatz

T ... ausstehende Zeit bis zur Lieferung

Der Wert bei Vertragsabschluss ist 0

Der heutige Wert eines zuvor abgeschlossen Forward-Kontrakts:

$$f = (F_0 - K)e^{-rT}$$

mit:

K ... Lieferpreis des Forwards

Vereinfachte Annahmen (Transaktionskosten, short-selling, ...)

Futures-Kontrakte

Ein *Futures-Kontrakt* ist als Art standardisierter Forward-Kontrakt aufzufassen, der normalerweise an der Börse gehandelt wird.

Dabei ist der Liefertermin meistens nicht genau spezifiziert (z.B. Liefermonat)

tägliche Abrechnung

Futurespreise regelmäßig in Wirtschaftsblättern

Forwardpreise vs. Futurespreise

In arbitrage-freier Welt:

- konstanter risikoloser Zinssatz: Forwardpreis gleich Futurespreis

- stochastischer risikoloser Zinssatz: Forwardpreis ungleich Futurespreis (Laufzeitabhängig): Forwardpreis nicht täglich abgerechnet (Korrelation mit Zinssätzen)

Optionen

Definition

Eine europäische Option gibt seinem Besitzer das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem gewissen Zeitpunkt das Underlying für einen gewissen Preis zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put)

Auszahlung europ. Call-Option: $(S_T - K)^+$

Auszahlung europ. Put-Option: $(K - S_T)^+$

Amerikanische Option

Swaps

Definition

Ein Swap ist ein Vertrag zwischen zweier Vertragspartner, Zahlungsströme über einen gewissen Zeitraum zu tauschen.

Plain Vanilla Zinsswap:

Tausch von variablen Zinssatz (z.B.: EURIBOR, LIBOR) gegen konstanten Zinssatz.

Der Wert eines solchen Swaps:

$$V_{swap} = B_{fl} - B_{fix}$$

mit:

B_{fix} ... Wert der festverzinsten Anleihe

B_{fl} ... Wert der zinsvariablen Anleihe

Zinsderivate

Definition

Ein Zinsderivat ist ein Derivat, dessen Auszahlung in irgendeiner Art und Weise von einem Zinssatz abhängt.

Zu betrachtende Zinsderivate

- Anleiheoption
- Zinscap und Zinsfloor
- Swaptions

Black-Scholes-Modell

Black-Scholes-Formeln zur Bewertung europäischer Optionen auf dividendenlose Aktien

$$c = S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2)$$

$$p = e^{-rT} K \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{S_0}{e^{-rT} K} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma^2 T \right)$$

S_T ist log-normalverteilt, vollkommener und vollständiger Markt

Black-Modell

Erweiterung des Modells nach den Formeln von Fisher Black

Black-Formeln zur Bewertung europäischer Optionen

$$c = P[0, T](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$
$$p = P[0, T](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1))$$
$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

Annahme:

$E[V_T] = F_0$, V_T als Wert der Variable log-normalverteilt mit Standardabweichung von $\ln V_T = \sigma\sqrt{T}$, und $P[0, T]$ Wert einer Nullkupon-Anleihe mit Auszahlung 1 zu T

Gültigkeit des Black-Modells

Gültigkeit

- Zinssatz konstant/deterministisch: Forwardpreis = Futurespreis
- Zinssatz stochastisch: Forwardpreis \neq Futurespreis

Man sieht, dass für $S_0 = F_0 e^{-rT}$ und $P[0, T] = e^{-rT}$
Black-Scholes-Formeln folgen

Eingebettete Anleiheoption

Definition

Bei einer eingebetteten Anleiheoption handelt es sich um eine Option, die in der Anleihebedingung fest verankert ist

- Callable Bond
- Puttable Bond

Callable Bond

Ermöglicht dem Emittenten einer Anleihe, diese gegen einen vorher vereinbarten Preis zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten zurückzukaufen.

Sperrfrist

Üblicherweise höhere Rendite

Putable Bond

- Ermöglicht dem Käufer der Anleihe, den vorzeitigen Rückkauf der Anleihe gegen einen zuvor vereinbarten Preis zu verlangen.
- Üblicherweise eine eher geringere Rendite
- Beispiele für eing. Anleiheoptionen: Bankeinlagen, Kredite, ...

Euroäische Anleiheoption

Definition

Eine europäische Anleiheoption ist eine Kauf- bzw. Verkaufsoption einer Anleihe zu einem gewissen Zeitpunkt zu einem gewissen Preis.

Wenn wir den Forward-Preis F_0 gleich den Forward-Anleihepreis F_B setzen und wenn der Anleihepreis bei Fälligkeit der Option log-normalverteilt ist, können wir die Formeln des Black-Modells anwenden

Kauf- und Verkaufsoption

$$c = P[0, T](F_B \Phi(d_1) - K \Phi(d_2))$$

$$p = P[0, T](K \Phi(-d_2) - F_B \Phi(-d_1))$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{F_B}{K}\right) \pm \frac{1}{2} \sigma_B^2 T \right) \quad \text{und} \quad F_B = \frac{B_0 - I}{P[0, T]}$$

B_0 ... Anleihepreis zum Zeitpunkt 0

I ... Barwert der Kuponzahlungen

Theoretische Begründung

Forward-risikoneutrale Welt:

Es gilt

- Anleihepreis B_T log-normalverteilt
- $E_T[B_T] = F_B$
- Preis einer Kaufoption: $c = P[0, T]E_T[(B_T - K)^+]$

Durch geschicktes Umformen und der Verwendung der Normalverteilung von $\ln B_T$ folgen die Black Formeln

Wir können demnach den heutigen Zinssatz verwenden, wenn der erwartete Anleihepreis gleich dem Forward-Anleihepreis ist

Zinscap

Definition

Ein Zinscap ist ein Finanzinstrument, welches dem Käufer nur dann eine Ausschüttung gewährt, wenn ein variabler Referenzzinssatz R_k die sogenannte Cap-Rate R_K übersteigt

Die Auszahlungshöhe hängt davon ab, um wie viel der Referenzzinssatz die Cap-Rate überschreitet.

Beispiel:

Ein Kredit mit Nominalbetrag L wird an 3-Monats-EURIBOR angepasst. Zur Absicherung erwirbt der Kreditnehmer einen Zinscap zum Zeitpunkt 0 mit Laufzeit T . Seien t_k ,

$k \in 1, 2, \dots, T - \frac{1}{4}$ die Zinssatzanpassungstermine mit Tenor $\delta_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{4}$.

Liegt nur zu irgendeinem Zinsanpassungstermin $t_{\tilde{k}}$ der EURIBOR $R_{\tilde{k}}$ über der Cape-Rate R_K , so wird die Differenz bezüglich des Nominalbetrages L dem Besitzer des Zinscaps zum nächsten Zinsanpassungstermin $t_{\tilde{k}+1}$ ausbezahlt.

Zinscap als Portfolio von Zinsoptionen

Auszahlung zum Zeitpunkt t_{k+1} :

$$L\delta_k(R_k - R_K)^+$$

Man bezeichnet dies als Caplet und entspricht einer Kaufoption auf den zur Zeit t_k beobachteten Referenzzinssatzes.

Dies bedeutet, dass man einen Zinscap als n solcher Caplets, also als n Kaufoptionen betrachten kann.

Zinsfloor

Ein Zinsfloor ist das Gegenstück zum Zinscap.

Definition

Ein Zinsfloor ist ein Finanzinstrument, das dem Käufer nur dann eine Auszahlung gewährt, wenn der variable Referenzzinssatz R_k unter einen bestimmten Wert fällt.

Die Auszahlungshöhe hängt dann vom Grade der Unterschreitung ab

Auszahlung zum Zeitpunkt t_{k+1} :

$$L\delta_k(R_K - R_k)^+$$

Dies entspricht einer Verkaufsoption auf den zum Zeitpunkt t_k beobachteten Referenzzinssatzes und wird als *Floorlet* bezeichnet.

Man kann einen Zinsfloor als n solcher Floorlets, also als Portfolio von n Verkaufsoptionen betrachten.

Collar und Put-Call-Parität

Ein Collar ist eine Kombination aus einer Kaufposition in einem Zinsscap und einer Verkaufsposition in einem Floor.

Put-Call-Parität

Wert des Caps - Wert des Floors = Wert des Swaps.

Bewertung von Caps und Floors

Bewertung eines Caplets und Floorlets

$$c = L\delta_k P[0, t_{k+1}](F_k \Phi(d_1) - R_K \Phi(d_2))$$
$$p = L\delta_k P[0, t_{k+1}](R_K \Phi(-d_2) - F_k \Phi(-d_1))$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{t_k}} \left(\ln\left(\frac{F_k}{R_K}\right) \pm \frac{1}{2} \sigma_k^2 t_k \right)$$

Wobei die Forward Rate F_k für $[t_k, t_{k+1})$ der Erwartungswert des log-normalverteilten Zinssatzes für den jeweiligen Caplet bzw. Floorlet ist.

Der Wert eines Zinscap ist die Summe der Werte der Caplets

Alle Caplets müssen getrennt unter Verwendung ihrer eigenen Volatilitäten (*Spot-Volatilitäten*), oder einer gemeinsamen *Flat-Volatilität* berechnet werden. Letztere hängt von der Länge der Laufzeit ab.

Theoretische Begründung

Forward-risikoneutrale Welt:

$$c = L\delta_k P[0, t_{k+1}] E_{k+1}[(R_k - R_K)^+]$$

Mit $E_{k+1}[R_k] = F_k$ und der log-Normalverteilung von R_k folgen die zuvor gezeigte Formeln

Europäische Swaptions

Definition

Europäische Swaptions sind Optionen auf Zinsswaps. Es gibt also dem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem gewissen Zeitpunkt in einen Zinsswap einzutreten

Alternative zu *Forward Swaps*: Sie beinhalten keine Prämien im Voraus, haben aber den Nachteil, dass man in den Swap-Kontrakt einsteigen muss

Bewertung von Swaptions

- s_K ... in Swaption festgelegter konstanter Zins im Tausch gegen EURIBOR, der in T Jahre startet und n Jahre läuft
- s_T ... Swap Rate eines n -Jahre-Swaps bei Fälligkeit der Option (log-normalverteilt)
- m ... Anzahl der Zahlungen pro Jahr aus dem Swap

Dann ist die Auszahlung der Option auf einen Swap, bei dem man ein konstanter Zinssatz bezahlt und EURIBOR bekommt, eine Serie von Zahlungsströme der Höhe:

$$\frac{L}{m}(s_T - s_K)^+$$

Daraus folgt der Wert dieser Swaption als Summe von Zahlungsströmen zu Auszahlungsterminen T_1, T_2, \dots, T_{mn} :

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i] (s_0 \Phi(d_1) - s_K(d_2))$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{s_0}{s_K}\right) \pm \frac{1}{2} \sigma^2 T \right)$

s_0 ist dabei die *Forward Swap Rate*

Analog mit EURIBOR zahlen und konstanten Zinssatz bekommen:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i] s_K \Phi(-d_2) - s_0(-d_1)$$

Theoretische Begründung

Forward-risikoneutrale Welt:

$$LAE_A[(s_T - s_K)^+]$$

Mit $E_A[s_T] = s_0$, $A = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i]$ und der log-Normalverteilung von s_T folgen die zuvor gezeigte Formeln

Fazit

Jedes Modell für sich ist in sich konsistent, jedoch nicht untereinander. Es kann immer nur eine der drei zukünftigen Werte als log-normalverteilt angenommen werden.

Trotz der breiten Anwendung des Black-Modells für Caps, Anleiheoptionen und Swaptions, ist es für amerikanische Swaptions und Optionen nicht geeignet, da es die Veränderung des Zinssatzes nicht berücksichtigt

Short-Rate-Modelle

Definition

Der Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für einen unendlich kurzen Zeitabschnitt gilt, nennt man Short Rate r .

Alle hier betrachteten Prozesse in risikoneutralen Welt:

$$P[t, T] = E[e^{-\bar{r}(T-t)}] = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

und somit

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln E[e^{-\bar{r}(T-t)}]$$

Wobei $R(t, T)$ der Zinssatz zu t bei stetiger Verzinsung für Periode $T - t$, \bar{r} der durchschnittliche Wert von r ist.

Gleichgewichtsmodelle

Leiten Prozess für kurzfristigen Zinssatz r her.
Grundsätzliche Beschreibung des risikoneutralen Prozesses durch einen Itô-Prozess der Form:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

mit

$m(r)$... momentane Drift

$s(r)$... momentane Standardabweichung

zeitunabhängig

Folgende Gleichgewichtsmodelle 1-Faktor-Modelle

Rendleman-Bartter-Modell

μ, σ konstant:

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

Folgt also geometrischen Brownschen Bewegung

keine *Mean-Reversion*: Vergleich Zinssätze - Aktienkurse

Vasicek-Modell

a , b und σ konstant

$$dr = a(b - r)dt + \sigma r dz$$

Mean-Reversion: kurzfristiger Zinssatz mit Rate a auf Niveau b gezogen. σdz ein normalverteilter stochastischer Term.

Nachteil: Short Rate kann negativ sein

Wenn a , b und σ bekannt, kann Zinsstrukturkurve als Funktion von $r(t)$ beschrieben werden:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T) r(t)$$

mit

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$A(t, T) = \exp\left[\frac{(B(t, T) - T + t)(a^2 b - \frac{\sigma^2}{2})}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a}\right]$$

Formen: nach oben/unten geneigt, mit Hugel

Modell von Cox, Ingersoll und Ross

Alternative zu Vasicek-Modell

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

Vorteil gegenüber Vasicek: Zinssätze stets nichtnegativ

Standardabweichung proportional zu \sqrt{r}

Steigende, sinkende und gekümmte Zinsstrukturkurven

Nachteile der Gleichgewichtsmodelle

- Passen nicht automatisch zur aktuellen Zinsstruktur (Parameterwahl)
- Driftrate Zeitunabhängig

Überführung von Gleichgewichtsmodelle zu sogenannte No-Arbitrage-Modelle

Vorteile der No-Arbitrage-Modelle

- Zinsstruktur ist Modell-Input \Rightarrow genaue Anpassung
- Drift Rate zeitabhängig

Ho-Lee-Modell

Binomialbaum-Modell von Anleihepreisen mit 2 Parametern:

- kurzfristige Standardabweichung, konstant
- Marktpreis des Risikos des kurzfristigen Zinssatzes

Konvergenz bei stetiger Zeit gegen

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz$$

σ konstant

$\theta(t)$ definiert mittlere Richtung von r zur Zeit t

$\theta(t)$ so gewählt, dass das Modell an anfängliche Zinsstruktur angepasst ist:

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$$

mit $F(0, t)$... momentane Forward Rate

$\theta(t)$ näherungsweise $F_t(0, t)$. Steigung der Forwardkurve bestimmt Richtung des kurzfristigen Zinssatzes.

Einfaktor-Modell von Hull-White

Erweiterung des Vasicek-Modells zur exakten Anpassung an die anfängliche Zinsstruktur (zeitabhängiges Reversionsniveau)

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

mit a, σ konstant

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Ho-Lee-Modell mit Mean Reversion (mit Rate a nach $\frac{\theta(t)}{a}$)

analytisch gut handhabbar

Aber: Short Rate kann negativ sein

Black-Karasinski-Modell

$$d \ln(r) = [\theta(t) - a(t) \ln(r)]dt + \sigma(t)dz$$

In r folgt gleichem Prozess wie Hull-White

Vorteil: Short Rate stets nichtnegativ

Aber: r log-normalverteilt statt normalverteilt, analytisch schlecht handhabbar

2-Faktor-Modell von Hull-White

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]dt + \sigma_1 dz_1$$

Wobei u anfangs 0, dann mit dem Prozess

$$du = -budt + \sigma_2 dz_2$$

a , b , σ_1 und σ_2 konstant

$\theta(t)$ so gewählt, dass konsistent mit anfänglicher Zinsstruktur
wesentlich umfangreichere Zinsstrukturbewegungen für r

Zinsbäume

Definition

Ein Zinsbaum ist eine zeitdiskrete Darstellung des stochastischen Prozesses für den kurzfristigen Zinssatz r

- Verwendung von Trinomialbaum (für Mean Reversion) mit Zeitschritten Δt und Zinssätze mit stetiger Verzinsung
- Unterschiedlicher Diskontierungsfaktor bei jedem Knoten (Vergleich Aktienbäume)

Verfahren zur Konstruktion

Verfahren anhand des Hull-White-Modells

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

1. Schritt:

Konstruiere Baum für Variable \hat{R} , die anfangs 0, dann

$$d\hat{R} = -a\hat{R}dt + \sigma dz$$

ΔR Abstand zwischen den Zinssätzen im Baum (Praxis:

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t})$$

(i, j) der Knoten, für den $t = i\Delta t$ und $\hat{R} = j\Delta R$

$j > j_{max}$... wechsele zu Abwärtsverzweigung

$j < j_{min}$... wechsele zu Aufwärtsverzweigung

jeder Ast mit positiver Eintrittswahrscheinlichkeit

1.Schritt

Inkrement $\hat{R}(t + \Delta T) - \hat{R}(t)$ normalverteilt mit Erwartungswert $-a\hat{R}(t)\Delta t$ und Varianz $\sigma^2\Delta t$

LGS lösen:

$p_u, p_m, p_d \dots$ W'keiten für hinauf, gleich, hinunter

Bei normaler Verzweigung:

$$\begin{aligned} p_u\Delta R - p_d\Delta R &= -a\hat{R}\Delta t \\ p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2\hat{R}^2\Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$

Lösungen hängen nur mehr von j ab

$\Rightarrow (i, j), i \geq 0$ mit fixem j gleiches W'keitstripel, Baum symmetrisch

2.Schritt

Transformation des Baumes für \hat{R} in einen für R :

Verschiebung der Knoten, sodass anfängliche Zinsstruktur exakt wiedergegeben

Definiere:

$$\alpha(t) = R(t) - \hat{R}(t)$$
$$\alpha_j = \alpha(i\Delta t)$$

$Q_{i,j}$... Barwert von Wertpapier, dass bei (i,j) 1 bezahlt

können so berechnet werden, dass anfängliche Zinsstruktur exakt abgebildet

Formeln für α_j , $Q_{i,j}$

$Q_{0,0} = 1$, α_0 Zinssatz für Δt

- α_m so bestimmt, sodass Baum eine zu $(m+1)\Delta t$ fällige Nullkuponanleihe P_{m+1} korrekt bewertet:

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-j\Delta R\Delta t] - \ln P_{m+1}}{\Delta t}$$

$n_m \dots$ Anzahl der Knoten zu beiden Seiten des zentralen in $m\Delta t$

-

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]$$

$q(k,j) \dots$ W'keit für Bewegung $(m, k) \Rightarrow (m+1, j)$

Erweiterung auf andere Modelle

Ausweiten auf allgemeine Modelle der Form:

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]dt + \sigma dz$$

können jede beliebige Zinsstruktur abbilden

Konstruktion

$$x = f(R)$$

- 1 Baum für \hat{x} konstruieren mit demselben Prozess wie x mit Anfangswert, $\theta(t) = 0$
- 2 Knoten um α_i verschieben
- 3 α_m bestimmen, sodass $(m+1)\Delta t$ -Nullkupon-Anleihe korrekt bewertet:

g Inverse von f , sodass am j -ten Knoten zum Zeitpunkt $m\Delta t$ Zinssatz

$$g(\alpha_m + j\Delta x)$$
$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t]$$

α_m mittels numerischen Verfahrens zu berechnen

Auswahl von $f(r)$

- $f(r) = r \Rightarrow$ Hull-White:
analytisch gut lösbar, aber r kann negativ sein
- $f(r) = \ln r \Rightarrow$ Black-Karasinski:
analytisch nicht lösbar, r jedoch nichtnegativ

Bei niedrigen Zinssätzen normalverteilte Modelle unbefriedigend, da $P(r < 0)$ nicht mehr vernachlässigbar.

Log-normalverteilte Modelle unbefriedigend, da Volatilität bei niedrigen Zinssätzen viel höher.

Geeignetes Modell

$f(r)$ gewählt, sodass für $r < 1$ Zinssätze log-normalverteilt, $r > 1$ normalverteilt

Zusammenfassung

Gleichgewichtsmodelle: zum Verständnis potentieller Beziehungen zwischen den variablen der Ökonomie geeignet. Jedoch ist anfängliche Zinsstruktur Modell-Output.

Zur Bewertung von Derivaten ist wichtig, dass das Modell mit dem am Markt beobachteten anfänglichen Zinsstruktur konsistent ist.

No-Arbitrage-Modelle: anfängliche Zinsstruktur gegeben (Input)
Einfachstes Modell ist das Ho-Lee-Modell: analytisch lösbar, jedoch Zinssätze zu allen Zeiten gleich variabel

Hull-White-Modell: Ho-Lee-Modell mit Mean-Reversion.

Ermöglicht umfangreiche Beschreibung, trotzdem analytisch handhabbar.

Log-normalverteilte Einfaktor-Modelle mit Vorteil, dass Zinssätze immer nichtnegativ, jedoch analytisch nicht lösbar.

D a n k e