

Riemann-Stieltjes-Integral

Harald Vybiral

24. Juni 2009

- ▶ Wiederholung zum Riemann-Integral
- ▶ Das Riemann-Stieltjes-Integral
- ▶ Anwendungen

- ▶ Konstruktion durch Ober- und Untersummen
- ▶ Konstruktion durch Riemann-Summen
- ▶ Kriterien für Integrierbarkeit
- ▶ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- ▶ Integrationsregeln
- ▶ Mittelwertsätze
- ▶ Integration von Funktionenfolgen und -reihen

Das Riemann-Integral, $\int_a^b f(x)dx$ dient zur Berechnung von Flächeninhalten in der Ebene.

$\int_a^b f(x)dx$ ist der Inhalt der Fläche, die von der x -Achse und dem Graphen von f begrenzt wird.

Defintion:

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, für $j = 1, \dots, n$, so nennt man $Z = I_1, I_2, \dots, I_n$ eine **Zerlegung** von $[a, b]$.

Die **Feinheit** von Z ist definiert durch:

$$|Z| = \max_{i=1,2,\dots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

Oberes und Unteres Integral

Sei f eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung. Definiere

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

und

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Man erhält nun die Obersumme $\overline{S}(f, Z)$ und die Untersumme $\underline{S}(f, Z)$ mit:

$$\overline{S}(f, Z) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{S}(f, Z) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Es gilt $\underline{S}(f, Z) \leq \overline{S}(f, Z), \forall Z$. Sei Z' mit $|Z'| \leq |Z|$, dann gilt sogar

$$\underline{S}(f, Z) \leq \underline{S}(f, Z') \leq \overline{S}(f, Z') \leq \overline{S}(f, Z).$$

Defintion des oberen und unteren Integrals:

$$\overline{\int_a^b} = \inf_Z(\overline{S}(f, Z))$$

und

$$\underline{\int_a^b} = \sup_Z(\underline{S}(f, Z)).$$

Riemann Integral

Defintion:

Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Aus jedem Teilintervall I_j wird nun ein beliebes $b_j \in I_j$ gewählt. Man nennt $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine zu Z gehörige **Belegung**.

Definition:

Sei Z eine Zerlegung und B eine zugehörige Belegung, so nennt man:

$$S(f, Z, B) = \sum_{j=1}^n f(b_j)(x_j - x_{j-1})$$

Riemannsumme. Jeder Summand ist die Fläche des Rechtecks mit der Grundlinie $[x_{j-1}, x_j]$ und Höhe $f(b_j)$.

Defintion

Riemann-Integral: Existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f \, dx := \lim_{|Z| \rightarrow 0} S(f, Z, B)$$

und ist der Wert für jede Belegung gleich, so nennt man ihn das **Riemann-Integral** von f über $[a, b]$. f heißt dann Riemann integrierbar.

Kriterien für Integrierbarkeit

Satz

Darboux' sches Kriterium für Integrierbarkeit: Sei f beschränkt auf $[a, b]$. f ist genau dann Riemann integrierbar, wenn

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \underline{S}(f, Z) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} \overline{S}(f, Z).$$

Es gilt dann $\int_{-a}^b f dx = \int_a^b f dx = \overline{\int}_a^b f dx$.

Definition:

Man nennt eine Teilmenge N von \mathbb{R} eine **Lebesgue-Nullmenge**, wenn sie für jedes $\epsilon > 0$ durch höchstens abzählbar viele Intervalle mit Gesamtlänge ϵ überdeckt werden kann.

Satz:

Eine auf $[a, b]$ definierte Funktion f ist genau dann über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn

1. f auf $[a, b]$ beschränkt ist und
2. die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in $[a, b]$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, also f auf $[a, b]$ fast überall stetig ist.

Satz:

Jede auf $[a, b]$ beschränkte Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Es ist also jede auf $[a, b]$ monotone Funktion über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Satz:

Sind f und g auf $[a, b]$ fast überall gleich und Riemann-integrierbar so gilt:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Speziell für nichtnegative, über $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktionen f gilt sogar:

$$\int_a^b f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall auf } [a, b].$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Defintion:

Unbestimmtes Integral: Für eine reelle Funktion f und jedes c aus dem Definitionsbereich nennt man die Abbildung

$$x \rightarrow \int_c^x f(t) dt$$

ein unbestimmtes Integral.

Definition:

Man nennt F eine Stammfunktion von f auf M , wenn für alle $x \in M$ gilt: $F'(x) = f(x)$.

Eine Stammfunktion ist bis auf eine zu addierende Konstante eindeutig bestimmt.

Satz:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Hat f auf einem Intervall I eine Stammfunktion F und existieren dort die unbestimmten Integrale von f , so gilt:

$$\int_c^x f(t) dt = F(x) - F(c)$$

Integrationsregeln

Elementare Rechenregeln:

1. $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
4. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Partielle Integration:

Sind f und g auf $[a, b]$ differenzierbar so gilt:

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b (fg')(x)dx$$

Substitutionsregel:

Ist φ eine differenzierbare Funktion, die $[a, b]$ auf $[\alpha, \beta]$ abbildet und gilt entweder:

- ▶ f hat auf $[\alpha, \beta]$ eine Stammfunktion, oder
- ▶ φ ist auf $[a, b]$ monoton, also $\varphi' \geq 0$ (bzw. ≤ 0),

so folgt:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

falls beide Integrale existieren.

Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz:

1. Mittelwertsatz:

- ▶ f und g sind über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und
- ▶ $g \geq 0$ auf $[a, b]$,

so $\exists \alpha$ mit $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$ für die gilt:

$$\int_a^b (fg)(x) dx = \alpha \int_a^b g(x) dx.$$

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so gilt $\alpha = f(c)$ für ein $c \in [a, b]$.

Satz:

2. Mittelwertsatz:

- ▶ f ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und
- ▶ g ist auf $[a, b]$ monoton,

so existiert ein $c \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b (fg)(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx.$$

Integration von Funktionenfolgen und -reihen

Ist $\{f_n\}$ eine auf $[a, b]$ gleichmäßige konvergente Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Folge über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Reihe integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Reihe über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf man Limes und Integral vertauschen.

Riemann-Stieltjes Integral

- ▶ Konstruktion
- ▶ Funktionen von beschränkter Variation
- ▶ Eigenschaften
- ▶ Mittelwertsätze

- ▶ **Riemann-Integral:** Gewichtung mit der Länge des Intervalls.
- ▶ **Riemann-Stieltjes-Integral:** Gewichtung durch eine Funktion g .

Darboux-Stieltjes- und Riemann-Stieltjes-Integral

Untersumme:

$$\underline{\sigma}(f, Z, g) = \sum_{j=1}^n \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

Obersumme:

$$\overline{\sigma}(f, Z, g) = \sum_{j=1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

Riemann-Stieltjes-Summe:

$$\sigma(f, Z, B, g) = \sum_{j=1}^n f(b_j) \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

Für nicht monoton wachsendes g gilt im allgemeinen **nicht**

$$\underline{\sigma}(f, Z, g) \leq \sigma(f, Z, B, g) \leq \bar{\sigma}(f, Z, g)$$

Ebensowenig wird das Supremum der Untersummen bzw. das Infimum der Obersummen gleich deren Limes $|Z| \rightarrow 0$ sein.

► **Darboux-Stieltjes-Integral** falls

$$\sup_Z \underline{\sigma}(f, Z, g) = \inf_Z \bar{\sigma}(f, Z, g)$$

► **Riemann-Stieltjes-Integral** falls

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \sigma(f, Z, B, g)$$

unabhängig von den gewählten Belegungen gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert.

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \sigma(f, Z, B, g) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Satz:

Ist g auf $[a, b]$ monoton wachsend, so gilt :

1. $\underline{\sigma}(f, Z, g) \leq \sigma(f, Z, B, g) \leq \overline{\sigma}(f, Z, g) \quad \forall Z, B$
2. $\int_a^b f dg$ existiert genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} (\overline{\sigma}(f, Z, g) - \underline{\sigma}(f, Z, g)) = 0.$$

3. aus der Existenz von $\int_a^b f dg$ folgt die des entsprechenden Darboux-Stieltjes-Integrals und dessen Gleichheit mit $\int_a^b f dg$.

Funktionen von beschränkter Variation

Definition:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$, so definieren wir:

$$P(f) := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

2. Die Totalvariation von f auf $[a, b]$:

$$V_a^b(f) := \sup_Z P(f)$$

3. f ist von beschränkter Variation, also
 $f \in BV[a, b] \Leftrightarrow V_a^b(f) < \infty$

Lemma:

Es gilt $f \in BV[a, b]$ genau dann, wenn zwei monoton steigende Funktionen g und h so existieren, dass $f = g - h$ auf $[a, b]$.

Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Linearität bezüglich f und g . Wenn die Integrale $\int_a^b f_i dg$ und $\int_a^b f dg_i$ existieren ($i = 1, 2$), dann existieren auch die folgenden Integrale, und es gilt

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dg = \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg,$$

$$\int_a^b f d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f dg_2.$$

Für $a < c < b$ gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

wenn alle drei Integrale existieren.

Satz:

Sei $f \in C^0(I)$ und $g \in BV(I)$, dann gilt

- ▶ $\int_a^b f dg$ existiert,
- ▶ $\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$

Satz:

Haben f und g an der selben Stelle $c \in [a, b]$ eine Unstetigkeitsstelle, so existiert das RS-Integral $\int_a^b f dg$ nicht.

Satz:

Partielle Integration: Mit $\int_a^b fdg$ existiert auch $\int_a^b gdf$, und es gilt

$$\int_a^b fdg + \int_a^b gdf = fg|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Satz

Transformation in ein Riemann-Integral: Ist f Riemann-integrierbar und $g \in C^1(I)$, so existiert $\int_a^b f dg$, und es gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dt.$$

Jedes Integral $\int_a^b fh dt$ lässt sich also als RS-Integral

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = \int_a^b f(t)dg(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \int_a^t h(s)ds$$

schreiben, falls f Riemann-integrierbar und h stetig ist.

Beispiel:

$$\int_0^{\pi} \cos t \, d(\sin t) = \int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}\pi$$
$$\int_0^{\pi} \cos t \, d(\cos t) = - \int_0^{\pi} \cos t \cdot \sin t \, dt = 0.$$

Satz:

- ▶ f ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar
- ▶ g ist auf $[a, b]$ mit Ausnahme endlich vieler Sprungstellen c_1, \dots, c_n differenzierbar
- ▶ $\int_a^b |g'(x)| dx < \infty$

so folgt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f(c_j),$$

wobei α_j die Sprunghöhe von g an c_j ist.

Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale

Satz:

Erster Mittelwertsatz: Existiert $\int_a^b f dg$ und ist g in $I = [a, b]$ wachsend, so ist

$$\int_a^b f dg = \mu \int_a^b dg = \mu[g(b) - g(a)] \quad \text{mit} \quad \inf_I f \leq \mu \leq \sup_I f$$

Ist f stetig, $\exists \xi \in I$ mit $\mu = f(\xi)$.

Satz:

Zweiter Mittelwertsatz: Die Funktion f sei im Intervall $I = [a, b]$ monoton, und g sei stetig in I :

Das Integral $\int_a^b f dg$ existiert, und $\exists c \in I$ mit

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg \\ &= f(a)[g(c) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(c)].\end{aligned}$$

Kurvenintegrale

Definition:

Es sei $I = [a, b]$ und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Darstellung einer rektifizierbaren Jordankurve $C = \phi(I)$ mit der Längenfunktion $s(t) := L(\phi([a, t]))$.

Sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$.

Das folgende Riemann-Stieltjes

$$\int_C f(x) ds := \int_a^b f(\phi(t)) ds(t)$$

nennt man das **Kurvenintegral** von f über die Kurve C bezüglich der Bogenlänge.

Eine Kurve C sei mit kontinuierlich verteilter Masse belegt, und es sei $\rho(x)$ die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit) im Punkt $x \in C$.

Die Gesamtmasse M und der Schwerpunkt S dieser Massenbelegung von C sind durch die RS-Integrale

$$M = \int_C \rho(x) ds, \quad S = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x) ds$$

gegeben.

Darstellungssatz von Riesz

Satz:

Sei $T \in C'[a, b]$. Dann existiert ein $\alpha \in BV[a, b]$ mit

$$T(f) = T_\alpha(f) := \int_a^b f d\alpha$$

für alle $f \in C[a, b]$. Außerdem kann α so gewählt werden, dass $V_a^b(\alpha) = \|T\|$ und $\alpha(a) = 0$.

Bemerkung: $C'[a, b]$ ist die Menge aller linearen, beschränkten Abbildungen $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei (Ω, \mathcal{A}, W) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (Ω', \mathcal{A}') ein Messraum.

- ▶ Jede messbare Funktion $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ heißt Zufallsvariable.
- ▶ Als Verteilung von X bezeichnet man das Bildmaß

$$\mathbb{P} := W^X := W(X^{-1}(A)) \quad A \in \mathcal{A}'.$$

Damit wird $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Wir bezeichnen

$$\mathbb{E} g \circ X := \int_{\Omega} g \circ X dW = \int_{\Omega'} g d\mathbb{P},$$

mit $g : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und g meßbar, als Erwartungswert von $g \circ X$.

Mit $g := id_{\mathbb{R}}$ erhalten wir den Erwartungswert von X .

$$\mathbb{E} id_{\mathbb{R}} \circ X := \int_{\Omega} X dW.$$

Ist F die Verteilungsfunktion von X so kann man den Erwartungswert von X auch als Lebesgue-Stieltjes-Integral darstellen.

$$\mathbb{E} id_{\mathbb{R}} \circ X := \int x dF$$

Integration nach einer Brownschen Bewegung

In der Finanzmathematik ist das Integrieren nach einer Brownschen Bewegung von großer Bedeutung.

Definition:

Jede Zufallsvariable Z_t heißt stochastisches Integral, falls:

$$Z_t = \int_0^t X dB := \int_0^t X_s dB_s$$

für geeignete reelle stochastische Prozesse $(X_t)_{t \geq 0}$ bezüglich einer reellen normalen Brownschen Bewegung.

Satz:

Fast sicher jeder Pfad einer d -dimensionalen Brownschen Bewegung ist auf jedem Intervall $[s, t]$ mit $0 \leq s < t < \infty$ von unbeschränkter Variation.

Das mit dB_s behaftete Integral erscheint auf den ersten Blick sinnlos, jedoch gelang es dem japanischen Mathematiker KIYOSCHI ITÔ das stochastische Integral sinnvoll zu definieren.

Man versucht ein Integral Z_t für $t > 0$ als geeigneten Grenzwert von Summen der Form

$$S_Z := \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

zu definieren, wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ eine Unterteilung von $[0, t]$ ist und $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

- ▶ Definition des stochastischen Integrals durch den \mathcal{L}^2 -Limes von S_Z für $|Z| \rightarrow 0$.
- ▶ Die Auswahl der Zwischenpunkte τ_j ist wesentlich.
- ▶ **Itô-Integral** $\int_0^t X dB$ wird stets $\tau_j = t_{j-1}$ gewählt.