

Seminar aus Finanz- und
Versicherungsmathematik Optimale
Portfoliotheorie basierend auf
Präferenzen

Konrad Piasecki
0626505
SS 2009

27. August 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Präferenzbeziehungen und deren Formalisierung	3
3	Von Neumann - Morgenstern Repräsentation	8
4	Erwarteter Nutzen	12
5	Uniforme Präferenzen	17
6	Literaturverzeichnis	20

1 Einleitung

Nutzenfunktionen werden in vielen Bereichen der Wirtschaft verwendet um Zahlungsströme aus Sicht der Marktteilnehmer denen sie zu Gute kommen zu vergleichen. Dabei wird einer gegebenen Auszahlung ein Nutzen zugeordnet.

In der Volkswirtschaftslehre wird oftmals davon ausgegangen dass ein Konsens über den Nutzen eines Gutes vorliegt. Hierbei wird des öfteren postuliert, dass der Grenznutzen, d.h. der Nutzen einer zusätzlichen Einheit eines Gutes abnimmt, und gegen 0 konvergiert¹.

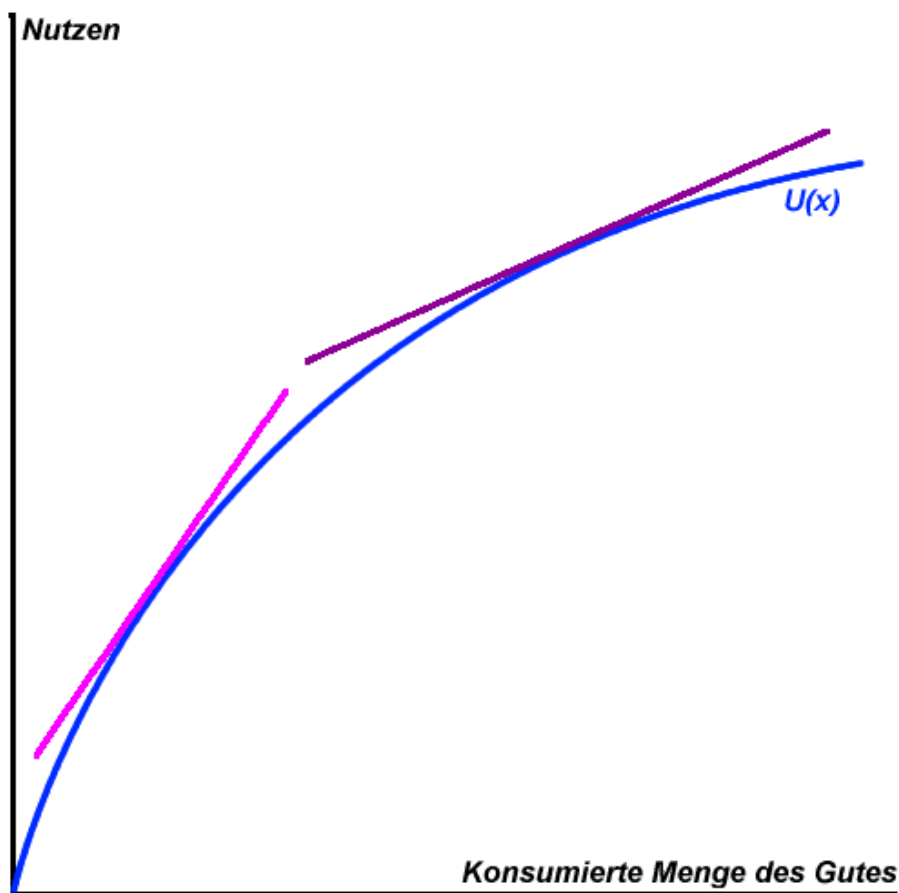


Abbildung 1: Nutzenfunktion

Die Tangenten bezeichnen dabei die Steigung an eine gegebenen Stelle. Da Güter für Geld gekauft werden, ist es naheliegend auch Zahlungsströmen

¹In vielen Staaten wird beispielweise die Progressive Besteuerung dadurch begründet dass der Grenznutzen zusätzlichen Einkommens sinkt

Nutzenwerte zuzuordnen.

Nun mag sich die Frage stellen was die Werte der Nutzenfunktion überhaupt darstellen. Wir werden für diese zunächst für bestimmbare Ergebnisse gegebene Zahlenwerte annehmen. In weiterer Folge wird es sinnreich erscheinen diese durch die Erwartungswerte jeweils zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu ersetzen.

2 Präferenzbeziehungen und deren Formalisierung

Sei X eine nicht leere Menge von Nutzenwerten (diese sind in unserem Fall Geldbeträgen zuzuordnen, doch ist es genauso gut möglich beliebigen Gütern Nutzenwerte zuzuordnen) und seien $x, y \in X$ Nutzenwerte aus dieser Menge. dann gelten für diese folgende Voraussetzungen:

Asymetrie wenn $x > y$ dann nicht $x < y$

Negative Transivität Wenn $x > y$ muss für ein beliebiges anderes $z \in X$ entweder $x > z$ oder $z > y$ oder beides gelten. Durch diese Eigenschaft kann bei Hinzufügen einer beliebigen neuen Wahlmöglichkeit gewährleistet werden dass es weiterhin ein bestes und schlechtestes Element in unserer Auswahl gibt.

Schwache Präferenzordnung Diese ist durch $x \geq y \Leftrightarrow y \not> x$ gegeben.

Indifferenzordnung Gilt $x \sim y$ so auch $y \geq x$ und $x \geq y$, dies bedeutet dass weder x noch y bevorzugt wird.

Theorem Für die Existenz einer Präferenzfunktion $>$ ist es notwendig dass X eine abzählbare Teilmenge Z enthält mit den Untermengen von X :

$$\begin{aligned}\bar{Z}(x) &= \{z \in Z | z > x\} \\ \underline{Z}(x) &= \{z \in Z | z < x\}\end{aligned}$$

Gilt $x \geq y$ so auch $\bar{Z}(x) \subseteq \bar{Z}(y)$ und $\underline{Z}(x) \supseteq \underline{Z}(y)$, bei $x > y$ ist zudem mindestens eine der Aussagen exakt.

Beweis Man nehme $z \in Z$ so dass $x \geq z \geq y$ und $x > z \geq y$ (1) oder $x \geq z > y$ (2), woraus sich jeweils ergibt: $z \in \underline{Z}(x) \setminus \underline{Z}(y)$ (1) bzw $z \in \overline{Z}(y) \setminus \overline{Z}(x)$ (2)

Anschliessend nehme man eine strikt positive Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf Z und definiere

$$U(x) = \sum_{z \in \underline{Z}} \mu - \sum_{z \in \overline{Z}} \mu \quad (1)$$

Somit gilt nach der Gleichung $U(x) > U(y)$ nur dann wenn $x > y$ womit U eine numerische Repräsentation des gewählten Nutzens darstellt.

Beweis Man nehme einen numerischen Repräsentanten U , und definiere die abzählbare Menge J also:

$$J : \{[a, b] \mid a, b \in Q, a < b, U^{-1}([a, b]) \neq \emptyset\} \quad (2)$$

Für jedes I aus J kann ein $z_1 \in X$ mit $U(z_1) \in I$ gewählt, und eine abzählbare Menge definiert werden:

$$A : \{z_1 \mid I \in J\} \quad (3)$$

Nun mag A auf den ersten Blick als geeigneter Kandidat für das (order dense set) erscheinen, allerdings können $x, y \in R$ vorkommen, so dass $U(x) < U(y)$ ohne dass es ein z gibt für welches analoges gelte: $U(x) < U(z) < U(y)$. Demnach müsste es ein z im (order dense set) enthalten geben, so dass $U(z) = U(x)$ oder $U(z) = U(y)$, was aber von A nicht festgesetzt bzw garantiert werden kann.

Wir definieren daher die Menge C aller Paare (x, y) für die gilt, dass es zu ihnen kein passendes $z \in A$ gibt, so dass:

$$C := \{(x, y) \mid x, y \in X \setminus A, y > x \text{ und } \exists z \in A \text{ mit } y > z > x\} \quad (4)$$

Die Aussage $(x, y) \in C$ impliziert somit, dass wir kein $z \in X$ zu finden vermögen, für welches $y > z > x$ gelten würde, woraus folgt dass wir kein Intervall $a, b \in Q$ bestimmen können, so dass gilt

$$U(x) < a < U(z) < b < U(y) \quad (5)$$

So dass $Z := (a, b)$ in J enthalten wäre, und $z_1 \in A$ mit $y > z_1 > x$ (Widerspruch zu $(x, y) \in C$). es folgt dass die Intervalle $(U(x), U(y))$ disjunkt sein müssen, und es abzählbar viele von ihnen gibt. Für jedes Intervall J wählen wir nun $x^J, y^J \in J$ mit $U(x^J), U(y^J)$ als Endpunkten von J , und definieren B als die abzählbare Menge der x^J und y^J .

Man nehme an, $Z := AB$ sei (open dense set) in X , $x, y \in X \setminus Z$ impliziert die Existenz eines $z \in A$ so dass $y > z > x$ oder $(x, y) \in C$. Im anderen fall gibt es ein $z \in B$ mit $Uy = U(z) > Ux$ und daraus folgend $y \geq z > x$.

Beispiel angenommen es gäbe eine lexikographische Ordnung $>$ auf $x[0, 1] \times [0, 1] : (x_1, x_2) > (y_1, y_2)$. wenn entweder $x_1 > y_1$ oder $x_1 = y_1$ und gleichzeitig $x_2 > y_2$. Um zu zeigen dass es keine numerische Repräsentation geben kann nehme man an es gäbe eine solche Repräsentation U . Somit gälte $\forall \alpha \in [0, 1]$:

$$d(\alpha) = U(\alpha, 1) - U(\alpha, 0) \quad (6)$$

ist strikt positiv für alle α , womit gelten würde:

$$[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid d(\alpha) > \frac{1}{n} \right\} \quad (7)$$

Es ist $A_n := \{ \alpha \mid d(\alpha) > \frac{1}{n} \}$, es gibt also mindestens eine Menge A_n mit unendlich vielen Elementen, so dass gilt: $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Aufgrund von $(\alpha_{i+1}, 0) > (\alpha_i, 1)$ folgt:

$$U(\alpha_{i+1}, 0) - U(\alpha_i, 0) > U(\alpha_i, 1) - U(\alpha_i, 0) = d(\alpha_i) > \frac{1}{n_0} \quad (8)$$

Es gilt somit:

$$\begin{aligned} U(1, 1) - U(0, 0) &= U(1, 1) - U(\alpha_N, 0) + \sum_{i=1}^{N-1} [U(\alpha_{i+1}, 0) - U(\alpha_i, 0)] \\ &\quad + U(\alpha_i, 0) - U(0, 0) > \frac{N-1}{n_0} \end{aligned}$$

Da N beliebig groß für fixe n_0 gewählt werden kann würde $U(1, 1) - U(0, 0)$ unendlich, was unzulässig ist.

Sei X des weiteren ein topologischer Raum. Eine Präferenzfunktion $>$ heißt stetig wenn für alle $x \in X$ gilt:

$$\overline{B}(x) = \{y \in X \mid y > x\} \text{ und } \underline{B}(x) = \{y \in X \mid x > y\} \quad (9)$$

sind offene Untermengen von X

Anmerkung Jede Präferenzordnung die eine numerische stetige Repräsentation erzeugt ist selbst stetig.

Anmerkung die lexikographische Ordnung aus dem obigen Beispiel ist nicht stetig, für gegebenes $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ergibt sich:

$$\{(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) > (x_1, x_1)\} = (x_1, 1] \times [0, 1] \cup \{x_1\} \times (x_2, 1] \quad (10)$$

was kein Unterraum von $[0, 1] \times [0, 1]$ ist.

Anmerkung X ist ein Hausdorfraum, wenn beliebige zwei Punkte das X disjunkte Umgebungen haben, daher ist der vorliegende metrische Raum ein Hausdorfraum.

Sei $>$ eine Präferenzordnung auf dem topologischen Hausdorfraum X , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $>$ ist stetig
- b) Die Menge $\{(x, y) | y > x\}$ ist offen in $X \times X$
- c) Die Menge $\{(x, y) | y \geq x\}$ ist geschlossen in $X \times X$

Beweis $(a) \Rightarrow (b)$ Man zeige dass für jedes Paar $(x_0, y_0) \in M := \{(x, y) | y > x\}$ offene Mengen $U, V \subset M$ existieren, so dass $x_0 \in U, y_0 \in V$ und $U \times V \subset M$. Wir betrachten zunächst den Fall dass es ein $z \in \overline{B}(x_0) \times \underline{B}(y_0)$ gibt so dass für diese gilt: $y_0 > z > x_0$. Dann gilt: $U = \underline{B}(x)$ und $V = \overline{B}(z)$ sind offene Umgebungen von x_0 und y_0 . Gilt weiters $x \in U$ und $y \in V$ so gilt $y > z > x$ und damit $U \times V \subset M$.

Ist der Schnitt von $\overline{B}(x_0)$ und $\underline{B}(y_0)$ die leere Menge, setzen wir $U = \underline{B}(y_0), V = \overline{B}(x_0)$. Wenn $(x, y) \in U \times V$ gilt $y_0 > x$ und $y > x_0$ per Definition. Um zu zeigen dass $U \times V \subset M$ haben wir zu zeigen dass $y > x$ im Folgenden aus der Negation gezeigt werden soll. Aus $x \geq y$ folgt aufgrund der negativen Transitivität $y_0 > y$ weil $y_0 > y > x_0$. dann gälte aber $y \in \overline{B}(x_0) \cup \underline{B}(y_0)$. Da diese Vereinigung eine leere Menge ist stellt dies einen Widerspruch dar.

Beweis $(b) \Rightarrow (c)$ Man betrachte den Homomorphismus $\phi(x, y) := (y, x)$ auf $X \times X$. Dann ist $\{(x, y) | y \geq x\}$ das Komplement der offenen Menge $\phi\{(x, y) | y > x\}$

Beweis $(c) \Rightarrow (a)$ Da X ein Hausdorfraum ist, $\{x\} \times X$ abgeschlossen in $X \times X$, also die Menge

$$\{x\} \times X \cap \{(x, y) | y \geq x\} = \{x\} \cap \{y | y \geq x\} \quad (11)$$

Folglich $\{y | y \geq x\}$ abgeschlossen und sein Komplement $\{y | x > y\}$ offen. Das gleiche gilt für $\{y | y > x\}$

Beispiel für $x_0 < y_0$ betrachten wir $X := (-\infty, x_0] \cup [y_0, \infty)$ mit $>$ auf \mathbb{R} . Dann sind $\underline{B}(y_0) = (-\infty, x_0], \overline{B}(x_0) = [y_0, \infty)$. Daher $\overline{B}(x_0) \cap \underline{B}(y_0) = \emptyset$. Wir wissen dass X als zusammenhängend bezeichnet wird, wenn es nicht als Vereinigung disjunkter Mengen dargestellt werden kann, Wäre X zusammenhängend würde obige Darstellung unmöglich.

Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum mit stetiger Präferenzordnung $>$. dann ist jede dichte Untermenge $Z \subset X$ auch (order dense) in X , es gibt eine numerische Repräsentation $>$ wenn X separabel ist.

Beweis $x, y \in X$ mit $y > x : y \in \overline{B}(x), x \in \underline{B}(y)$ daher sind die Mengen nicht disjunkt, weil X zusammenhängend ist. Daher muss die offene Menge $\overline{B}(x) \cap \underline{B}(y)$ ein $z \in Z$ enthalten, so dass $y > z > x$ womit Z (ods) von X ist.

Separabilität würde bedeuten, dass es eine abzählbare (ods) Untermenge Z zu X gilt, woraus die Existenz einer numerischen Repräsentation folgt.

Anmerkung Es sei $X := (-\infty, x_0][y_0, \infty)$ mit $x_0, y_0 \in C$. dann ist $Z := \mathbb{Q} \cap X$ dicht auf X , aber es gibt kein $z \in Z$ so dass $y_0 \geq z \geq x_0$. Dies zeigt die Notwendigkeit topologischer Verbundenheit für vorhergehende Behauptung.

Theorem Sei X ein topologischer Raum der wahlweise (1) eine abzählbare Basis aus offenen Mengen besitzt (2) separabel und verbunden ist, so existiert zu einer stetigen Präferenzordnung stets eine numerische Repräsentation.

Lemma Sei X ein verbundener metrischer Raum, mit fortsetzbarer stetiger Präferenzordnung $>$. Wenn $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, und auf einer dichten Untermenge Z eine numerische Repräsentation von $>$ auf Z ist, so ist U auch eine numerische Repräsentation auf ganz X .

Beweis Man zeige $y > x$ dann und nur dann wenn $U(y) > U(x)$. Man wähle wieder $y > z_0 > x$ mit $z_0 \in Z$. Unter Wiederholung der Argumentation erhält man mit $z'_0 : z_0 > z'_0 > x$. Weiters nehme man $z_n \rightarrow y$ und $z'_n \rightarrow x$ so dass

$$z_n > z_0 > z'_0 > z'_n \quad (12)$$

und daher

$$U(z_n) > U(z_0) > U(z'_0) > U(z'_n) \quad (13)$$

Dies impliziert aufgrund der Fortsetzbarkeit $U(z_n) \rightarrow U(y)$ mit $U(z'_n) \rightarrow U(x)$ und somit:

$$U(y) \geq U(z_0) > U(z'_0) \geq U(x) \quad (14)$$

Gegenrichtung: $x, y \in X$ $U(y) > U(x)$ Aufgrund der stetigen Fortsetzbarkeit von U gilt:

$$\overline{U}(x) = \{z \in X | U(z) > U(x)\} \quad (15)$$

$$\underline{U}(y) = \{z \in X | U(z) < U(y)\} \quad (16)$$

sind beide nichtleere Teilmengen von X . Weiters gilt $\underline{U}(y) \cup \overline{U}(x) = X$. Da die Menge zusammenhängend ist kann der Schnitt $\underline{U}(y) \cap \overline{U}(x)$ nicht die leere Menge sein, Somit kann weiters festgesetzt werden: (mit $z_0, z'_0 \in Z$)

$$U(y) > (z_0) > (z_0) > U(x) \quad (17)$$

da Z wieder dichte Untermenge von X ist findet man Sequenzen $z_n \rightarrow y$ und $z'_n \rightarrow x$ in Z so dass $U(z_n) > U(z_0)$ und $U(z'_n) < U(z'_0)$. Da U numerische Repräsentation von $>$ auf X ist gilt:

$$z_n > z_0 > z'_0 > z'_n \quad (18)$$

Da weder $z_0 > y$ noch $x > z_0$ gelten können folgt $y > x$

3 Von Neumann - Morgenstern Repräsentation

Ein Schwachpunkt der oben beschriebenen Repräsentation ist die Nichtvergleichbarkeit der Nutzenwerte von Gütern unterschiedlicher Eigenschaft, Vereinfacht gesagt kann man einer Menge Wurstsemmeln einen Nutzenwert zuordnen welcher mit Zunahme der Zahl der angebotenen Semmeln steigen wird. Ein Vergleich mit den Nutzenwerten ebenfalls angebotener Hemden ist bei Nichtverkäuflichkeit beider Artikel offensichtlich schlecht möglich. Können die Artikel jedoch im Zuge einer Lotterie gewonnen werden, und ist es dem Probanden möglich seinen Einsatz selbst unter Kenntnis der Gewinnwahrscheinlichkeit zu wählen, erhält man wieder vergleichbare Nutzenwerte. Angenommen dass jeder Auszahlung eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird, kann X als Untermenge M von $M_1(S, \delta)$ der Menge aller Verteilungen auf dem Maßraum verstanden werden, Die Elemente von M werden hierbei als *lotteries* bezeichnet. Wir werden versuchen die Präferenzordnung $>$ auf M zu charakterisieren, um eine numerische Repräsentation der Form

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(x)dx \quad \forall \mu \in M \quad (19)$$

mit u als Funktion von S . Erfüllt die numerische Repräsentation einer Ordnung $>$ obiges Theorem wird sie als Von Neumann - Morgenstern Repräsentation bezeichnet,

Eine Von Neumann - Morgenstern Repräsentation U ist offen auf M im Sinne:

$$U(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)(U(\nu)) \quad (20)$$

$\forall \nu, \mu \in M$ und $\alpha \in [0, 1]$ Daraus folgen die unterstehenden Definitionen:

- 1 Die Präferenzrelation $>$ auf M erfüllt das **Unabhängigkeitsaxiom** wenn $\forall \mu, \nu \in M \mu > \nu$ impliziert ($\forall \lambda \in M$ und $\alpha \in [0, 1]$)

$$\alpha\mu + (1 - \alpha) > \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda \quad (21)$$

- 2 Eine Präferenzrelation $>$ auf M erfüllt das **Archimedische Axiom** wenn für jedes Tripel $\mu > \lambda > \nu$ für $(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ gilt:

$$\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu > \lambda > \beta\mu + (1 - \beta)\nu \quad (22)$$

Das Archimedische Axiom stammt ursprünglich aus der Analysis, wo es besagt dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n gibt, so dass: $n\epsilon > x$. Es wird auch als Kontinuitätsaxiom bezeichnet, weil es als Ersatz für die Kontinuität von $>$ auf einer passenden Topologie auf M dienen kann. (z.B. eine Topologie auf der konvexe Kombinationen konvexe Kurven sind, so dass: $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$ gegen μ oder ν konvergiert für $\alpha \rightarrow 0$ oder $\alpha \rightarrow 1$)

Theorem Sei $>$ eine Präferenzrelation auf M welche beide Axiome erfüllt. dann gibt es eine affine numerische Repräsentation U von $>$. Ist weiters U eindeutig bezüglich affiner Transformationen so hat jede weitere affine numerische Repräsentation U^* die Form: $U^* = a * U + b$ für $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

Im Folgenden werden wie eine einfache Schreibweise für Wahrscheinlichkeitsverteilungen benötigen, wir formulieren hierfür:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{x_i} \quad (23)$$

- 1 Sei M die Menge aller einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S mit $>$ als Präferenzordnung auf M so dass sie beide der obigen Axiome erfüllt. Dann existiert eine Von Neumann Morgenstern Umgebung U so dass U und u eindeutig bezüglich aller positiven affinen Transformationen sind.

Beweis Sei U eine offene numerische Repräsentation mit $u(x) = U(\delta(x))$ für $x \in S$. Weiters habe μ die Form $\alpha_1 \delta_{x_1} \dots \alpha_N \delta_{x_N}$ dann impliziert die Affinität von U :

$$U(\mu) = \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\delta_{x_i}) = \int u(X) \mu(dx) \quad (24)$$

was die gesuchte Neuman Morgenstern Repräsentation ist.

2 Sei M die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der abgeschlossenen Menge S mit Präferenzordnung $>$ und Erfüllung der beiden Axiome. Dann gib es eine Neuman Morgenstern Repräsentation die eindeutig bezüglich aller affinen Transformationen.

Unter Voraussetzung obigen Theorems gelten folgende Annahmen als wahr:

- a** Wenn $\mu > \nu$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ dann auch $\beta\mu + (1-\beta)\nu > \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$
- b** Wenn $\mu > \nu$ und $\mu \leq \lambda \leq \mu$ existiert ein eindeutiges $\alpha \in [0, 1]$ mit $\lambda \sim \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$
- c** Wenn $\mu \sim \nu$ dann auch $\alpha\mu + (1-\alpha)\lambda \sim \alpha\nu + (1-\alpha)\lambda \forall \alpha \in [0, 1]$ und alle $\lambda \in M$

Ist M die Menge aller endlichen Wahrscheinlichkeitsmaße auf der abgeschlossenen Menge S so ist jede affine numerische Repräsentation eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation. Für eine unendliche Menge S kann es jedoch vorkommen dass eine Von Neuman Morgenstern Repräsentation nicht existiert:

Beispiel Sei M die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf $S := \{1, 2, \dots\}$ für die ein affines, beide Axiome erfüllendes $U(\mu) := \lim_{k \uparrow \infty} k\mu(k)$ existiert und endlich ist. Klarerweise ist U nicht unbedingt eine Von Neuman Morgenstern Repräsentation.

Beispiel Sei M die Menge aller Borelmaße auf $S := [0, 1]$ und λ das Lebesquemaß auf S . Es kann also jedes μ dargestellt werden als:

$$\mu = \mu_s + \mu_a \tag{25}$$

mit sigulärem μ_s und stetigem μ_a . Wir definieren daher eine affine Funktion $U : M \rightarrow [0, 1]$:

$$U(\mu) := \int x\mu_a(dx) \tag{26}$$

U induziert eine Präferenzordnung auf M welche beide Axiome erfüllt, sie kann aber keine Von Neumann Morgenstern Repräsentation haben, da gilt: $U(\delta_x) = 0 \forall x$ und daher $u \equiv 0$ die Präferenzfunktion wäre somit trivial im Sinne $\mu \sim \lambda \forall \mu \in M$

Eine Möglichkeit eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation zu finden ist es weitere Eigenschaften von $>$ festzulegen. Wie bereits bekannt das archimedische Axiom automatisch für konvexe Kombinationen, und ist für die Topologie auf M stetig, also auch für die schwache Topologie auf der

Menge $M_1(S, \mathfrak{S})$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf S abgeschlossen durch Borelmengen \mathfrak{S} . Wie schreiben daher: $M_1(S) = M_1(S, \mathfrak{S})$

Theorem Sei $M := M_1(S)$ der Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf S abgeschlossen mit der schwachen Topologie und sei $>$ eine das Unabhängigkeitsaxiom erfüllende Präferenzordnung auf M . Dann Gibt es eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation mit stetiger beschränkter Funktion; $u : S \rightarrow \mathbb{R}$. U und u seinen eindeutig bezüglich affiner Transformationen.

Obiges Theorem kann nur im Zusammenhang mit beschränkten Funktionen verwendet werden, was nicht ausreichend ist, weil wir im nächsten Abschnitt risikoaverse Nutzenfunktionen kennenlernen werden, welche als konkave u im raum $S = \mathbb{R}$ auftreten. So eine Funktion kann, außer sie ist konstant nie beschränkt sein.

Wir müssen also die gegebenen strikten Bedingungen ein wenig aufweichen:

- 1 Man wähle einen Punkt $x_0 \in S$ und definiere $\overline{B}_r(x_0)$ eine Kugel mit Radius r um x_0 . Es gilt somit:

$$M_b(S) := \bigcup_{i \geq 0} M_1(\overline{B}_r(x_0)) = \{\mu \in M_1(S) | \mu(\overline{B}_r(x_0)) = 1 \forall r \geq 0\} \quad (27)$$

Sei $>$ eine Präferenzordnung auf $M_b(S)$ die eingeschränkt auf $M_1(\overline{B}_r(x_0))$ stetig ist bezüglich der schwachen Topologie. Erfüllt $>$ das Unabhängigkeitsaxiom existiert eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation mit einer stetigen Funktion $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ und u, U eindeutig bzgl affiner Transformationen.

- 2 Sei ψ eine stetige Funktion auf $[1, \infty)$ auf dem separablen metrischen Raum S . Wir definieren mit der Riemannintegrierbaren Funktion ψ

$$M_1^\psi(S) := \{\mu \in M_1(S) | \int \psi(x) dx < \infty\} \quad (28)$$

Der Raum der Testfunktionen für Maße in $M_1^\psi(S)$ ist dann

$$C_\psi(S) := \{f \in C(S) | \exists c : |f(x)| \leq c\psi(x) \forall x \in S\} \quad (29)$$

Nun können die Testfunktionen analog zur Definition einer Topologie verwendet werden wie eine Menge beschränkter stetiger Funktionen verwendet werden kann um die schwache Topologie zu definieren: Eine Folge μ_n auf M_1^ψ konvergent gegen ein $\mu \in M_1^\psi(S)$ dann und nur dann wenn:

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu \forall f \in C_\psi(S) \quad (30)$$

Wir werden die gewählte Topologie fortan als ψ -schwache Topologie auf $M_1^\psi(S)$ bezeichnen. Im trivialen Fall $\psi \equiv 1$ besteht $C_\psi(S)$ aus allen beschränkten stetigen Funktionen und wir erhalten die klassische schwache Topologie $M_1'(S) = M_1(S)$. Für unbeschränkte ψ erhält man somit Von Neumann Morgenstern Repräsentationen von unbeschränkten u .

Theorem Ist $>$ eine Präferenzordnung auf $M_1^\psi(S)$ die auf der ψ Topologie stetig ist, und das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt, so existiert eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation bekannter Form.

Beispiel: Allais Paradox Gegeben sei eine Lotterie mit der Auszahlung ν_1 ² und die sichere Auszahlung μ :

$$\nu_1 = 0.33\delta_{2500} + 0.66\delta_{2400} + 0.01\delta_0; \mathbb{E} = 2409 \quad (31)$$

$$\mu_1 := \delta_{2400} \quad (32)$$

Bei einer Befragung wurde μ_1 mit 82 % bevorzugt. Anschließend betrachten wir die Lotterien μ_2, ν_2 :

$$\mu_2 := 0.34\delta_{2400} + 0.66\delta_0; \mathbb{E} = 816 \quad (33)$$

$$\nu_2 := 0.33\delta_{2500} + 0.67\delta_0; \mathbb{E} = 825 \quad (34)$$

wobei die Befragten dem höheren Erwartungswert entsprechend zu 83 % die riskantere Lotterie ν_2 bevorzugten. Da die Probanden jeweils an beiden Lotterien teilnahmen erscheint die Von Neumann Morgenstern Theorie auf den ersten Blick empirisch widerlegt.

4 Erwarteter Nutzen

Wir definieren M als Menge von Borelmaßen auf $S \subset \mathbb{R}$. Wir nehmen weiters an dass M konvex ist und alle δ_x für $x \in S$ enthält, und definieren für jedes $\mu \in M$ ³

$$m(\mu) := \int x\mu(dx) \in \mathbb{R} \quad (35)$$

$$\text{Monotonie : } x > y \Rightarrow \delta_x > \delta_y \quad (36)$$

$$\text{Risikoaversität : } \delta_{m(\mu)} > \mu \text{ dennoch } \mu = \delta_{m(\mu)} \quad (37)$$

²Die Indizes von δ sind die Auszahlungen

³ $m(\mu)$ wird oft als *fairer Preis* für einen zukünftigen Zahlungsstrom bezeichnet

Es habe \succ eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation der Form:

$$U(\mu) = \int u d\mu \quad (38)$$

Dann gilt:

a \succ ist monoton $\iff u$ ist streng monoton steigend

b \succ ist risikoavers $\iff u$ ist streng konkav

Anmerkung Es kann beobachtet werden dass die Entscheidungsträger zwischen risikoaverm und risikofreudigen Verhalten wechseln können, was formell darstellbar ist als:

$$u(x) = \begin{cases} (x - c)^\gamma & \text{für } x \geq c \\ -\lambda(c - x)^\gamma & \text{für } x < c \end{cases} \quad (39)$$

mit Schranke c . In weiterer Folge werden wir allerdings nur risikoaverses Verhalten betrachten.

Eine Funktion $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ wird als Nutzenfunktion bezeichnet wenn sie konkav, monoton steigend und stetig auf S ist. Wir nehmen an dass es zu \succ eine Von Neumann Morgenstern Repräsentation geben muss, wobei für jedem $\mu \in M$ ein Sicherheitsäquivalent⁴ $c\mu$ zugeordnet werden kann.

$$u(c(\mu)) = U(\mu) = \int u d\mu \quad (40)$$

so dass folgt

$$\delta_{c(\mu)} \sim \mu \quad (41)$$

Die Risikoprämie einer Lotterie ergibt sich somit als

$$\rho(\mu) := m(\mu) - c(\mu) \quad (42)$$

Aufgrund der Jensenschen Ungleichung gilt $c(\mu) \leq m(\mu)$, und $c(\mu) < m(\mu) \iff \mu \neq \delta_{m(\mu)}$ weswegen die Risikoprämie immer positiv ist.

⁴Das Sicherheitsäquivalent kann auch als obere Schranke für einen zulässigen Preis einer Auszahlung betrachtete werden

Beispiel: St. Petersburg Paradoxon Bei einem Glücksspiel wird eine Münze geworfen, ist das Ergebnis des n -ten Wurfes erstmalig "Kopf" beträgt die Auszahlung 2^{n-1} . Es ergibt sich somit:

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_{2^{n-1}} \quad (43)$$

Der faire Preis wäre daher ∞ , doch würde sich zu diesem Preis niemand erklären an der Lotterie teilzunehmen, vielmehr entspricht der Betrag den ein Teilnehmer zu zahlen bereit wäre den Ergebnissen die Bernoulli und Cramer unabhängig voneinander erhielten:

	Nutzenfunktion	Sicherheitsäquivalent
Bernoulli	$u_1(x) = \sqrt{x}$	$c_1(\mu) = (2 - \sqrt{2})^{-1} = 2.91$
Cramer	$u_2(x) = \log x$	$c_2(\mu) = 2$

Tabelle 1: example caption

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und nach unten beschränkt durch ein $a \in S$. Gesucht ist nun die nutzenmaximierende Mischung aus X und c .

$$X_\lambda := (1 - \lambda)X + \lambda c \quad (44)$$

X_λ habe den Nutzen $\mathbb{E}[u(X_\lambda)]$ und die Verteilung μ_λ . Dann ist das Maximum von

$$f(\lambda) := U(\mu_\lambda) = \int u d\mu_\lambda \quad (45)$$

für f auf $[0, 1]$ ein Punkt $\lambda^* \in [0, 1]$ Es gilt weiters:

a Wenn $\mathbb{E}[X] \leq c$ gilt: $\lambda^* = 1$, wenn $c \geq c(\mu)$ gilt: $\lambda^* > 0$

b Wenn $u \in C^1(\mathbb{R})$

$$\lambda^* = 1 \iff \mathbb{E}[X] \leq c \quad (46)$$

$$\lambda^* = 0 \iff c \leq \frac{\mathbb{E}[Xu'(X)]}{\mathbb{E}[u'(X)]} \quad (47)$$

Beispiel Sei S^1 ein Asset mit Preis π^1 , w der zu investierende Geldbetrag, und r der verzinsungsfaktor eines risikolosen Bonds. Dann gilt für das Portfolio:

$$X_\lambda = \frac{(1-\lambda)w}{\pi^1}(S^1 - \pi) + \lambda w \cdot r \quad (48)$$

dass keine Anlage in das Asset erfolgt dann und nur dann wenn:

$$\mathbb{E} \left[\frac{S^1}{1+r} \right] \leq \pi^1 \quad (49)$$

was bedeutet dass der Preis des Assets unter der diskontierten Auszahlung liegen muss.

Beispiel: Bedarf nach Versicherung In Alltag, wie auch auf den Finanzmärkten besteht die Möglichkeit einen Schaden, bzw. allgemeiner einen Vermögensverlust zu versichern. Dabei erscheint auf den ersten Blick die Versicherung eines Schadens nur dann sinnvoll wenn die Versicherungsprämie den Erwartungswert des Schadens nicht überschreitet.

Zu berücksichtigen sein dürfte jedoch auch, dass ein Konsument der eine Versicherung abschließt befürchten muss nicht den erwarteten Schaden nach dem Gesetz der großen Zahl⁵ zu realisieren, sondern um die Vernichtung seiner Existenz bangen müsste wenn der zu versichernde Schaden tatsächlich eintritt.

Angenommen es bestehe die Möglichkeit eines Verlustes $Y : 0 \leq Y \leq w$ und $P[Y \neq [Y]] > 0$ und einer Versicherung des Verlustes λY zum Preis $\lambda \pi$. Die Auszahlung ergibt sich somit:

$$X_\lambda := w - Y + \lambda(Y - \pi) = (1-\lambda)(w - Y) + \lambda(w - \pi) \quad (50)$$

Klarerweise wäre eine Versicherung nur dann sinnvoll wenn die Prämie den diskontierten Verlust nicht übersteigt, was in der Realität nie der Fall ist.

Für die Risikoprämie ergibt sich mit der Nutzenfunktion u aus der Taylorreihenentwicklung:

$$\rho(\mu) \approx \frac{u''(m)}{2u'(m)} \text{var}(\mu) =: \frac{1}{2} \alpha(m) \text{var}(\mu) \quad (51)$$

Der Entscheidungsträger gewichtet das Risiko $\frac{1}{2} \text{var}(\mu)$ mit einem Faktor $\alpha(m(\mu))$ der für zwei Mal differenzierbares u als

$$\alpha(x) = \frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (52)$$

⁵z.B. durch die Feuerversicherung mehrerer hundert Eigenheime

dargestellt werden kann, und auch als Arrow-Pratt Koeffizient bezeichnet wird. Beispiele für Risikoaverse Nutzenfunktionen sind:

CARA Constant absolute Risk Aversion: $\alpha(x)$ entspricht einer strikt positiven Konstante, da $\alpha(x) = -(\log u')'(x)$ und affin transformiert

$$u(x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad (53)$$

HARA Hyperbolic absolute Risk Aversion $\alpha(x) = (1 - \gamma)/x$ auf $S = (0, \infty)$ für $\gamma \in [0, 1)$

$$u(x) = \begin{cases} \log x & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{1}{\gamma} x^\gamma & \text{für } 0 < \gamma < 1 \end{cases} \quad (54)$$

Seien u und \tilde{u} zweimal differenzierbare Nutzenfunktionen, und $\alpha, \tilde{\alpha}$ die zugehörigen Arrow Pratt Koeffizienten, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a $\alpha(x) \geq \tilde{\alpha}(x) \forall x \in S$

b $u = F \circ \tilde{u}$ für streng monoton steigende Funktionen F

c Für die Risikoprämien ρ und $\tilde{\rho}$ gilt $\rho \geq \tilde{\rho}$

Wir wollen fernerhin annehmen dass S nach oben hin nicht beschränkt ist so dass $w + x \in S \forall x \in S, w \geq 0$, und für die Nutzenfunktion ergibt sich $u_w(x) := u(w + x)$ was bedeutet dass die Nutzenfunktion in Abhängigkeit vom Vermögen variieren kann, so dass:

$$\int u(w + x) \mu(dx) < u(w) \quad (55)$$

Ungehindert dessen kann, wenn nicht die Veranlagung der gesamten Summe erfolgt, durchaus auch $\mathbb{E}[u(w + x * X)] > u(w)$ gelten. Wir ein μ unabhängig von w nicht angenommen ist die Nutzenfunktion u von oben beschränkt, so dass:

$$\nu := \frac{1}{2}(\delta_{-A} + \delta_\infty) \quad (56)$$

Gesetz der großen Zahl Ein Entscheidungsträger erklärt sich nicht bereit einmalig an einer Lotterie teilzunehmen, würde dies aber bei n-facher Wiederholung tun weil dann die tatsächliche Auszahlung gegen ihren Erwartungswert konvergiert. Dies stellt allerdings nach unserem bisherigen Modell einen Widerspruch dar. Es sei daher

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (57)$$

die akkumulierte Auszahlung von n Wiederholungen mit Mittelwert der Auszahlung $m(\mu_n) = n \cdot m(\mu)$ dem Sicherheitsäquivalent $c(\mu_n)$ und der Risikoprämie $\rho(\mu : n) = n \cdot m(\mu) - c(\mu_n)$. Nach dem Kolmogoroffschen Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$c_n := \frac{c(\mu_n)}{n} \quad (58)$$

$$\rho_n := \frac{\rho(\mu_n)}{n} = m(\mu) - c_n \quad (59)$$

Aus Gleichung (52) folgt weiters:

$$\rho_n \approx \frac{1}{2n} \alpha(m(\mu_n)) \text{var}(\mu_n) = \frac{1}{2} \alpha(n \cdot m(\mu)) \text{var}(\mu) \quad (60)$$

Woraus ersichtlich ist dass die Risikoprämie dann und nur dann gegen Null konvergiert wenn α für wachsende n ebenfalls gegen 0 konvergiert.

5 Uniforme Präferenzen

Seien μ und ν Lotterien auf M . Wir sagen eine Lotterie wird Uniform (formell: $\mu \geq_{uni} \nu$) bevorzugt gegenüber einer anderen wenn:

$$\int u d\mu \geq \int u d\nu \text{ für alle Nutzenfunktionen } u \quad (61)$$

Die uniforme Präferenz ist Reflexiv, Transitiv und Asymmetrisch. Für jedes Paar $\mu, \nu \in M$ gelten folgende Aussagen als Äquivalent:

a $\mu \geq_{uni} \nu$

b $\int f d\mu \geq \int f d\nu$ für alle monoton steigenden konkaven Funktionen f

c

$$\int (c - x)^+ \mu(dx) \leq \int (c - x)^+ \nu(dx) \quad (62)$$

d Sind F, G Verteilungsfunktionen von μ, ν so gilt:

$$\int_{-\infty}^c F(x) dx \leq \int_{-\infty}^c G(x) dx \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (63)$$

e Auf dem die Zufallsvariablen X, Y enthaltenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) gilt

$$\mathbb{E}[Y|X] \leq X \text{ f.s.} \quad (64)$$

f Es gibt eine Übergangswahrscheinlichkeit $Q(x, dy)$ auf \mathbb{R} so dass $Q(x, \cdot) \in M$ und $m(Q(x, \cdot)) \leq x \forall x$ so dass $\nu = \mu Q$ für

$$\mu Q(A) := \int Q(x, A) \mu(dx) \text{ für Borelmengen } A \subset \mathbb{R} \quad (65)$$

Die Dichte einer Normalverteilung ist gegeben durch:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R} \quad (66)$$

Für zwei Normalverteilungen gilt somit

$$N(m, \sigma^2) \geq_{uni} N(\tilde{m}, \tilde{\sigma}^2) \iff m \geq \tilde{m} \text{ und } \sigma^2 \leq \tilde{\sigma}^2 \quad (67)$$

Die Varianz wird definiert als:

$$var(\mu) := \int (x - m(\mu)) \mu(dx) = \int x^2 \mu(dx) - m(\mu)^2 \in [0, \infty] \quad (68)$$

Sind μ, ν Lotterien auf M so dass $m(\mu) = m(\nu)$ und $\mu \geq_{uni} \nu$ dann gilt $var(\mu) \leq var(\nu)$. Im finanzmathematischen Kontext werden Portfolios oftmals auf Basis der Varianz verglichen:

$$\mu \geq \nu \iff m(\mu) \geq m(\nu) \text{ und } var(\mu) \leq var(\nu) \quad (69)$$

Definition Eine Zufallsvariable Y sei Lognormalverteilt mit $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$ auf (Ω, F, P) :

$$Y = \exp(\alpha + \sigma X) \quad (70)$$

Mit der Verteilungsfunktion

$$P[Y \leq y] = \Phi\left(\frac{\log y - \alpha}{\sigma}\right), 0 < y < \infty \quad (71)$$

der Dichte

$$\Psi(y) = \frac{1}{\sigma \cdot y} \varphi\left(\frac{\log y - \alpha}{\sigma}\right) \cdot I_{(0, \infty)}(y) \quad (72)$$

Das p-te Moment ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}[Y^p] = \exp\left(p\alpha + \frac{1}{2}p^2\sigma^2\right) \quad (73)$$

Der Erwartungswert von $m(\mu)$

$$m(\mu) = \mathbb{E}[Y] = \exp\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad (74)$$

und die Varianz durch

$$\text{var}(\mu) = \exp(2\alpha + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) \quad (75)$$

Seien nunmehr μ und $\tilde{\mu}$ zwei Lognormalverteilungen mit Parametern (α, σ) und $(\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma})$. Dann gilt:

$$\mu \geq_{uni} \tilde{\mu} \iff \sigma^2 \leq \tilde{\sigma}^2 \text{ und } \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 \geq \tilde{\alpha} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \quad (76)$$

Seien μ und ν zwei Lotterien in M . Wir definieren die Ordnung $\mu \geq_{con} \nu$:

$$\int f d\mu \geq \int f d\nu \text{ Für alle konvexen Funktionen } f \text{ auf } \mathbb{R} \quad (77)$$

sie wird als konkave stochastische Ordnung bezeichnet. Ihr entgegengesetzt ist die Balayageordnung, welche obige Gleichung auf konvexe Funktionen anwendet.

Analog kann gezeigt werden, dass unabhängig vom vermuteten Verlauf der Präferenzordnung der Marktteilnehmer eine eindeutige Reihung der Portfolios möglich ist, Die Anwendbarkeit auf die Lognormalverteilung ist hier besonders hervor zu heben, da das zur Optionsbepreisung verwendete Black-Scholes Modell sich Ihrer bedient.

6 Literaturverzeichnis

Hans Föllmer, Alexander Schied (2005) Stochastic Finance; Kapitel 2: Preferences S44-99 ; de Gruyter zweite Ausgabe

<http://de.wikipedia.org/wiki/Nutzenfunktion>