Optimale Rückversicherung

Stephanie Puchstein
0500833

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Rückversicherung ist die Versicherung der Versicherer.

Die Versicherung, mit der der Versicherungsnehmer einen Vertrag abgeschlossen hat, überträgt einen Teil des Risikos aus dem Versicherungsverhältnis mit dem Versicherungsnehmer einem anderen Versicherer (=Rückversicherer) zu einem entsprechenden Beitrags- bzw. Prämienanteil.
Durch Rückversicherung schützt sich der Erstversicherer vor der Gefahr nicht kalkulierbare Vermögensschäden zu erleiden. Auch gibt die Rückversicherung dem Erstversicherer die Möglichkeit, Wagnisse zu versichern, die wegen ihrer Höhe oder ihrer Gefährlichkeit seine wirtschaftliche Kraft übersteigen würden.

Es gibt zwei wesentliche Grundformen der Risikoteilung:

1. Bei der *proportionalen Risikoteilung* wird die Schadenvariable X (entweder die Schadenshöhe pro Schadenfall oder der Jahresgesamtschaden) in der Form

$$X = cX + (1-c)X, 0 < c < 1$$

   in die beiden Teile cX und $(1-c)X$ aufgeteilt.

2. Bei der *nichtproportionalen Risikoteilung* wird die Schadenvariable X in der Form

$$X = min(X, a) + max(X - a, 0), a > 0$$

   in das Erstrisiko $min(X, a)$ und das Zweitrisiko $max(X - a, 0)$ aufgeteilt.

Während bei der proportionalen Risikoteilung stets beide Seiten involviert sind, ist dei der nichtproportionalen Risikoteilung das Zweitrisiko nicht involviert, wenn die Teilungsgrenze a vom Schaden nicht überschritten wird.

2 Gründe und Formen einer Risikoteilung zwischen Erst- und Rückversicherer

Der Effekt einer gemeinsamen Tragung von Risiken wird als *Risikoausgleich im Kollektiv* bezeichnet. Dadurch wird das Schätz- und Zufallsrisiko des Versicherungsunternehmers verringert, ein gewisses Restrisiko bleibt dennoch.

Stellt ein Versicherungsunternehmen nun fest, dass seine (Netto-) Prämieneinnamhe b seine Gesamtschadenverteilung G und sein Sicherheitskapital c zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit $G(b+c)$ führen, die ihm zu niedrig ist, so kann er sich Versicherungsschutz bei anderen Versicherungsunternehmen oder bei eigens darauf spezialisierten Rückversicherungsunternehmen kaufen.

Diese Möglichkeit, einen Teil der übernommenen ungewissen Schadenkosten wieder durch fixe Kosten zu ersetzen, wird Rückversicherung genannt. Sie ist in der Regel einfacher als die Alternativen Erhöhungen der Prämieneinnahme, Erhöhung des Sicherheitskapitals oder Verbesserung der Gesamtschadenverteilung (z.B. durch Bedingungsänderungen oder Kündigung einzelner Risiken) und erlaubt es dem Erstversicherer auch Risiken zu übernehmen, die wegen ihrer Größe seinen Ausgleich eher verschlechtern.

Somit kann also durch Rückversicherung eine Verringerung des versicherungstechnischen Risikos bewirkt werden. Rückversicherung bewirkt eine Erhöhung der Zeichnungskapazität oder kann als Ersatz für eine Sicherheitskapitalerhöhung angesehen werden.
Jedes Versicherungsunternehmen, das einem anderen Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz gewährt, wird in diesem Zusammenhang als Rückversicherer bezeichnet, während das Unternehmen, das die Originalpolizzen ausstellt, Erstversicherer genannt wird.
In der Praxis hat fast jedes Versicherungsunternehmen Rückversicherungsverträge mit einem oder mehreren Rückversicherern abgeschlossen. Zwischen Rückversicherer und Versicherungsnehmer existiert keine Vertragsbeziehung. Versicherungsnehmer wissen auch nicht, ob sie rückversichert sind, da der Erstversicherer auch bei rückversicherten Polizzen weiterhin voll für Prämienfestsetzung und Schadenregulierung zuständig ist.

2.1 Vertragsform

Man unterscheidet zwischen fakultativer und obligatorischer Rückversicherung.

2.1.1 fakultative Rückversicherung

Hier werden einzelne Großrisiken unter mehreren Versicherungsnehmern aufgeteilt.

2.1.2 obligatorische Rückversicherung

Dieser überwiegende Teil erfolgt innerhalb eines Vertrages zwischen Erst- und Rückversicherer, in dem für alle im Vertragszeitrum des Erstversicherers befindlichen Risiken genau festgelegt ist, welchen Teil welcher Risiken bzw. Schäden der Rückversicherer zu tragen hat und welche Prämie er dafür erhält.

Rückversicherungsverträge laufen üblicherweise ein Jahr und beziehen sich aus Gründen der Transparenz meist nur auf eine einzige Branche. Für die Aufteilung der Risiken bzw. Schäden haben sich folgende Formen herausgebildet:

2.2 Formen der proportionalen Rückversicherung

1. *Quoten-Rückversicherung:* Der Rückversicherer übernimmt einen festen, überall gleichen Prozentsatz von allen Polizzen.

2. *Summenexzedenten-Rückversicherung:* Während das Aufteilungsverhältnis $c : (1-c)$ zwischen Erst- und Rückversicherer bei der Quotenversicherung bei allen Risiken gleich ist, variiert es beim Summenexzedenten in Abhängigkeit von der Versicherungssumme v des jeweiligen Risikos derart, dass der Selbstbehaltsanteil $c = c(v) = min(v_0/v, 1)$ beträgt, d.h. der Erstversicherer behält Risiken mit Versicherungssumme $v < v_0$ ganz selbst und beteiligt den Rückversicherer nur bei Risiken mit Versicherungssumme über v_0 und zwar derart, dass der Rückversicherer jeweils den Anteil übernimmt, der der über v_0 hinausgehenden Versicherungssumme entspricht. Sonst ist alles wie bei der Quoten-Rückversicherung, d.h. pro Risiko mit Versicherungssumme v werden Prämien und Schäden im Verhältnis $c(v)$ zu $1 - c(v)$ aufgeteilt. Es handelt sich also um eine rein proportionale Risikoteilung, wobei aber der Selbstbehaltsanteil $c(v)$ nicht in proportionaler Weise von der Versicherungssumme v abhängt. Durch Vereinbarung einer Summenexzedenten-Rückversicherung wird eine Homogenisierung bzw. Stutzung der Versicherungssummen im Selbstbehalt des Erstversicherers bewirkt. Üblicherweise wird im Rückversicherungsvertrag noch die vom Rückversicherer zu übernehmende Versicherungssumme durch einen Maximalbetrag mv_0 begrenzt, d.h. der Rückversicherer übernimmt von einem Risiko mit Versicherungssumme v nicht den Anteil $1 - c(v)$, sondern

$$min(1 - c(v), mv_0/v) = min(max(v - v_0, 0), mv_0)/v$$

wobei $m \geq 1$. Damit weiß der Rückversicherer schon bei Vertragsabschluss, dass er pro Einzelschaden unabhängig vom betroffenen Risiko auf keinen Fall mehr als den Betrag mv_0 zu bezahlen hat.

2.3 Formen der nichtproportionalen Rückversicherung

1. *Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung:* Der Erstversicherer trägt von allen Schäden X, egal von welchen der unter Vertrag fallenden Risiken, das Erstrisiko $min(X, a_0)$ bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_0, *Priorität* genannt, selbst, während der Rückversicherer den etwa übersteigenden Teil $max(X - a_0, 0)$ zu zahlen hat, in der Regel ebenfalls nur bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_1, also $min(max(X - a_0, 0), a_1)$. Ein etwaiger Schadenteil oberhalb $a_0 + a_1$, also $max(X - a_0 - a_1, 0)$ geht wieder zu Lasten des Erstversicherers, falls nicht eine weitere Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $a_0 + a_1$ besteht. Die dem Rückversicherer zustehende Prämie hängt von der vermuteten Anzahl und Höhe von Schäden über a_0 sowie der Höhe von a_1 ab und ist letztlich Verhandlungssache. Die Kalkulation von Prämien für Schadenexzedenten-Rückversicherungsverträge ist ein wichtiges Teilgebiet der Rückversicherungs-Mathematk.

2. *Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung:* Diese Form der Rückversicherung ist analog zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung, allerdings mit der Ausnahme, dass sich der Schadenbetrag X, der der Priorität gegenübergestellt wird, auf die Summe aller Einzelschäden des Erstversicherers aus einem einzelnen Schadenereignis (z.B. Sturm, Erdbeben) bezieht, da sich z.B. bei einem Sturm gleichzeitig eine große Zahl kleinerer Schäden ereignen kann.

3. *Jahresüberschaden-Rückversicherung oder Stop Loss:* Dies ist die Fortsetzung der Schadenexzedenten-Rückversicherung vom Einzelschaden über den Kumulschaden auf den Jahresschaden. Übersteigt der Gesamtschaden S des Erstversicherers aus einem Jahr (und einer Branche) die vereinbarte Priorität s_0, so übernimmt der Rückversicherer den übersteigenden Teil bis zu einer vereinbarten Höchstgrenze s_1. In der Praxis sind Gesamtschäden oberhalb $s_0 + s_1$ sehr unwahrscheinlich - daher gewährt diese Form dem Erstversicherer offenkundig den umfassendsten Schutz, indem sie sein Schadenpotential auf s_0 begrenzt, so dass das versicherungstechnische Risiko fast vollständig auf den Rückversicherer übergeht.

Diese Rückversicherungsformen werden - auch innerhalb einer einzelnen Branche - häufig miteinander kombiniert, um so Schutz gegen das Frequenzrisiko und das Großschadenrisiko zu erreichen. Prinzipiell können auch in der Rückversicherung beliebige Risikoteilungsformen vereinbart werden.

3 Entscheidung über Form und Umfang der Risikoteilung

Bei jeder Risikoteilung sind von beiden involvierten Seiten zwei prinzipielle Entscheidungen zu treffen:

1. Die Form der Risikoteilung muss festgelegt werden, z.B. proportional ($X = cX + (1-c)X$) oder nicht nichtproportional ($X = min(X,a) + max(X-a,0)$), und ob sich X auf den Einzel-, Kumul- oder Jahresschaden bezieht.

2. Der Umfang der Risikoteilung muss festgelegt werden, also z.B. bei rein proportionaler Risikoteilung das Aufteilungsverhältnis $c : (1-c)$ oder bei rein nichtproportionaler Risikoteilung die Höhe der Schadensgrenze a.

In der Erstversicherung, insbesondere im Massengeschäft, werden praktisch nur genormte Versicherungsverträge angeboten, sodass der Entscheidungsspielraum des Versicherungsnehmers oft nur zwischen den Extrema „vollständiger Risikotransfer“ oder „vollständige Risikoselbsttragung“ besteht.

In der Rückversicherung sind die beiden Vertragspartner hingegen gleichberechtigt und schließen miteinander eine individuelle Risikoteilungsvereinbarung ab, sodass tatsächlich weitgehende Entscheidungsfreiheit besteht.

Ein Rückversicherungsvertrag regelt die Teilung des Jahresgesamtschadens S des Erstversicherers in einer bestimmten Versicherungssparte. Dabei wird ein Teil R, $0 < R < S$, von S auf den Rückversicherer transferiert zusammen mit einer Prämie $b(R)$.

Bezeichnet b die zu S gehörende, um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieneinnahme des Erstversicherers, so hat dieser das betriebswirtschaftliche Ergebnis

$$b - S \ldots \text{vor Rückversicherung}$$

mit dem Ergebnis

$$b - S - (b(R) - R) - k_1 \ldots \text{nach Rückversicherung}$$

zu vergleichen, wobei k_1 die durch die Rückversicherung eventuell zusätzlich verursachten (Verwaltungs-)Kosten des Erstversicherers sind. (Alle Beträge seien auf den Zeitpunkt des Vertragsbeginns diskontiert.) k_1 kann von Form und Umfang der Rückversicherung abhängen.

Der Rückversicherer hat als betriebswirtschaftliches Ergebnis aus diesem Vertrag 0 **vor** und $b(R) - R - k_2$ **nach** Vertragsabschluss, wobei k_2 seine auf diesen Vertag entfallenden Akquisitions- und Verwaltungskosten sind (einschließlich seines kalkulatorischen Schwankungszuschlags). $b(R)$ muss also mindesten so hoch sein wie $E(R) + k_2$, wenn der Rückversicherer nicht auf Dauer Verlust machen will. Auch k_2 kann von Art und Umfang des Rückversicherungsvertrages abhängen. Erst- und Rückversicherer zusammen haben also nach Rückversicherung ein um $k_1 + k_2$ schlechteres betriebswirtschaftliches Ergebnis als vor Rückversicherung.

Aus dieser Darstellung der Entscheidungssituation bei Rückversicherung ergeben sich zwei Probleme:

1. Es ist zu klären, ob die durch Rückversicherung entstehenden zusätzlichen *Transaktionskosten* $k_0 = k_1 + k_2$ durch *Synergieeffekte* wieder wettgemacht werden können.

2. Es muss ein Modell entwickelt werden, anhand dessen der Erstversicherer bezüglich eines konkreten Rückversicherungsvertrages entscheiden kann, ob die Variante ohne oder die mit Rückversicherung - und wenn ja: welche? - für ihn günstiger ist.

3.1 Modelle zur Bewertung von Risikoteilungen

In Abschnitt 2 wurde als Ursache der Rückversicherung die Tatsache genannt, dass verfügbare Prämie und Sicherheitskapital des Erstversicherers nicht zu dem von ihm gewünschten Sicherheitsniveau führen. Eine andere Möglichkeit als Rückversicherung wäre die Erhöhung des Sicherheitskapitals. Daher liegt es auf der Hand, die Möglichkeit *„Rückversicherung“* mit der Alternative *„Erhöhung des Sicherheitskapitals“* zu vergleichen.
Bei geeigneter Rückversicherung wird ein Teil des Schwankungszuschlages

frei, der dann im Allgemeinen zur Deckung der Transaktionskosten ausreicht, sodass es nicht zwingend zu einer Erhöhung der Originalprämien kommen muss. Dabei ist klar, dass sich der insgesamt vorteilhafte Transfer auch nur dann für jeden der beiden Beteiligten lohnt, wenn der Original-Schwankungszuschlag so aufgeteilt wird, dass jeder die ihm anfallenden Transaktionskosten und den nach Risikoteilung noch erforderlichen Schwankungszuschlag decken kann.
Es kommt also entscheidend auf die richtige Bemessung der Rückversicherungsprämie an: Sie muss mindestens so hoch sein, dass sie Betriebskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers deckt, aber höchstens so hoch, dass dem Erstversicherer genügend bleibt, um seinerseits Transaktionskosten und Schwankungszuschlag erwirtschaften zu können. Hier zeichnet sich schon ab, dass die Bemessung der Rückversicherungsprämie eine äußerst wichtige Rolle spielt.

Das Portefeuille eines Erstversicherers könnte mit der Quoten-Rückversicherung so rückversichert werden, dass bei unverändertem Kapital ein höheres Sicherheitsniveau erreich werden könnte. Dies wäre auch mit jeder anderen Rückversicherungsform möglich, da alle Rückversicherungsformen im Prinzip Risikoteilungen jedes Umfangs zwischen „alles“ und „nichts“ zulassen. Natürlich wird der Erstversicherer diejenige Rückversicherungsform $(R, b(R))$ bevorzugen, die ihm bei gleichem Sicherheitsniveau den größten Anteil vom Schwankungszuschlag lässt.
Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
S &= \text{Gesamtschaden des Erstversicherers} \\
b &= \text{um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämien-} \\
& \text{einnahme des Erstversicherers} \\
R &= \text{auf den Rückversicherer transferierter Teil von } S \\
b(R) &= \text{Rückversicherungsprämie inkl. Verwaltungskosten und} \\
& \text{Schwankungszuschlag des Rückversicherers} \\
Q &= S - R = \text{Selbstbehalts-Gesamtschaden des Erstversicherers} \\
b(Q) &= b - b(R) = \text{Selbstbehaltsprämie}
\end{aligned}$$

lautet also das *Entscheidungsprinzip des Erstversicherers* (wobei zur einfacheren Darstellung angenommen wird, dass die Transaktionskosten k_1 des Erstversicherers in $b(R)$ stecken):
„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass für den Selbstbehalt $Q = S - R$ das angestrebte Sicherheitsniveau erreicht ist und das erwartete Selbstbehaltser-

gebnis $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$ maximal ist.“
Dabei interessiert uns jetzt nur noch die Wahl der geeigneten Rückversicherungsform und nicht mehr die Frage, ob die Rückversicherung überhaupt vorteilhaft für den Erstversicherer ist. Falls es (z.B. wegen hoher Rückversicherungspreise) einmal für den Erstversicherer keine vorteilhafte Rückversicherung geben sollte, muss er sein Sicherheitskapital oder seine Prämieneinnahme erhöhen oder sich von einigen seiner Risiken trennen oder das niedrigere Sicherheitsniveau vorübergehend akzeptieren.

Das Sicherheitsniveau bei gegebenem Sicherheitskapital c haben wir bisher mittels des *Modells der einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P(S > b + c) \text{ bzw. } P(Q > b(Q) + c)$$

quantifiziert. Unter der Annahme, dass S und Q normalverteilt sind und dass der kalkulatorische Gewinn $b - E(S)$ bzw. $b(Q) - E(Q)$ an die Kapitalgeber ausgeschüttet wird, sind diese Wahrscheinlichkeiten gleich

$$1 - \phi(c/Sta(S)) \text{ bzw. } 1 - 1 - \phi(c/Sta(Q))$$

wenn ϕ die Standard-Normalverteilung bezeichnet. In diesem Fall ist das Erreichen einer bestimmten Verlust-Wahrscheinlichkeit gleichbedeutend mit dem Erreichen einer bestimmten (niedrigen) Varianz $Var(Q) = (Sta(Q))^2$ des Selbstbehalt-Gesamtschadens. Zwar ist die Normalverteilung, insbesondere bei S, in der Regel nicht gegeben, doch ist die Varianz auch ohne Normalverteilung ein intuitiv einleuchtendes Sicherheitskriterium und außerdem analytisch einfacher zu behandeln als die Gesamtschadenverteilung. Daher ermöglicht das *Varianzmodell* einige interessante allgemeine Aussagen:
„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass die Selbstbehaltsvarianz $Var(Q)$ das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q)$ möglichst groß ist.“
Eine weitere Möglichkeit der Quantifizierung des Sicherheitsniveaus eines Portefeuilles besteht in der so genannten Ruinwahrscheinlichkeit, die ein kontinuierliches mehrjähriges Analogon zur einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit ist. Dieses von der Risikotheorie entwickelte Kriterium hat sich jedoch in der Praxis nicht etablieren können. Da es auch analytisch nicht so leicht in den Griff zu bekommen ist, wird - wenn überhaupt - meist mit einer von Cramér/Lundberg stammenden Abschätzung gearbeitet. Dann kommt das Kriterium aber sehr nahe an den Spezialfall des *Nutzenmodells*, das die von der betriebswirtschaftlichen Entscheidungstheorie bevorzugte Vorgehensweise ist. Hierbei wird jedes mögliche Selbstbehaltsereignis $x = b(Q) - Q$ mithilfe einer Nutzenfunktion $u(x)$ bewertet, für die $u^{'}(x) > 0$ (d.h. je höher das Ergebnis, desto besser) und $u^{''}(x) < 0$ gilt (d.h. eine Erhöhung des Ergebnisses

um einen festen Betrag ist umso weniger erstrebenswert, je höher das Ergebnis bereits ist: Risikoaversion). Das angestrebte Sicherheitsniveau kommt in der speziellen Wahl der Nutzenfunktion u zum Ausdruck.
Gemäß dem Nutzenmodell wird die Rückversicherung so gewählt, dass der Erwartungswert des Nutzens des resultierenden Selbstbehaltergebnisses möglichst groß wird:
„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass bei gegebenem Sicherheitskapital c und gegebener Nutzenfunktion u die Nutzenerwartung $E(u(c + b(Q) - Q))$ möglichst groß ist.“
Problematisch am Nutzenmodell ist die Tatsache, dass unklar ist, welche Nutzenfunktion u der Erstversicherer seinen Entscheidungen zugrunde legen soll. Zwar liefert die axiomatische Fundierung der Nutzentheorie im Prinzip ein Verfahren, die Nutzenfunktion eines rational handelnden Entscheidungsträgers zu ermitteln, doch sind entsprechende Resultate für Versicherungsunternehmen nicht bekannt. Bei theoretischen Untersuchungen ist die Familie der exponentiellen Nutzenfunktionen

$$u(x) = (1 - e^{-rx}/)r,$$

wobei der Parameter $r > 0$ den Grad der Risikoaversion angibt, beliebt, weil sie analytisch besonders einfach zu behandeln ist. Aber statt den Grad der Risikoaversion r festzulegen, ist es anschaulicher, das gewünschte Varianzniveau oder die einjährige Verlustwahrscheinlichkeit vorzugeben.
Schließlich ist noch anzumerken, dass das Modell mit der Verlustwahrscheinlichkeit und das Varianzmodell jeweils folgende zur vorigen äquivalente Formulierung besitzen:

Verlustwahrscheinlichkeitsmodell:
„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Verlustwahrscheinlichkeit $P(Q > b(Q) + c)$ möglichst klein wird.“
Varianz-Modell:
„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Varianz $Var(Q)$ möglichst klein wird.“

Auch das Nutzenmodell kann bei Beschränkung auf exponentielle Nutzenfunktionen analog formuliert werden und zwar so, dass bei gegebenem Mindestnutzen die Risikoaversion maximiert wird. Dass diese Formulierungen äquivalent sind, überlegt man sich mittels Widerspruchsbeweis.
Die für diese Modelle ableitbaren allgemeinen Resultate sind sehr ähnlich, d.h. der Vergleich zweier verschiedener Rückversicherungsvarianten führt unter allen genannten Modellen im Allgemeinen zum gleichen Ergebnis.

3.2 Einseitige Optimierung bei gegebenen Transaktionskosten

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die in der Rückversicherungsprämie $b(R)$ steckenden Transaktionskosten bei der Rückversicherungsentscheidung eine große Rolle spielen und dass ihre Höhe darüber entscheidet, ob ein Rückversicherungsvertrag aus Sicht jedes Beteiligten überhaupt sinnvoll ist. Um gemäß einem der vorgestellten Entscheidungsmodelle die optimale Rückversicherungsform aus Sicht des Erstversicherers finden zu können, müsste also für alle in Betracht kommenden Rückversicherungsformen die Höhe der Transaktionskosten bekannt sein. In der Praxis ist das natürlich eine unrealistische Forderung. Dort kann der Erstversicherer allenfalls Angebote für einige wenige Varianten einholen und stellt dann wahrscheinlich fest, dass selbst bei diesen wenigen Varianten die Entscheidung sehr unsicher bleibt, weil er die (künftige) Verteilung seines Gesamtschadens S - und damit auch von Q und R - gerade im relevanten Großschadenbereich nicht genau genug kennt.
Wenn man auf analytischem Weg zu Antworten kommen will, muss man von einem idealisierten funktionalen Ansatz der Transaktionskosten ausgehen. Zwei solche Ansätze werden in den beiden Sätzen gemäß dem Varianzmodell analysiert. Dabei werden die *Transaktionskosten* als die Veränderung

$$\begin{aligned} k(R) &= b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) \\ &= b(R) - E(R) \end{aligned}$$

des erwarteten betriebswirtschaftlichen Ergebnisses vor bzw. nach Rückversicherung definiert, d.h. als der im Mittel durch Rückversicherung abfließende Betrag. (Formal sind das die in Abschnitt 3 mit k_2 bezeichneten Kosten, doch kann, solange wir nur die Situation des Erstversicherers untersuchen, $b(R)$ auch die durch Rückversicherung beim Erstversicherer zusätzlich entstehenden Verwaltungskosten k_1 beinhalten.) Die beiden folgenden Sätze geben eine explizite Lösung für die Fälle, wo für die Transaktionskosten $k(R)$ zum Beispiel $k(R) = \alpha_1 E(R)$, $k(R) = \alpha_2 Sta(R)$ oder $k(R) = \alpha_3 Var(R)$ gilt. Dabei benutzen wir das Varianzmodell in der am Ende des vorigen Abschnittes angegebenen Form, d.h. wir gehen von einem vorgegebenen Höchstniveau der Transaktionskosten $k(R)$ aus und minimieren die Selbstbehaltsvarianz $Var(Q)$.

Satz(Borch, Kahn, Pesonen)
Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen R gleiche Funktion g des Erwartungswerts $E(R)$, d.h. $k(R) = g(E(R))$, so ist

gemäß dem Varianzmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis Die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung ist bei Gesamtschaden S und Priorität $a > 0$ gegeben durch den Selbstbehaltsschaden $Q_a = min(S, a)$ und den Rückversicherungsschaden $R_a = max(S - a, 0)$.
Sei $(R, b(R))$ eine beliebige Rückversicherungsform mit Transaktionskosten $k(R) = g(E(R))$. Dann wählen wir a so, dass $E(R_a) = E(R)$ und damit auch $k(R_a) = k(R)$ gilt. Das ist stets möglich, da $E(R_a)$ stetig monoton fallend in a ist mit $E(R_0) = E(S) \geq E(R)$ und $E(R_\infty) = 0 \leq E(R)$. Es genügt zu zeigen, dass $Var(Q_a) \leq Var(Q) = Var(S - R)$ gilt.
Zunächst nehmen wir an, dass sich der zu R gehörende Selbstbehaltsschaden $Q = S - R$ als Funktion $Q = t(S)$ des Gesamtschadens darstellen lässt, wie dies auch bei $Q_a = Q_a(S) = min(S, a)$ der Fall ist. Mit der Verteilungsfunktion G von S gilt dann:

$$\begin{aligned} E(Q-a)^2 &= \int_0^\infty (t(s)-a)^2 dG(s) \\ &\geq \int_0^a (t(s)-a)^2 dG(s) \\ &\geq \int_0^a (s-a)^2 dG(s) \qquad\qquad \text{(wegen } Q \leq S\text{)} \\ &= \int_0^a (Q_a(s)-a)^2 dG(s) \\ &= \int_0^\infty (Q_a(s)-a)^2 dG(s) \\ &= E(Q_a-a)^2 \end{aligned}$$

Wegen $E(Q_a) = E(S) - E(R_a) = E(Q)$ folgt:

$$\begin{aligned} Var(Q) &= Var(Q-a) = E(Q-a)^2 - (E(Q-a))^2 \\ &\geq E(Q_a-a)^2 - (E(Q_a-a))^2 = Var(Q_a-a) \\ &= Var(Q_a) \end{aligned}$$

Damit ist der Satz für die Rückversicherungsformen bewiesen, bei denen sich der Erstversicherungsschaden Q als Funktion $Q = t(S)$ des Gesamtschadens S darstellen lässt. Für Summen- oder Schadenexzedenten-Rückversicherung ist das allerdings nicht erfüllt. $\square$

Satz(Beard, Pentikäinen, Peson)
Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen gleiche monoton wachsende Funktion $k(R) = h(Var(R))$ der Varianz des Rückversicherungsschadens R, so ist gemäß dem Varianzmodell die Quoten-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis Sei $(R, b(R))$ eine beliebige Rückversicherungsform mit Transaktionskosten $k(R) = h(Var(R))$. Wir können $Var(R) \leq Var(S)$ annehmen, denn sonst ist die vollständige Quoten-Rückversicherung $R_1 = S$ trivialerweise günstiger als R. Daher gibt es ein $q \leq 1$ mit $Var/qS) = Var(R)$, und die durch das Aufteilungsverhältnis $(1-q) : q$ von S gegebene Quoten-Rückversicherung hat dieselbe Transaktionskosten wie R. Wegen der allgemeinen Eigenschaft

$$\tfrac{Cov(S,R)}{Sta(S)Sta(R)} \leq 1$$

des Korrelationskoeffizienten von R und S wird unter Benutzung von $Var(R) = q^2 Var(S)$

$$\begin{aligned} Var(Q) &= Var(Q - R) \\ &= Var(S) - 2Cov(S,R) + Var(R) \\ &\geq Var(S) - 2Sta(S)Sta(R) + Var(R) \\ &= Var(S) - 2qVar(S) + q^2 Var(S) \\ &= Var((1-q)S) \end{aligned}$$

Somit hat die Quoten-Rückversicherung bei gleichen Transaktionskosten wie R eine günstigere Varianz des Erstversicherungsschadens. $\square$

Diese Sätze zeigen, dass die optimale Entscheidung des Erstversicherers überraschenderweise nicht von der Verteilung des Gesamtschadens S, sondern ausschließlich von der Art und Höhe der Transaktionskosten abhängt. Dagegen zeigen sie nicht, dass Stop-Loss- oder Quoten-Rückversicherung auch in der Realität die, aus Sicht des Erstversicherers, zu bevorzugenden Rückversicherungsformen sind, weil die jeweils vorausgesetzte funktionale Form der Transaktionskosten kaum realistisch ist. Die erkennt man am klarsten, wenn man sich vor Augen hält, dass die Transaktionskosten sowohl die, durch die Rückversicherung, bedingten Verwaltungskosten von Erst- und Rückversicherer enthalten als auch den Schwankungszuschlag des Rückversicherers. Für den Schwankungszuschlag des Rückversicherers ist die Annahme einer Varianzabhängigkeit wohl nicht unrealistisch. Die Verwaltungskosten werden dagegen eher volumenabhängig sein, also etwa proportional zum Erwartungswert der Schäden, allerdings mit einer von der Rückversicherungsform abhängenden Proportionalitätskonstanten und einer durch die Fixkosten bedingten Untergrenze. Außerdem handelt es sich hierbei jeweils um die kalkulatorischen Kosten. Gemäß unserem Modell sind die Transaktionskosten aber richtigerweise definiert als die Differenz

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

zwischen Rückversicherungsprämie (einschließlich der beim Erstversicherer etwa zusätzlich anfallenden Kosten) und dem Erwartungswert der Rückversicherungsschäden, d.h. sie beinhalten zusätzlich zu den absichtlich einkalkulierten Verwaltungskosten und dem Schwankungszuschlag auch noch einen unbeabsichtigten Zu- oder Abschlag durch die Verschätzung bei $E(R)$. Da in der Realität $E(R)$ aber nie genau bekannt ist, kann auch die Art des Transaktionskosten-Ansatzes letztlich nicht festgestellt werden.
In den Beweise der beiden Sätze hat sich auch gezeigt, wie der *Umfang der Rückversicherung (bzw. die Höhe des Selbstbehalts)* bestimmt wird: Ausgehend von der vorgegebenen (Maximal-)Höhe der Transaktionskosten, die ja zugleich der tolerierten mittleren Ergebnisreduzierung entspricht, wird die Stop-Loss-Priorität a bzw. der Quoten-Selbstbehalt $1 - q$ gerade so festgelegt, dass sich die gewünschte Höhe des Selbstbehaltergebnisses ergibt. Normalerweise ist die Kostenfunktion $k(R) = g(E(R))$ bzw. $k(R) = h(Var(R))$ streng monoton wachsend in $E(R)$ bzw. $Var(R)$, sodass aus den vorgegebenen Kosten unmittelbar und eindeutig der zugehörige Umfang $E(R)$ bzw. $Var(R)$ der Rückversicherungsabgabe berechnet werden kann. Und wegen der Monotonie der Kostenfunktion resultiert immer dann eine höhere Stop-Loss-Priorität bzw. ein höherer Quoten-Selbstbehalt und daher eine höhere Selbstbehaltsvarianz, wenn man die mit der Rückversicherung verbundenen Kosten reduzieren will.
Nun sei noch an einem Beispiel gezeigt, dass auch bei Wahl eines anderen Entscheidungsmodells keine wesentlich anderen Resultate zu erwarten sind.

Satz(Arrow)
Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen $R = S - Q$ gleiche Funktion g des Erwartungswertes $E(R)$, d.h. gilt $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß dem Nutzenmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis Sei R der Rückversicherungsschaden einer beliebigen Rückversicherungsform. Dann gibt es wie beim Varianzmodell eine Stop-Loss-Schadenvariable $R_a = max(S-a,0)$ derart, dass $E(R_a) = E(R)$ gilt und daher die Transaktionskosten gleich sind. Daher gilt auch $b(Q) = b(Q_a)$ für die zu den Erstversicherungsschadenvariablem $Q-a = S-R_a = min(S,a)$ bzw. $Q = S-R$ gehörenden Prämien. Die Nutzenfunktion u des Erstversicherers ist wegen $u^{''}$ konkav und daher gilt $\forall x, x_0$

$$u(x) \leq u(x_0) + u^{'}(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Lässt sich nun Q als Funktion $Q(S)$ des Gesamtschadens S schreiben, so ist bei einem vorhandenen Sicherheitskapital c

$$\begin{aligned} u(b(Q) &+ c - Q(s)) - u(b(Q_a) + c - Q_a(s)) \\ &\leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u^{'}(b(Q_a) + c - Q_a(s)) \\ &\leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u^{'}(b(Q_a) + c - a) \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung sieht man wie folgt ein:
Im Fall $Q_a(s) < Q(s)$ folgt aus $Q(s) \leq s$ zunächst $Q_a(s) < s$ und daraus $Q_a(s) = min(s,a) = a$. Daher sind die Argumente von $u^{'}$ gleich und es gilt in der Abschätzung das Gleichheitszeichen. Im Fall $Q_a \geq Q(s)$ gilt wegen $Q_a(s) \leq a$ für die Argumente von $u^{'}$ die Beziehung $b(Q_a) + c - Q_a(s) \geq b(Q_a) + c - a$ und daraus ergibt sich die Abschätzung, da $u^{'}$ nicht wachsend ist.
Wenden wir auf die nächste Ungleichung den Erwartungswert-Operator an, so erhalten wir

$$E(u(b(Q) + c - Q)) - E(u(b(Q_a) + c - Q_a)) \leq 0,$$

wegen $E(Q_a) = E(Q)$ und weil $b(Q_a)$ und damit auch $u^{'}(b(Q_a) + c - a)$ ein Skalar ist.
Damit ist der Satz für solche $Q + R = S$ bewiesen, die eine Funktion von S sind. □

3.3 Abstaffelung des Selbstbehalts

Üblicherweise schließt der Erstversicherer nicht einen einzigen Rückversicherungsvertrag für sein gesamtes Portefeuille ab, sondern behandelt jede Branche (Feuer, Allgemein-Haftpflicht, Kraft-Haftpflicht, Kraftfahrtkasko, Unfall, Transport, usw.) getrennt. Angenommen, er möchte in mehreren oder allen getrennt rückversicherten Teilportefeuilles dieselbe Rückversicherungsform anwenden, so stellt sich die Frage, ob der Parameter, der den Umfang der Rückversicherung regelt, überall gleich hoch sein sollte oder nicht. Wenn die Teilportefeuilles voneinander unabhängig sind, können für diese Fragestellung weitgehend explizite Lösungen ermittelt werden, wobei wir uns hier wieder auf das Varianzmodell beschränken.

Satz(De Finetti, Bühlmann)
Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i, $1 < i \leq I$, durch getrennte Quoten-Rückversicherungen geschützt, so sind die Selbstbehaltsquoten $c_i = Q_i/S_i$ gemäß dem Varianzmodell proportional zu

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{Var(S_i)}$$

zu wählen, wenn die Transaktionskosten $k(R_i) = z_i E(R_i)$ jeweils mit dem Faktor z_i proportional zum Erwartungswert des abgegeben Schadens R_i sind.

Beweis Die proportionale Aufteilung des Portefeuilles i ist durch $S_i = Q_i + R_i$ mit $Q_i = c_i S_i$ gegeben. Ist b_i die zu S_i gehörige Prämie (nach Abzug der Originalkosten), so beträgt das erartete Selbstbehaltsergebnis

$$w_i = b_i - E(S_i) - z_i E(R_i) = b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i).$$

Im Varianzmodell legt der Erstversicherer die Selbstbehaltsquoten c_i so fest, dass bei vorgegebener Gesamtvarianz

$$\sum_{i=1}^{I} Var(Q_i) = v_0$$

das erwartete Selbstbehaltsergebnis $w_1 + \cdots + w_I$ maximal wird. Diese Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung kann mithilfe der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode gelöst werden. Dazu müssen die optimalen c_i so gewählt werden, dass

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left\{ \sum_{i=1}^{I} (b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i)) + \beta \left(v_0 - \sum_{I}^{i=1} Var(Q_i) \right) \right\} = 0$$

für $j = 1, ..., I$ gilt mit einem konstanten Multiplikator β, der so zu wählen ist, dass die Nebenbedingung erfüllt ist. Wegen

$$Var(Q_i) = Var(c_i S_i) = c_i^2 Var(S_i)$$

ergibt die Ableitung

$$z_j E(S_j) = 2\beta c_j Var(S_j) = 0,$$

das heißt

$$c_j = \frac{z_j E(S_j)}{2\beta Var(S_j)},\ 1 \leq j \leq I.$$

Dabei ist β so zu wählen, dass

$$v_o = \sum_{i=1}^{I} c_1^2 Var(S_i)$$

gilt, d.h.

$$\beta^2 = \frac{1}{4 \cdot v_o} \sum_{i=1}^{I} \frac{(z_i E(S_i))^2}{Var(S_i)}.$$

□

Der Selbstbehaltsanteil c_i soll also umso höher sein, je teurer die Rückversicherung, gemessen durch z_i, ist und je größer das Portefeuille, gemessen durch $E(S_i)$, ist, und umso kleiner, je größer die Varianz des Portefeuilles ist. Dieses Resultat ist sehr plausibel. Sollten einzelne $c_i \geq 1$ ausfallen, so werden die zugehörigen Teilportefeuilles nicht rückversichert.
Es macht wenig Sinn, den vorstehenden Satz statt auf echte Teilportefeuilles unmittelbar auf einzelne Risiken anzuwenden, da dann die zur Selbstbehaltsfestlegung erforderlichen Parameter $Var(S_i)$ in der Praxis nicht zuverlässig genug bestimmt werden können. Wenn man aber für ein (Teil-)Portefeuille annehmen kann, dass die Risiken sich nur in ihrer Größe, gemessen durch die Versicherungssumme v_i, unterscheiden, d.h. dass die Schadenvariablen S_i/v_i für alle Risiken i identisch verteilt sind, d.h. insbesondere dieselben Momente

$$E(S_i/v_i) = \mu,\ Var(S_i)/v_i = \sigma^2$$

haben, so liefert obiger Satz die Empfehlung, dass die Selbstbehaltsquote c_i von Risiko i

$$\text{proportional zu } \frac{z \cdot v_i \cdot \mu}{v_i^2 \cdot \sigma^2}, \text{ d.h. zu } \frac{1}{v_i},$$

d.h. umgekehrt proportional zur Versicherungssumme v_i sein sollte, wenn wir angesichts des überall gleich verteilten Schadensatzes auch von einem konstanten Transaktionskostenansatz $z_i = z$ ausgehen.
Nun wollen wir noch untersuchen, wie die Prioritäten von unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherungen zu wählen sind, wenn mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles auf diese Weise rückversichert werden sollen. Dazu sei

$$S_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}$$

der Gesamtschaden von Teilportefeuille i gemäß dem Kollektiven Modell, d.h. die Schadenhöhen $X_{i1}, X_{i2}, \ldots$ seien unabhängig und identisch wie X_i verteilt und unabhängig von der Schadenzahl N_i bei Priorität a_i ist der Selbstbehaltschaden auf Portefeuille i

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_i} min(X_{IN}, a_i),$$

und der auf den Rückversicherer transferierte Schaden beträgt $R_i = S_i - Q_i$. Dann gilt der folgende Satz:

Satz(Bühlmann)
Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i, $1 \leq i \leq I$, mit Einzelschadenhöhe X_i und davon abhängiger, poissonverteilter Schadenzahl durch getrennte, unlimitierte Schadenexzedenten-Rückversicherungen geschützt, so sollten deren Prioriäten a_i im Varianzmodell die implizte Gleichung

$$a_i = (k_1/2 + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i))/\beta$$

erfüllen, wenn die Transaktionskosten die Form

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 Var(R_i)$$

haben und der Faktor β so gewählt wird, dass das vorgegebene Varianzniveau eingehalten wird.

3.4 Suboptimale und pareto-optimale Risikoteilung

Es gibt Risikoteilungsformen, die auf jeden Fall gemieden werden sollten, weil eine für beide Beteiligten bessere Alternative existiert. Ein Beispiel ist die *Integral-Franchise*, die hier im Rückversicherungskontext auf Jahresbasis formuliert wird: Ausgehend vom Jahresschaden S und einer vereinbarten Schadengrenze $\underline{a}$ trägt der Erstversicherer

$$Q = \begin{cases} S, & \text{falls } S \leq \underline{a} \\ 0, & \text{falls } S > \underline{a} \end{cases}$$

und der Rückversicherer trägt $R = S - Q$, d.h. er übernimmt den vollen Schaden, wenn er höher als die Grenze $\underline{a}$ ist.

Satz(Beard, Pentikäinen, Peson)
Zu jeder Integral-Franchise $Q + R = S$ mit Schadengrenze $\underline{a}$ gibt es einen

unlimitierten Stop-Loss $Q_a + R_a = S$, $Q_a = min(S, a)$, mit Priorität $a < \underline{a}$ und gleichen Erwartungswerten $E(Q_a) = E(Q)$, $(R_a) = E(R)$, aber niedrigeren Varianzen $Var(Q_a) < Var(Q)$, $Var(R_a) < Var(R)$.

Beweis $E(Q_a)$ ist eine stetige, streng monoton wachsende Funktion von a mit $0 \leq E(Q_a) \leq E(S)$. Daher gibt es zur gegebenen Integral-Franchise $Q+R = S$ mit Schadengrenze $\underline{a}$ einen Stop-Loss derart, dass $E(Q_a) = E(Q)$ und damit auch $E(R_a) = E(R)$ gilt. Wir müssen also nur die Aussage über die Varianzen beweisen. An der Darstellung

$$\begin{aligned} \int_{\underline{a}}^{0} sdG(s) &= E(Q) = E(Q_a) \\ &= \int_{a}^{0} sdG(s) + a \cdot (1 - G(a)) \end{aligned}$$

(mit der Verteilungsfunktion G von S) sieht man sofort, dass $a < \underline{a}$ und

$$\int_{\underline{a}}^{a} sdG(s) = a \cdot (1 - G(a))$$

gelten muss. Daher wird

$$\begin{aligned} E(Q^2) &= \int_0^{\underline{a}} s^2 dG(s) = \int_0^{a} s^2 dG(s) + \int_a^{\underline{a}} s^2 dG(s) \\ &> \int_0^{a} s^2 dG(s) + a \int_a^{\underline{a}} sdG(s) \\ &= \int_0^{a} s^2 dG(s) + a^2 \cdot (1 - G(a)) = E(Q_a^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} Var(Q_a) &= E(Q_a^2) - (E(Q_a))^2 \\ &< E(Q^a - (E(Q))^2 = Var(Q) \end{aligned}$$

was auch schon aus dem Satz von Borch, Kahn und Pesonen aus Abschnitt 3.2 folgte.
Wir zeigen nun noch

$$\int_a^{\infty} (s-a)^2 dG(s) = E(R_a)^2 < E(R^2) = \int_{\underline{a}}^{\infty} s^2 dG(s).$$

Dies folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
\int_a^{\underline{a}} (s-a)^2 dG(s) &< (\underline{a}-a) \cdot \int_a^{\underline{a}} (s-a) dG(s) \\
&= (\underline{a}-a) \cdot a \cdot (1 - G(a) - (G(\underline{a}) - G(a))) \\
&< (2\underline{a}a - a^2) \cdot (1 - G(\underline{a})) \\
&< \int_{\underline{a}}^{\infty} (s^2 - (s-a)^2) dG(s)
\end{aligned}$$

Damit ist auch

$$\begin{aligned}
Var(R_a) &= E(R_a^2) - (E(R_a))^2 \\
&< E(R^2) - (E(R))^2
\end{aligned}$$

bewiesen. □

Der vorstehende Satz besagt, dass für Erst- und Rückversicherer, die nach dem Varianzmodell entscheiden, die Integral-Franchise keine empfehlenswerte Risikoteilung darstellt, da es eine für beide Seiten bessere Form der Risikoteilung gibt, nämlich den Stop-Loss (bzw. die Abzugs-Franchise). Genau genommen gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die Transaktionskosten nur von Erwartungswert und Varianz des Rückversicherungsschadens abhängen - einer im Varianzmodell sehr natürlichen Voraussetzung. Werden die Transaktionskosten z.B. gemäß $k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 Var(R)$ berechnet, so ergibt der gemäß obigem Satz definierte Stop-Loss sowohl eine niedrigere Selbstbehaltsvarianz wie auch niedrigere Transaktionskosten (falls $k_2 > 0$) als die Interagl-Franchise.
Risikoteilungsformen, zu denen es keine Alternative gibt, bei der sich wenigstens eine Seite besser stellt, ohne dass die andere sich verschlechtert, heißen *pareto-optimal*. Die Integral-Franchise ist im Varianzmodell also nicht pareto-optimal. Das gilt übrigens auch im Nutzenmodell, wenn die Transaktionskosten nur von der Schadenerwartung des Rückversicherers abhängen. Bei pareto-optimalen Rückversicherungsformen geht jede Verbesserung zugunsten des Erstversicherers und zu Lasten des Rückversicherers - und umgekehrt.
Wir haben bisher hauptsächlich Rückversicherungsformen betrachtet, bei denen der Selbstbehaltsschaden Q des Erstversicherers und der auf den Rückversicherer transferierte Schadenteil $R = S - Q$ Funktionen des Gesamtschadens

S sind. Dies ist bei Quote $Q = cS$, Stop-Loss $Q = min(S, a)$ und Integral-Franchise (wenn sie, wie hier, auf Jahresbasis definiert ist) der Fall. Dagegen sind z.B. der Summenexzedent und der Schadenexzedent keine Funktionen des Gesamtschadens S; vielmehr hängt hier die Aufteilung von S davon ab, in welcher Weise sich S aus kleinen oder großen Einzelschäden zusammensetzt (beim Schadenexzedenten) bzw. ob die großen Einzelschäden eher bei Risiken mit hohen oder weniger hohen Versicherungssummen anfallen (beim Summenexzedenten).

Satz
Zu jeder Rückversicherungsform $\underline{Q} + \underline{R} = S$, bei der $\underline{Q}$ und $\underline{R}$ keine Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind, sondern von den Einzelschäden abhängen, gibt es eine Rückversicherungsform $Q + R = S$, bei der Q und R Funktionen von S sind, und zwar derart, dass $E(Q) = E(\underline{Q})$, $E(R) = E(\underline{R})$ und $Var(Q) < Var(\underline{Q})$, $Var(R) < Var(\underline{R})$ gilt.

Beweis Wie zeigen, dass $Q = E(\underline{Q}|S)$, $R = S - Q = E(S|S) - E(\underline{Q}|S) = E(\underline{R}|S)$ die geforderten Bedingungen erfüllen. Q und R sind Funktionen von S und es gilt $E(Q) = E(E(\underline{Q}|S)) = E(\underline{Q})$ und $E(R) = E(E(\underline{R})) = E(\underline{R})$. Weiters ist

$$\begin{aligned} Var(Q) &= Var(E(\underline{Q}|S)) \\ &< Var(E(\underline{Q}|S)) + E(Var(\underline{Q}|S)) \\ &= Var(\underline{Q}) \end{aligned}$$

Genauso ist

$$\begin{aligned} Var(R) &= Var(E(\underline{R}|S)) \\ &< Var(E(\underline{R}|S)) + E(Var(\underline{R}|S)) \\ &= Var(\underline{R}) \end{aligned}$$

□

Korollar
Eine Rückversicherungsform, die sich nicht als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellen lässt, ist im Varianzmodell nicht pareto-optimal.

Der vorstehende Beweis gibt auch konkret an, wie wir prinzipiell zu Summen- oder Schadenexzedenten eine für beide Seiten *bessere Rückversicherungsform*

konstruieren können. Ist z.B. ein bestimmtes Portefeuille und ein konkreter Summenexzedent gegeben, so kann sich ein und derselbe Jahresgesamtschaden $S = a$ auf viele unterschiedliche Weisen aus Einzelschäden zusammensetzen. Für alle möglichen Weisen mit Gesamtschaden s muss dann festgestellt werden, welcher Selbstbehalt Q sich gemäß Summenexzedent jeweils ergibt. Der Erwartungswert $E(Q|S = s)$ dieser zu $S = s$ gehörenden Selbstbehaltsschäden stellt dann den unter der besseren Rückversicherungsform tatsächlich vom Erstversicherer zu tragenden Selbstbehaltsgesamtschaden dar, falls der Jahresgesamtschaden $S = s$ beträgt.
Es ist klar, dass die zur Berechnung von $E(Q|S = s)$ erforderlichen Schadenzahl- und Schadenhöhenwahrscheinlichkeiten pro Risiko in den Zweigen der Schadenversicherung allenfalls approximativ und unter zusätzlichen Modellannahmen ermittelt werden können. Nur in der Lebens- oder Unfalltod-Versicherung erscheint es möglich, dass sich beide Seiten auf die erforderlichen Rechnungsgrundlagen einigen. Daher können Summen- und Schadenexzedenten-Rückversicherung weiterhin ihren Platz in der Versicherungspraxis beanspruchen, da sie zwar suboptimal sind, doch die theoretisch bessere Rückversicherungsform in der Regel nicht explizit ausgerechnet werden kann. Ebenso sind die im vorigen Abschnitt behandelten Abstaffelungen des Selbstbehalts nicht pareto-optimal, d.h. können theoretisch noch weiter verbessert werden durch eine Rückversicherungsform, die nur vom Gesamtschaden aller betrachteten Teilportefeuilles abhängt.
Wir haben also gesehen, dass eine pareto-optimale Rückversicherungsform notwendigerweise als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellbar sein muss. Doch dies allein ist nicht hinreichend, wie das Beispiel der Integral-Franchise (auf Jahresbasis) zeigt. Der folgende Satz charakterisiert die pareto-optimalen Rückversicherungsformen.

Satz(Pesonen)
Eine Rückversicherungsform $Q + R = S$ ist im Varianz- oder Nutzenmodell genau dann pareto-optimal, wenn Selbstbehaltsschaden Q und Rückversicherungsschaden R monoton nicht fallende Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind.

Aus diesem Satz folg unmittelbar, dass Quote und Stop-Loss pareto-optimal sind, da Q und R jeweils monoton nicht fallende Funktionen von S sind. Dagegen ist bei der Integralfranchise (auf Jahresbasis) der Selbstbehaltsschaden Q nicht monoton fallend, was erneut zeigt, dass die Integral-Franchise nicht pareto-optimal ist.

4 Fazit

Wegen Vagheiten der Schadenverteilung und damit auch bezüglich der tatsächlichen Transaktionskosten kann die für den Erstversicherer optimale Rückversicherungsform im konkreten Fall normalerweise nicht ermittelt werden. *In der Praxis* orientiert man sich daher oft an der jeweils dominierenden Komponente des versicherungstechnischen Risikos, d.h. an Zufalls- bzw. Änderungsrisiko. Sie spielen nämlich in den einzelnen Versicherungssparten in der Regel eine unterschiedliche Rolle. So dominiert z.B. in der Feuerversicherung von Industriebetrieben mit ihren stark unterschiedlichen Versicherungssummen normalerweise das Zufallsrisiko, d.h. der Verlauf dieser Sparte wird entscheidend durch wenige Großschäden geprägt. In der Kfz-Haftpflicht-Versicherung dagegen spielen einzelne Großschäden keine dominierende Rolle; der Verlauf wird hier stark vom Änderungsrisiko („Jahresqualität") sowie von der sich über die Lohnkosten auswirkenden Inflationsrate beeinflusst.
Gegen das Zufallsrisiko aus einzelnen Großschäden schützen am besten der Summen- und der Schadenexzedent. Bei Kumulierung vieler Schäden aus einem Ereignis entlastet natürlich der Kumulschadenexzedent am meisten. Dem Änderungsrisiko, das sich auf alle Schäden auswirkt, kann offensichtlich durch Quote oder Stop-Loss am besten begegnet werden. In den Sparten, wo beide Komponenten des versicherungstechnischen Risikos eine Rolle spielen, werden häufig mehrere Rückversicherungsformen miteinander kombiniert („Rückversicherungsprogramm").
Auch theoretische Modelle liefern - unter idealisierten und wenig realistischen Annahmen bezüglich der Transaktionskosten - die optimale Rückversicherungsform und den optimalen Selbstbehalt zugleich. Wenn man - wie in der Realität meist der Fall - die konkrete Situation nicht analytisch durchrechnen kann, ergeben sich für eine numerische Berechnung zu viele Möglichkeiten, selbst wenn man sich auf die fünf Rückversicherungs-Grundformen und ihre Kombinationsmöglichkeiten beschränkt. Bei vorgegebener Rückversicherungsform hält sich hingegen der Rechenaufwand zur Bestimmung des Selbstbehalts in Grenzen, auch wenn man sich dem theoretischen Optimum meist nur durch Probieren und Interpolieren nähern kann.

In der Praxis sollte man sich trotz aller Schwierigkeiten beim Umsetzen eines theoretischen Modells zur Ermittlung der Verteilung der Selbstbehaltsergebnisse nicht zu sehr auf sein praxisgeschultes Gefühl verlassen, besonders, wenn man nur wenig Rückversicherungsschutz kaufen will. Denn nur ein riskiotheoretisches Modell kann auch die kleinen Wahrscheinlichkeiten berücksichtigen, für deren Realisierung in einer 20- oder 30- jährigen praktischen Erfahrung kein Platz ist, mit denen aber dennoch stets zu rechnen ist.

Literatur

[1] Thomas Mack: *Schadenversicherungsmathematik*, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe 2002, Kapitel 4.1, Kapitel 4.4.

[2] Dr. K. Dum: *Handouts zur Vorlesung Rückversicherung*, WS 2008/09

[3] Wikipedia: *http://de.wikipedia.org/wiki/Rückversicherung*, Zugriffsdatum: 2. Mai 2009