

Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

SCHADENRESERVIERUNG

bei lang andauernder Schadenabwicklung

von
Claudia Stögerer
0625502

TU Wien
SS 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	3
1.1	Lang andauernde Schadenabwicklung und ihre Ursachen	3
1.2	Bedeutung der Spätschadenreserve	4
1.3	Abwicklungsdreieck	5
1.4	Datenarten	6
2	Chain-Ladder-Verfahren	8
2.1	Allgemeines	8
2.2	Sensitivität und Genauigkeit	11
3	Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren	15
3.1	Allgemeines	15
3.2	Ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren	16
3.3	Weitere Methoden	17
4	Modifikation der Verfahren	18
4.1	Separation von Kalenderjahreffekten	18
4.2	Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden	19
5	Fazit	22
	Quellen	23
	Anhang	24

1 Überblick

In diesem Kapitel werden die Gründe für eine lang andauernde Schadenabwicklung erläutert. Ebenfalls wird Näheres zur Verwendung der Spätschadenreserve erklärt. Den meisten Verfahren zur Schätzung der Spätschadenreserve liegt das Abwicklungsdreieck zu Grunde, auf das hier auch eingegangen werden soll. Diese Abwicklungsdreiecke können verschiedene Arten von Daten enthalten, z.B.: die bezahlten bzw. die angefallenen Schadensbeträge.

1.1 Lang andauernde Schadenabwicklung und ihre Ursachen

Zwischen dem Eintritt des Versicherungsfalles und der endgültigen Regulierung dieses Schadenfalles vergeht immer eine gewisse Zeitspanne. Einerseits muss der Schaden dem Versicherer gemeldet, und von diesem geprüft werden, andererseits dauert die Schadenregulierung insbesondere bei größeren Schäden einige Zeit (z.B.: Reparatur). Im Gegensatz zu den meisten Versicherungsbranchen, bei denen die Zeit zwischen Schadeneintritt und Regulierungsende 1-2 Monate beträgt, kann die Zeitdifferenz bei Haftpflichtversicherungen mehrere Jahre ausmachen.

Zwei Hauptursachen dafür sind:

1. Späte Manifestation:

Manche Schäden werden eventuell erst lange Zeit nach ihrer Entstehung oder unter gewissen Bedingungen bemerkt, z.B.: Fehler eines Architekten bei besonderer Belastung des Gebäudes, Fehler eines Notars bei der Vertragsgestaltung oder später ersichtliche Nebenwirkungen eines Medikaments (z.B.: Contergan). Die Haftpflichtversicherung deckt diese Fälle, solange die Versicherung zur Zeit der Entstehung in Kraft war.

2. Lange Regulierungsdauer:

Auch nach der Manifestation und Meldung des Schadensfalles an den Versicherer kann es einige Zeit dauern bis die definitive Schadenshöhe bekannt ist, z.B. wenn die Summe vom Ausgang des Gerichtsprozesses oder dem Erfolg bzw. den Kosten einer langen ärztlichen Behandlung abhängt.

Somit gibt es zum Ende jeder Abrechnungsperiode zwei Arten von Schäden, deren Höhe noch nicht vollständig bekannt ist.

- Schäden nach 1., die bereits eingetreten sind, jedoch noch nicht bemerkt bzw. dem Versicherer noch nicht gemeldet wurden, werden als IBNR-Schäden (incurred but not reported) bezeichnet. Wenn aufgrund von Erfahrungen aus früheren Jahren solche Schäden zu erwarten sind, ist der Versicherer verpflichtet, eine angemessene IBNR-Schadenreserve zu stellen.
- Schäden nach 2., sind jene, die dem Versicherer schon gemeldet, jedoch noch nicht endgültig reguliert wurden. Diese werden als RBNS-Schäden (reported but not settled) bezeichnet. In jedem Einzelfall muss der zuständige Schadensachbearbeiter aufgrund

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

seiner Erfahrung und der verfügbaren Informationen des Falles eine vermutlich ausreichende Einzelfallreserve festsetzen. Die Differenz zwischen den vermuteten und den wirklich anfallenden Kosten wird als Abwicklungsgewinn bzw. -verlust bezeichnet. Abwicklungsverluste entstehen dann, wenn die Schadenhöhe während der Abwicklungsdauer, z.B. durch Inflation, stärker steigt als angenommen wurde. Die Reserve für ein erfahrungsgemäß negatives Abwicklungsergebnis eines ganzen Bereiches wird IBNER-Schadenreserve (incurred [and reported] but not enough reserved) genannt.

Anm.: Im Folgenden wird für beide Reservearten der Begriff „Spätschadenreserve“ verwendet.

1.2 Bedeutung der Spätschadenreserve

Eine möglichst genaue Schätzung der aus Einzelfallreserven und Spätschadenreserve bestehenden Schadenreserve ist nicht nur zur Erstellung der externen Rechnungslegung erforderlich, sondern auch zur Prämienkalkulation. Diese beruht auf den Daten des vergangenen Schadenverlaufes. Während die IBNR-Reserve in beiden Fällen benötigt wird, wird eine IBNER-Reserve meist nur für die Zwecke der Prämienkalkulation und der internen Erfolgsrechnung verwendet.

Auch den Rückversicherer trifft die Spätschadenreservierungsproblematik, unter der in der Haftpflichtversicherung häufig vorkommenden Schadenexzendenten-Rückversicherung, da er sich bei dieser Art der Versicherung verpflichtet, gegebenenfalls den Restbetrag zu stellen, sollte der Schaden den vom Versicherer gestellten Betrag (Priorität) überschreiten. Dies gilt jedoch nur bis zu einem Höchstbetrag. Ob ein Schaden die Priorität übersteigen wird, kann oft bei der Meldung des Schadensfalles nicht mit Sicherheit gesagt werden. Daher kann es sein, dass der Erstversicherer am Ende des Abrechnungsjahres noch nicht in der Lage ist, dem Rückversicherer definitiv mitzuteilen, welche Schadenssummen den gestellten Betrag überschritten haben. Für den Rückversicherer verstärkt sich die IBNR-Problematik daher erheblich, da für ihn auch die von der Erstversicherung schon registrierten, aber unterschätzten, Schadensfälle unbekannt sind.

Die Schätzung der IBNR- und IBNER-Schadenreserve ist in Branchen mit langer Abwicklungsdauer von großer Bedeutung für die Rechnungslegung und Prämienkalkulation. Daher wurden in den letzten Jahren viele mathematische Schätzverfahren entwickelt, die von den früheren Erfahrungen aus den Anfallsjahren (Schadeneintrittsjahr) auf spätere, zukünftige Anfallsjahre schließen wollen. Wenn Trend- oder Strukturbrüche (z.B.: wesentliche Änderung bei der Schadenregulierung, Einzelfallreservierung, Zeichnungspolitik,...) im Verlauf der Jahre stattfinden, funktionieren keines dieser Reserveschätzverfahren.

Für die nachstehend gezeigten Verfahren muss somit davon ausgegangen werden, dass in den betrachteten Jahren keine Trend- bzw. Strukturbrüche stattgefunden haben.

1.3 Abwicklungsdreieck

Den meisten Reserveschätzverfahren liegt das Abwicklungsdreieck zu Grunde, welches sich wie folgt erläutern lässt:

Sei $S_{i,k}$ $1 \leq i \leq I, k = 1, 2, \dots$ der im Abwicklungsjahr (Kalenderjahr) k aufgewendete Betrag für die im Anfalljahr i eingetretenen Schäden. Das erste Abwicklungsjahr $k = 1$ ist das Anfalljahr, das darauffolgende Abwicklungsjahr wird mit $k = 2$ bezeichnet, usw. Die Jahre vor dem aktuellen Kalenderjahr werden mit I bezeichnet. In der nachfolgenden *Tabelle 1*, die das Abwicklungsdreieck beschreibt, sind nur die Beträge $S_{i,k}$ mit $i+k \leq I+1$ bekannt. Das jüngste Anfalljahr $i = I$ ist das dem aktuellen vorangegangene Jahr, von dem nur die Schäden bekannt sind, die im vorigen Jahr dem Versicherer gemeldet worden sind. Dem am längsten zurückliegenden Abwicklungsjahr $i = 1$ des Abwicklungsdreieckes sind $k = I$ Abwicklungsjahre bekannt. Das erste Anfalljahr wird so gewählt, dass es so gut wie vollständig abgewickelt ist. Die Beträge $S_{i,I+1}, S_{1,I+2}, \dots$ der künftigen Abwicklungsjahre sind daher vermutlich alle gleich Null.

		Abwicklungsjahre k								
		$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	\dots	$S_{1,k}$	\dots	$S_{1,I+1-i}$	\dots	$S_{1,I-1}$	$S_{1,I}$
		$S_{2,1}$	$S_{2,2}$	\dots	$S_{2,k}$	\dots	$S_{2,I+1-i}$	\dots	$S_{2,I-1}$	
		\vdots							\vdots	
Anfallsjahr i	$S_{i,1}$	$S_{i,2}$	\dots	$S_{i,k}$	\dots	$S_{i,I+1-i}$				
	\vdots									
	$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	\dots	$S_{I+1-k,k}$						
	\vdots									
	$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$								
		$S_{I,1}$								

Tabelle 1: Abwicklungsdreieck

Die Paralleln zur Hypotenuse des Dreieckes entsprechen den einzelnen Kaldenderjahren. Das aktuellste Jahr wird von den Werten $S_{I,1}, S_{I-1,2}, \dots, S_{I+1-k,k}, \dots, S_{i,I+1-i}, \dots, S_{2,I-1}, S_{1,I}$ beschrieben.

Für jedes Anfallsjahr i werden die Beträge $S_{i,k}$ im Laufe der Zeit immer kleiner, bis sie schließlich gleich Null sind, da es mit zunehmender Abwicklungsdauer immer unwahrscheinlicher wird, dass sich Änderungen im Schadenstand ergeben. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass die Werte $S_{i,k}$ anfangs zunächst ansteigen bevor sie letztendlich abfallen.

Der für das Anfalljahr i aufzuwendende Gesamtschaden lässt sich als

$$S_{i,+} = S_{i,1} + S_{i,2} + \dots + S_{i,I}$$

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

definieren, wenn davon ausgegangen werden kann, dass nach I Abwicklungsjahren alle Schäden des Anfalljahres bekannt und vollständig reguliert sind. Der Gesamtschaden $S_{i,+}$ wird u.a. für die Prämienkalkulation benötigt.

Da nicht immer angenommen werden kann, dass alle Schäden für das Anfalljahr i reguliert wurden, ist von $S_{i,+}$ derzeit lediglich

$$S_{i,1} + S_{i,2} + \dots + S_{i,I+1-i}$$

bekannt. Das Ziel der verschiedenen mathematischen Verfahren ist es, den unbekannt Teil

$$R_i = S_{i,I+2-i} + S_{i,I+3-i} + \dots + S_{i,I}$$

so gut wie möglich zu schätzen. R_i ist der erforderliche Betrag für die Spätschadenreserve für das Anfallsjahr i .

Es besteht die Möglichkeit die Werte des Abwicklungsdreieckes auch in kumulierter Form darzustellen. An der (i, k) -Stelle des Dreieckes steht in diesem Fall nicht, wie vorhin beschrieben, der Zuwachs $S_{i,k}$ sondern der kumulierte Schadenstand $C_{i,k} = S_{i,1} + S_{i,2} + \dots + S_{i,k}$. Die Schadenszuwächse in einem kumulierten Abwicklungsdreieck ergeben sich mittels folgender Gleichung:

$$S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1} \quad C_{i,0} = 0$$

1.4 Datenarten

Es gibt zwei verschiedene Arten, wie die Beträge des Abwicklungsdreieckes zu verstehen sind. Entweder können die bezahlten Schadensbeträge (ohne Einzelfallreserven) oder die bis zum Abwicklungsjahr k angefallenen Schadensbeträge (inkl. bestehender Einzelfallreserven) eingetragen werden.

Der Vorteil von jenen Daten, welche die bezahlten Schadensbeträge darstellen, liegt darin, dass keine Schätzungen beinhaltet werden, wodurch sie zuverlässiger erscheinen. Wenn ermittelt werden soll, in welcher zeitlichen Staffelung die ermittelte Spätschadenreserve voraussichtlich bezahlt werden muss, wird ebenfalls das Abwicklungsdreieck der bezahlten Schäden benötigt. Ein Nachteil davon ist jedoch, dass die endgültige Regulierung der angefallenen Schäden teils bis zu 20 Jahre oder mehr dauern kann (z.B.: Langzeittherapiekosten). Daher werden große Abwicklungsdreiecke mit vielen Anfalljahren benötigt.

Der Vorteil bei der Verwendung des Abwicklungsdreieckes auf Basis der angefallenen Schäden ist, dass die Größenordnung des Endschadens $C_{i,I}$ pro Anfalljahr durch die Einbeziehung der Einzelfallreserven, sobald diese von Sachbearbeitern festgesetzt wurden, viel früher erkennbar ist. Auch werden Dreiecke mit weniger Anfalljahren (z.B. 10 Jahren) als bei Abwicklungsdreiecken der bezahlten Schäden, benötigt.

Die beiden auf der nächsten Seite folgenden Beispieltabellen enthalten Daten aus einem allgemeinen Haftpflicht-Portfeuille.

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	$C_{i,3}$	$C_{i,4}$	$C_{i,5}$	$C_{i,6}$	Prämie
1	45	1968	4442	4831	5199	6302	13085
2	30	260	480	865	1111		14258
3	81	500	969	1621			16114
4	0	1281	2415				15142
5	20	131					16905
6	14						20224

Tabelle 2: kumuliertes Abwicklungsdreieck bezahlter Schäden

i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	$C_{i,3}$	$C_{i,4}$	$C_{i,5}$	$C_{i,6}$	Prämie
1	4370	6293	10292	12460	13660	14307	13085
2	2701	5291	7162	8945	9338		14258
3	4483	6729	10074	11142			16114
4	3254	5804	8351				15142
5	8010	12118					16905
6	5582						20224

Tabelle 3: kumuliertes Abwicklungsdreieck angefallener Schäden

Das Differenzdreieck zwischen den beiden oben gezeigten Abwicklungsdreiecken enthält die Einzelfallreserven.

i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	$C_{i,3}$	$C_{i,4}$	$C_{i,5}$	$C_{i,6}$	Prämie
1	4335	4325	5850	7629	8461	8005	13085
2	2671	5031	6682	8280	8227		14258
3	4402	6229	9105	9521			16114
4	3254	4523	5936				15142
5	7990	11987					16905
6	5568						20224

Tabelle 4: kumuliertes Abwicklungsdreieck der Einzelfallreserven

2 Chain-Ladder-Verfahren

Das Chain-Ladder-Verfahren wird zur Schätzung der Spätschadenreserve verwendet. Es ist eines der ältesten und einfachsten mathematischen Reservierungsverfahren und nimmt heute noch eine tragende Rolle ein. Das Verfahren wird normalerweise in einer rein deterministischen Form dargestellt, es kann jedoch auch einem stochastischem Modell zu Grunde liegen. Das stochastische Modell zeigt einerseits die Grenzen bzw. die erforderlichen Voraussetzungen und ermöglicht andererseits die Angabe der Genauigkeit des Reserveschätzers.

Anm.: Im Weiteren wird das Verfahren immer stochastisch modelliert.

2.1 Allgemeines

Für jedes Anfalljahr i wird, unter der Bedingung, dass die Aufteilung des Endschadens auf die einzelnen Abwicklungsjahre im Schnitt für alle Anfalljahre gleich ist, ein individueller Erwartungswert für die Spätschadenreseve zugelassen.

Mit den Bezeichnungen aus dem Kapitel 1.3 (Abwicklungsdreieck) wird der Endschaden des Anfallsjahres i mit der Addition der einzelnen Schadenaufwendungen S

$$C_{i,I} = S_{i,1} + S_{i,2} + \dots + S_{i,I}$$

beschrieben. Er kann jedoch auch in der multiplikativen Form als

$$C_{i,I} = C_{i,1} \cdot F_{i,1} \cdot F_{i,2} \cdot \dots \cdot F_{i,I-1} \quad \text{mit } F_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$$

dargestellt werden. $F_{i,k}$ ist hier die multiplikative Zunahme des akkumulierten Schadenstandes $C_{i,k}$ von Abwicklungsjahr k zum darauf folgenden Abwicklungsjahr $k+1$ in Anfalljahr i ist. Es muss vorausgesetzt werden, dass alle Schadenstände $C_{i,k} > 0$ sind. Anderfalls muss die multiplikative Darstellung statt mit $C_{i,1}$ mit dem ersten positiven $C_{i,k}$ beginnen.

Für die Zufallsvariablen $F_{i,k}$ in einem Anfalljahr i lautet der unabhängige Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(F_{i,k}) = f_k \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1$$

Die Variablen f_k geben die durchschnittliche Steigerung des Schadenstandes von Abwicklungsjahr k auf $k+1$ an. Im Chain-Ladder-Verfahren werden diese Modellparameter f_k mittels dem $C_{i,k}$ -gewichteten arithmetischen Mittel¹

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k} \cdot F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} \quad 1 \leq k \leq I-1 \quad (1)$$

aus den bis jetzt vorliegenden Realisierungen von $C_{i,k}$ geschätzt. Geschätzt wird der Endschaden $C_{i,I}$ durch:

$$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} \quad 2 \leq i \leq I \quad (2)$$

¹Siehe Anhang: Arithmetisches Mittel

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

Ebenfalls kann die Reserve $R_i = C_{i,I} - C_{i,I+1-i}$ durch

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$$

geschätzt werden. Der aktuelle Schadenstand $C_{i,I+1-i}$ des Anfallsjahres i wird der Prognose zugrundegelegt. Die früheren Schadenstände $C_{i,I}, \dots, C_{i,I-i}$ werden dabei ignoriert.

Dem Chain-Ladder-Verfahren liegt eine Modellannahme zu Grunde, die besagt, dass der Informationsgehalt des jeweils aktuellsten Schadenstandes nicht durch die zusätzliche Ausnutzung früherer Stände verbessert werden kann. Diese Modellannahme lautet:

(CL1) Es gibt Abwicklungsfaktoren f_1, \dots, f_{I-1} mit

$$\mathbb{E} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \middle| C_{i,1}, \dots, C_{i,k} \right) = f_k \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1, \text{ für } C_{i,k} > 0$$

oder gleichwertig

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} \cdot f_k$$

Aus dieser Annahme folgt, dass der bedingte Erwartungswert von $C_{i,k+1}$ nur von $C_{i,k}$ abhängt und nicht von früheren Schadenständen. **CL1** ist ein Spezialfall des am Anfang des Kapitel betrachteten Modells $\mathbb{E}(F_{i,k}) = f_k$. Durch die Verwendung des iterierten Erwartungswerts² folgt aus **CL1**

$$\mathbb{E} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \middle| C_{i,1}, \dots, C_{i,k} \right) \right) = f_k$$

(CL2) Die Anfalljahre $C_{i,1}, \dots, C_{i,I}$, $1 \leq i \leq I$, sind global unabhängig.

Die Formulierung der Modellannahme **CL1** als bedingter Erwartungswert zeigt, dass nicht $\mathbb{E}(C_{i,I})$ bzw. $\mathbb{E}(R_i)$, sondern $\mathbb{E}(C_{i,I}|D)$ bzw. $\mathbb{E}(R_i|D)$ geschätzt werden sollen, wobei

$$D = \{C_{i,k} | i + k \leq I + 1\}$$

die bisher bekannten Daten aus dem Abwicklungsdreieck sind.

Durch den folgenden Satz wird gezeigt, dass der Chain-Ladder-Projektion (2) wirklich das Modell aus **CL1** und **CL2** zugrunde liegt.

Satz:

Unter den Annahmen **CL1** und **CL2** gilt

$$\mathbb{E}(C_{i,I}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1} \quad 2 \leq i \leq I$$

²Siehe Anhang: Iterierter Erwartungswert

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

Beweis:

Mit der Abkürzung $D_i = \{C_{i,I}, \dots, C_{i,I+1-i}\}$ gilt wegen **CL2** und durch die wiederholte Anwendung von **CL1**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(C_{i,I}|D) &= \mathbb{E}(C_{i,I}|D_i) \\
 &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{i,I}|C_{i,1}, \dots, C_{i,I-1})|D_i) \\
 &= \mathbb{E}(C_{i,I-1} \cdot f_{I-1}|D_i) \\
 &= \mathbb{E}(C_{i,I-1}|D_i) \cdot f_{I-1} \\
 &= \dots \\
 &= \mathbb{E}(C_{i,I+1-i}|D_i) \cdot f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1} \\
 &= C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}
 \end{aligned}$$

□

Der nächste Satz zeigt, dass die in (2) benutzten Schätzer für $f_{I,1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}$ vernünftig sind.

Satz:

Unter den Annahmen **CL1** und **CL2** sind die gemäß (1) berechneten Schätzer \hat{f}_k erwartungstreu³ und unkorreliert mit

$$\mathbb{E}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}$$

Beweis:

Es wird zunächst die Erwartungstreue von \hat{f}_k gezeigt. Dazu sei

$$B_k = \{C_{i,j} | j \leq k, i + j \leq I + 1\} \quad 1 \leq k \leq I$$

Dann ist wegen **CL1** und **CL2**

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1}|B_k) = C_{i,k} \cdot f_k \quad 1 \leq i \leq I - k$$

und daher

$$\mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k) = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} \mathbb{E}(C_{i,k+1}|B_k)}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} = f_k$$

Das liefert

$$\mathbb{E}(\hat{f}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k)) = f_k$$

Weiters gilt für $j < k$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k|B_k)) \\
 &= \mathbb{E}(\hat{f}_j \cdot \mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k)) \\
 &= \mathbb{E}(\hat{f}_j) \cdot f_k \\
 &= f_j \cdot f_k
 \end{aligned}$$

□

³Siehe Anhang: Erwartungstreue

Daraus folgt, dass die \hat{f}_k unkorreliert sind.

Da \hat{f}_k und \hat{f}_{k-1} von denselben Daten $C_{1,k} + \dots + C_{I-k,k}$ abhängen, ist die Unkorreliertheit der \hat{f}_k überraschend. Weiters gilt auch, dass die Faktoren $F_{i,k}$ für jedes feste Anfalljahr i unkorreliert sind. Insbesondere sind auch aufeinander folgende Einzel-Abwicklungsfaktoren $F_{i,k-1}, F_{i,k}$ unkorreliert. Deshalb sollte das Chain-Ladder-Verfahren nicht bei Portefeuilles angewendet werden, da bei diesen im Allgemeinen auf einen eher hohen Abwicklungsfaktor ein niedriger folgt und umgekehrt.

Da nur Paare $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ mit $C_{i,k} > 0$ in die Berechnung für \hat{f}_k eingehen dürfen, da sonst $F_{i,k}$ ⁴ undefiniert ist, wird für diesen Fall \hat{f}_k neu als

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k} \cdot F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} \quad \text{mit } F_{i,k} := 0 \text{ falls } C_{i,k} = 0$$

definiert.

2.2 Sensitivität und Genauigkeit

Es gibt zwei heikle Stellen im Abwicklungsdreieck, die auch beim Chain-Ladder-Verfahren zu beachten sind. Die erste sensible Situation stellt das rechte obere Eck dar. Hier wird der Schätzer des letzten Abwicklungsfaktors f_{I-1} berechnet, der nur vom Beobachtungswert $S_{1,I}$ abhängt. Die im ältesten Anfalljahr beobachtete Veränderung $\hat{f}_{I-1} = \frac{(C_{1,I-1} + S_{1,I})}{C_{1,I-1}}$ wird auf alle anderen Anfalljahre $i = 2, \dots, I$ übertragen, auch wenn der Wert untypisch ist.

Der andere, untere Spitz des Dreieckes bildet die zweite kritische Stelle. Der Faktor $C_{I,1}$ im jüngsten Anfalljahr beruht nur auf den Daten aus einem Beobachtungsjahr. In manchen Versicherungsbereichen mit langer Abwicklungsdauer (z.B.: Schadenexzendenten-Rückversicherung) sagt der Zahlungsstand $C_{I,1}$ selbst am Ende des Anfalljahres noch wenig aus. Der Reserveschätzer $\hat{R}_I = C_{I,1} \cdot (\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$ für das aktuellste Anfalljahr beruht nun auf diesem unsicheren Wert. Wenn im Extremfall $C_{I,1} = 0$ gilt, wird die ganze Reserve R_I zu $\hat{R}_I = 0$ geschätzt. Was natürlich Falsch ist.

Es ist möglich ein unplausibles $C_{I,1}$ zu korrigieren. Der Reserveschätzer \hat{R}_I wird durch den Durchschnitt aller bisher beobachteten Anfalljahre ersetzt.

$$C_{I,1} := \frac{v_I \cdot \sum_{i=1}^I C_{i,I}}{\sum_{i=1}^I v_i}$$

Die Variable v_i stellt das Volumen, d.h. die Anzahl der Risiken bzw. deren Gesamtversicherungssumme oder das Prämienvolumen, des Anfalljahres i dar.

Sind die Erstjahresstände $C_{i,1}$ der anderen Anfalljahre ebenfalls unplausibel, kann durch die Rückwärtsprojektion

$$\hat{C}_{i,1} = \frac{C_{i,I+1-i}}{\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-i}}$$

⁴S. 8: $F_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$

aus den aktuellen Schadenständen ein realistischeres $C_{i,I}$ geschätzt werden. Der Schätzer für die mittlere Erstjahresschadenquote wird mit

$$\hat{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^I C_{i,I+1-i}}{\sum_{i=1}^I \hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-i} \cdot v_i}$$

bezeichnet. Der Faktor $C_{I,1}$ wird im Reserveschätzer \hat{R}_I durch $v_I \cdot \hat{q}_1$ ersetzt. Daraufhin können mit dem vorhin angewendeten Cape-Cod-Verfahren die anderen aktuellen Schadenstände $C_{I-1,2}, C_{I-2,3}, \dots$ ebenfalls „robustifiziert“ werden. Eine andere einfache Methode besteht darin, zunächst die gesamte Nettoprämieinnahme des Anfalljahrs I abzüglich $C_{I,1}$ zu reservieren, bis nach dem folgenden Jahr zuverlässigere Daten vorliegen.

Angesichts dieser Sensitivitäten ist eine Formel für die Genauigkeit des Reserveschätzers \hat{R}_i besonders wichtig. Die Schätzung der Genauigkeitsmessung der Spätschadenreserve basiert auf folgendem Modell. Ziel dieses Modells ist, die Spätschadenreserve R_i für das Anfalljahr i möglichst gut durch einen Schätzer \hat{R}_i zu prognostizieren. Gesucht ist also der bedingte mittlere quadratische Fehler (mean squared error)

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D)$$

zwischen Schätzer und Prognoseziel.⁵ Es kann wegen **CL1** die Unabhängigkeit der Abwicklungsjahre nicht vorausgesetzt werden. Hierbei ist nur die Größe des Fehlers auf Grund der zukünftigen Variabilität interessant. Der unbedingte mittlere quadratische Fehler $\mathbb{E}(R_i - \hat{R}_i)^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D))$ würde zusätzlich über alle möglichen Datenkonstellationen D mitteln.

Wegen $R_i = C_{i,I} - C_{i,I+1-i}$ und $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I+1-i}$ sind die mittleren quadratischen Fehler $\text{mse}(\hat{R}_i)$ zu \hat{R}_i und $\text{mse}(\hat{C}_{i,I})$ von $\hat{C}_{i,I}$ identisch.

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D) = \mathbb{E}((C_{i,I} - \hat{C}_{i,I})^2 | D) = \text{mse}(\hat{C}_{i,I})$$

Der Steinersche Verschiebungssatz⁶ liefert die Zerlegung

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \underbrace{\mathbb{V}(R_i | D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(R_i | D) - \hat{R}_i)^2}_{\text{Schätzfehler}} \quad (3)$$

des mittleren quadratischen Fehlers in seine Komponenten Zufallsfehler und Schätzfehler. Die Gleichung (3) zeigt, dass $\mathbb{E}(R_i | D)$ die beste Prognose von R_i im Quadratmittel ist, da $R_i = \mathbb{E}(R_i | D)$ den quadratischen Fehler minimiert. Damit diese Komponenten weiter geschätzt werden können, wird das Chain-Ladder-Modell um die Annahme über die Varianz der $C_{i,k}$ erweitert.

⁵S. 9: $D = \{C_{i,k} | i + k \leq I + 1\}$

⁶Siehe Anhang: Steinersche Verschiebungssatz

(CL3) Es gibt Proportionalitätskonstanten $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{I-1}^2$ mit

$$\mathbb{V}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}} \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1 \text{ für } C_{i,k} > 0$$

oder gleichwertig

$$\mathbb{V}(C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} \cdot \sigma_k^2.$$

Zur konkreten Berechnung wird noch der Schätzer des unbekanntem Parameters σ_k^2 benötigt. Dieser lautet:

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \cdot \sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \quad 1 \leq k \leq I-2$$

Diese Gleichung gibt leider keinen Schätzer für σ_{I-1}^2 an. Wenn davon ausgegangen werden kann, dass $f_{I-1} = 1$, und alle Schäden nach $I-1$ Abwicklungsjahren erledigt sind, kann $\sigma_{I-1} = 0$ gesetzt werden. Ansonsten muss die Folge $\sigma_1, \dots, \sigma_{I-3}, \sigma_{I-2}$ um einen weiteren Term extrapoliert werden. Dies kann entweder mittels der loglinearen Regression, da $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ meist annähernd linear in k abnehmen, oder einfacher mit der nachstehenden Forderung geschehen:

$$\frac{\hat{\sigma}_{I-3}}{\hat{\sigma}_{I-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{I-2}}{\hat{\sigma}_{I-1}} \quad \text{für } \hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$$

Somit ist $\hat{\sigma}_{I-1}^2$ als

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \hat{\sigma}_{I-3}^2 \right)$$

definiert. Nun kann der Schätzer für $\text{mse}(\hat{R}_i)$ hergeleitet werden.

Satz:

Unter den Annahmen **CL1**, **CL2** und **CL3** kann der mittlere quadratische Fehler des Reserveschätzers \hat{R}_i durch

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{i,I}^2 \cdot \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \cdot \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \right)$$

geschätzt werden, wobei $\hat{C}_{i,k} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{k-1}$ $k > I+1-i$ der Schätzer für $C_{i,k}$ ist.

Beweis:

Siehe Thomas Mack: Schadenversicherungsmathematik, Kapitel 3.2.5, S. 250-252

Der Standardfehler $s.e.(\hat{R}_i)$ ist die Quadratwurzel des Schätzers für den mittleren quadratischen Fehler $\text{mse}(\hat{R}_i)$. \hat{R}_i und $s.e.(\hat{R}_i)$ sind Schätzer für den Erwartungswert und den Standardfehler der Schadenreserve R_i für das Anfalljahr i .

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

Die Gesamtreserve $R = R_2 + \dots + R_I$ wird durch $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$ geschätzt. Zur Berechnung des Standardfehlers von \hat{R} dürfen trotz der Unabhängigkeit der Anfalljahre nicht die quadrierten Standardfehler der einzelnen Anfalljahresreserven \hat{R}_i aufaddiert werden, da die \hat{R}_i selbst nicht von einander unabhängig sind, sondern über die überall enthaltenen Schätzer $\hat{f}_k, \hat{\sigma}_k$ verbunden sind.

Satz:

Unter denselben Annahmen und Bezeichnungen wie im vorigen Satz erhält man für den mittleren quadratischen Fehler der Gesamtreserve $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$ den Schätzer

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^I \left((s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,I} \cdot \left(\sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{j,I} \right) \cdot \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\frac{2 \cdot \hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{n,k}} \right)$$

Beweis:

Siehe Thomas Mack: Schadenversicherungsmathematik, Kapitel 3.2.5, S. 253-255

3 Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

Da es nicht nur das Chain-Ladder-Verfahren zur Berechnung der Spätschadenreserve gibt, werden in diesem Kapitel noch weitere Methoden zur Berechnung der Spätschadenreserve vorgestellt, insbesondere derer, die auf der Gammeverteilung beruhen.

3.1 Allgemeines

Dem Chain-Ladder-Verfahren liegt u.a. **CL1**⁷ zu Grunde. Wird auf diese Gleichung unter der Benutzung des iterierten Erwartungswerts⁸ der Erwartungswert-Operator angewendet, so erkennt man, dass das Chain-Ladder-Verfahren ein Spezialfall einer Modellklasse, für die **(A)** $\mathbb{E}(C_{i,k+1}) = \mathbb{E}(C_{i,k}) \cdot f_k \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I - 1$ mit unbekanntem positiven Parameter f_1, \dots, f_{I-1} gilt, ist.

Satz:

Jedes Modell, für das **A** gilt, erfüllt auch

$$\mathbf{(B)} \quad \mathbb{E}(S_{i,k}) = x_i \cdot y_k \quad 1 \leq i, k \leq I$$

mit unbekanntem Parametern $x_i, y_k > 0$ und $y_1 + \dots + y_I = 1$. Umgekehrt ist auch jedes Modell der Art **B** zugleich ein Modell der Art **A**.

Beweis:

Siehe Thomas Mack: Schadenversicherungsmathematik, Kapitel 3.3.1, S. 271

Die beiden Modelle **A** und **B** werden als kreuzklassifiziert bezeichnet.

Der Unterschied zwischen dem Chain-Ladder-Verfahren **CL1** und den Modellklassen **A** und **B** wird am ehesten deutlich, wenn angenommen wird, dass die Modellparameter f_1, \dots, f_I von **CL1** bzw. x_i, y_k von **B** bekannt sind. Im Fall **B**, bei zusätzlich angenommener Unabhängigkeit der Abwicklungsjahre, hat der Reserveschätzer die von den beobachteten Daten D unabhängige Form $\hat{R}_{i,0} = x_i \cdot (y_{I+2-i} + \dots + y_I)$. Der Reserveschätzer $\hat{R}_{i,0}$ bleibt daher unverändert, wenn verschiedene Daten D aus der zugrunde liegenden Verteilung simuliert werden.

Dagegen ändert sich der Wert der Chain-Ladder-Reserve⁹, zusammen mit dem Wert von $C_{i,I+1-i}$ von Simulation zu Simulation.

Das Ziel dieser Verfahren ist es die unbekanntem Parameter x_i, y_k zu schätzen, damit man auf die Schätzer \hat{x}_i, \hat{y}_k kommt, um die unbekanntem Werte der zukünftigen Schadenabwicklung $\mathbb{E}(S_{i,k})$ $i + k > I + 1$ möglichst gut estimieren zu können.

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, dass x_i, y_k trotz fehlender Beobachtungen von $S_{i,k}$,

⁷S. 9: $\mathbb{E}(C_{i,k+1}|C_{i,I}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} \cdot f_k$

⁸Siehe Anhang: Iterierter Erwartungswert

⁹S. 9: $\hat{R}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \cdot (f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1} - 1)$

$i + k > I + 1$ geschätzt werden können. Dazu wird die Unabhängigkeit und Positivität aller $S_{i,k}$ angenommen. Im Vergleich zum Chain-Ladder-Verfahren sind diese Annahmen deutlich strenger, da dort nur die Unabhängigkeit der Anfalljahre vorausgesetzt wird, und negative Zuwächse $S_{i,k}$ nicht ausgeschlossen werden.

3.2 Ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren

Für die Zufallsvariable $S_{i,k}$ der Änderung des Schadenstands von Anfalljahr i im Abwicklungsjahr k wird das individuelle Modell

$$S_{i,k} = \sum_{n=1}^{v_i} R_{ikn}$$

angesetzt. Die Polizzenzahl v_i ist das Volumenmaß vom Anfalljahr i . R_{ikn} ist der von der n -ten Polizza stammende Änderungsbetrag, der für die meisten Polizen gleich Null ist. Die Verteilung, die dieses Modell am besten entspricht, ist die Gammaverteilung¹⁰, da die Hauptmasse der Wahrscheinlichkeit im Punkt Null liegt.

Bei der Gammaverteilung von R_{ikn} wird angenommen, dass in allen Zellen (i, k) und für alle Polizen $n = 1, \dots, v_i$ der selbe Formparameter $\alpha < 1$ verwendet wird, um die Parameterzahl nicht zu groß werden zu lassen. Der allgemeine Ansatz lautet:

$$\mathbb{E}(R_{ikn}) = x_i \cdot y_k \quad 1 \leq n \leq v_i \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(R_{ikn}) = \frac{(x_i \cdot y_k)^2}{\alpha}$$

Insgesamt ergibt sich für $S_{i,k}$ eine Gammeverteilung mit Formparameter $v_i \cdot \alpha$

$$\mathbb{E}(S_{i,k}) = v_i \cdot x_i \cdot y_k \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(S_{i,k}) = \frac{v_i \cdot (x_i \cdot y_k)^2}{\alpha}$$

Wird $S_{i,k}$ als global unabhängig angenommen, so erhält man die Likelihoodfunktion¹¹

$$L = \prod_{i,k} \exp\left(-\frac{\alpha \cdot S_{i,k}}{x_i \cdot y_k}\right) \cdot \left(\frac{\alpha \cdot S_{i,k}}{x_i \cdot y_k}\right)^{\alpha \cdot v_{i,k}} / (S_{i,k} \cdot \Gamma(\alpha \cdot v_{i,k}))$$

Die Likelihoodschätzer sind jene Werte \hat{x}_i, \hat{y}_k , die L maximieren. Durch das Nullsetzen der partiellen Ableitungen von L nach den Parametern erhält man die Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{x}_i = \frac{\sum_{k=1}^{I+1-i} \frac{S_{i,k}}{\hat{y}_k}}{v_i \cdot (I+1-i)} \quad 1 \leq i \leq I$$

$$\hat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I+1-k} \frac{S_{i,k}}{\hat{x}_i}}{\sum_{i=1}^{I+1-k} v_i} \quad 1 \leq k \leq I$$

¹⁰Siehe Anhang: Gammaverteilung

¹¹Siehe Anhang: Likelihoodfunktion

Diese ergeben sich iterativ durch abwechselndes Berechnen von \hat{x}_i und \hat{y}_k . Die Startwerte sind $\hat{y}_1 = \dots = \hat{y}_I = 1$. Der Endschaden ist $\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i$ mit dem Reserveschätzer $\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^I v_i \cdot \hat{x}_i \cdot \hat{y}_k$.

3.3 Weitere Methoden

Es gibt nicht nur die zwei in dieser Seminararbeit vorgestellten Methoden zur Berechnung der Schadenreserve, sondern noch viele weitere. Diese sind u.a.:

- Ein Modell mit der modifizierten Poissonverteilung¹²
Mittels diesem Modell kann das Chain-Ladder-Verfahren hergeleitet werden.
- Ein Verfahren mittels der Methode der kleinsten Quadrate¹³
Dieses Verfahren baut auf der Lognormalverteilung mit den Parametern $\theta_{i,k} = a_i + b_k$ und $\frac{\sigma^2}{v_i}$ auf. Es wird auch als Grundlage für die Schadenreservierungssoftware ICRFS von Ben Zehnirith verwendet.
- Ein auf der Inversen Gaußverteilung beruhendes Verfahren¹⁴
In diesem Verfahren hängt der Variationskoeffizient $VKO(S_{i,k})$ vom Abwicklungsjahr ab bzw. ist umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Anzahl der hinter $S_{i,k}$ stehenden Einzelbeiträge. Dies wird benötigt, da in den späten Abwicklungsjahren nur wenige aber überdurchschnittlich hohe Beträge anfallen. Im Gegensatz zu den ersten Abwicklungsjahren, wo überdurchschnittlich viele Schäden anfallen mit kleineren Beträgen.

¹²Siehe Thomas Mack: Sachversicherungsmathematik, Kapite. 3.3.2, S. 273-281

¹³Siehe Thomas Mack: Sachversicherungsmathematik, Kapitel 3.3.4, S. 283-289

¹⁴Siehe Thomas Mack: Sachversicherungsmathematik, Kapitel 3.3.5, S. 289-292

4 Modifikation der Verfahren

In diesem Kapitel wird auf die Problematik von Kalenderjahreffekten (z.B.: Inflation) eingegangen. Für dieses Problem kann eine Modifikation der kreuzklassifizierten Verfahren, die Separationsverfahren, eingesetzt werden. Ebenfalls wird gezeigt, wie und mit welchen Daten der Unterschied zwischen IBNR- und IBNER-Schäden sachgerecht modelliert werden kann.

4.1 Separation von Kalenderjahreffekten

Die Auswirkung der Inflation spielt bei den Schadenreservierungsverfahren eine wichtige Rolle. Selbst wenn die monetäre, finanzielle Inflation¹⁵ aus den Daten eliminiert wurde, kann immer noch ein signifikanter Kalenderjahreffekt vorhanden sein (z.B.: superimposed inflation¹⁶). Die Kalenderjahre stellen im Abwicklungsdreieck neben den Anfall- und Abwicklungsjahren eine dritte Richtung dar. Sie sind, wie in Kapitel 1.3. (Abwicklungsdreieck) beschrieben, die Parallelen der Hypotenuse des Abwicklungsdreieckes. Anfall- und Abwicklungsjahre sind voneinander unabhängig, d.h. sie können voneinander unabhängige Trends aufweisen. Jedoch wirkt der Kalenderjahreffekt auf die Anfall- und die Abwicklungsjahre. Mittels dem kreuzklassifiziertem Modell $\mathbb{E}(S_{i,k}) = x_i \cdot y_k, 1 \leq i, k \leq I$ wird das verdeutlicht. Wirkt auf dieses Modell ein konstanter jährlicher Inflationfaktor $u > 1$, so ergibt das:

$$\mathbb{E}(S_{i,k}) = x_i \cdot y_k \cdot u^{i+k-2} \quad 1 \leq i, k \leq I$$

Wird dies wieder in die kreuzklassifizierte Form

$$\mathbb{E}(S_{i,k}) = (x_i \cdot u^{i-1}) \cdot (y_k \cdot u^{k-1})$$

umgeschrieben, erkennt man, dass die Inflation sich sowohl auf die Anfalljahre als auch auf die Abwicklungsjahre überträgt. Es ist daher nicht möglich, mit Hilfe eines kreuzklassifizierten Modells zu erkennen, ob in den Daten ein konstanter Kalenderjahreffekt enthalten ist, da dieser in den beiden Parametern der Anfall- und der Abwicklungsjahre aufgeht. Ist ein konstanter Kalenderjahreffekt bereits in den Daten enthalten, so wird von den kreuzklassifizierten Modellen auf die prognostizierten Werte $S_{i,k}, i+k > I+1$ extrapoliert. Die Tatsache, dass eine konstante Inflation nicht erkannt werden kann, ist jedoch bei kreuzklassifizierten Modellen nicht weiter störend, solange man mangels besserem Wissen, annehmen muss, dass dieselbe konstante Inflation u auch auf die künftigen Kalenderjahre fortgesetzt wird. Nichtkonstante Kalenderjahreffekte u_j bewirken ein Modell der Form $S_{i,k} = S_{i,k} \cdot u_{i+k}, 2 \leq j \leq I+1$ und können nicht in multiplikativer Form $u_{i+k} = t_i \cdot w_k$ aus Zeilen- und Spalteneffekten zusammengesetzt werden, da die Anwendung eines kreuzklassifizierten Modells die Abweichungen zwischen $u_{i,k}$ und $t_i \cdot w_k$ mit den Zufallsschwankungen der Schadenvariablen $S_{i,k}$ vermischt und diese dann fälschlicherweise auf die Zukunft übertragen werden.

¹⁵Die monetäre Inflation wurde in dieser Seminararbeit bis jetzt nicht erwähnt, da gleich von den bereinigten Daten D ausgegangen wurde.

¹⁶Nach der üblichen Inflationsbereinigung ist noch ein trendmäßiger Anstieg der jährlichen Schadenlast zu beobachten. Gründe dafür sind z.B.: Veränderung der Rechtsprechung, steigendes Anspruchsdenken der Geschädigten.

Eine nichtkonstante Inflation liegt dann vor, wenn die Daten $S_{i,k}$ so transformiert wurden, dass ohne Inflation entweder keine systematischen Anfalljahrunterschiede bzw. keine systematischen Abwicklungsjahrunterschiede vorliegen. Denn so können vorhandene Anfalljahr- bzw. Abwicklungsjahrunterschiede direkt auf die Inflation zurückgeführt werden.

4.2 Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden

In Kapitel 1.1 (lang andauernde Schadenabwicklung und ihre Ursachen) wurde der Unterschied zwischen IBNR- und IBNER-Schäden erklärt. Jedoch wurde auf den Unterschied in den vorgestellten Verfahren zur Berechnung der Spätschadenreserve nicht eingegangen. In Wirklichkeit bestehen beide Unsicherheitsquellen gleichzeitig. Oft liegen die Daten auch nur in einer Form vor, die eine Unterscheidung zwischen IBNR und IBNER nicht zulässt. Versicherungsgesellschaften sind allerdings normalerweise in der Lage, die zur Trennung erforderlichen Informationen bereitzustellen. Zur Berechnung der Reserve mit getrennten Schadenarten wird zuerst der Änderungsbetrag $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ des Schadenstandes von Anfalljahr i , der sich im Lauf des Abwicklungsjahres k ergeben hat, in die Bestandteile

$$S_{i,k} = T_{i,k} + U_{i,k} \quad T_{i,1} = 0, \text{ d.h. } C_{i,1} = S_{i,1} = U_{i,1}$$

zerlegt. Die Variable $T_{i,k}$ bezieht sich auf die IBNER-Schäden und der Betrag $U_{i,k}$ bezeichnet die IBNR-Schäden.

Bei der Modellierung der echten Spätschäden $U_{i,k}$, aus Sicht vom Abwicklungsjahr $k - 1$, kann davon ausgegangen werden, dass $U_{i,k}$ sowohl von $U_{i,1}, \dots, U_{i,k-1}$ als auch von $T_{i,1}, \dots, T_{i,k-1}$ unabhängig ist. Der unbedingte Erwartungswert von $U_{i,k}$, welcher vom Abwicklungsjahr k und dem bekannten Volumen v_i des Portefeuilles im Anfalljahr i abhängt, kann mit dem unbekanntem Parameter m_k modelliert werden.

$$\mathbb{E}(U_{i,k}) = v_i \cdot m_k \quad 1 \leq i, k \leq I$$

Die Varianz von $U_{i,k}$ hat somit die Gestalt mit dem unbekanntem Parameter s_k :

$$\mathbb{V}(U_{i,k}) = v_i \cdot s_k^2 \quad 1 \leq i, k \leq I$$

Anders sieht es bei der Modellierung des Änderungsbetrages der offenen Schäden $T_{i,k}$ aus. Der Betrag $T_{i,k}$ ist unabhängig von $U_{i,k}$, jedoch nicht von der vergangenen Schadenabwicklung. Da alle hinter $T_{i,k}$ stehenden Einzelschäden im vergangenen Abwicklungsjahr $k - 1$ bekannt waren, wird angenommen, dass der Erwartungswert von $T_{i,k}$ von der Gesamthöhe aller noch offenen Schäden abhängt. Wenn noch viele Schäden offen sind, wird sich betragsmäßig mehr ändern, als wenn nur noch wenige Schäden offen sind. Da die Änderungsrate vom Abwicklungsjahr abhängt, wird sie für die Gesamtheit aller Daten von Anfalljahr i bis einschließlich Abwicklungsjahr $k - 1$, mit $D_{i,k-1}$ bezeichnet. Der bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz mit unbekanntem Parameter h_k, t_k lauten somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{i,k} | D_{i,k-1}) &= C_{i,k-1} \cdot h_{k-1} \\ \mathbb{V}(T_{i,k} | D_{i,k-1}) &= C_{i,k-1} \cdot t_{k-1}^2 \end{aligned}$$

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

Es wird in der vorangehenden Formel $C_{i,k-1}$ verwendet, um das Modell möglichst einfach zu halten. Korrekterweise müsste die Summe aller Einzelfallreserven zum Ende vom Abwicklungsjahr $k - 1$ einbezogen werden. Da die Einzelfallreserven einen Anteil b_k des Gesamtschadens $C_{i,k}$ ausmachen, ist diese Vereinfachung kein Problem, sofern der Faktor b_k in h_k einbezogen wird.

Damit ergibt sich für $C_{i,k}$ das folgende Modell:

$$\mathbb{E}(C_{i,k}|D_{i,k-1}) = \mathbb{E}(C_{i,k-1} + T_{i,k} + U_{i,k}|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} \cdot (1 + h_{k-1}) + v_i \cdot m_k$$

Die erwartungstreuen¹⁷ Schätzer für die unbekannt Parameter sind:

$$\begin{aligned} \hat{h}_k &= \frac{\sum_{i=1}^{I-k} T_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} & 1 \leq k \leq I-1 \\ \hat{m}_k &= \frac{\sum_{i=1}^{I+1-k} U_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I+1-k} v_i} & 1 \leq k \leq I \\ \hat{s}_k^2 &= \frac{1}{I-k} \cdot \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i \cdot \left(\frac{U_{i,k}}{v_i} - \hat{m}_k \right)^2 & 1 \leq k \leq I-1 \\ \hat{s}_I^2 &= \min\{\hat{s}_k^2 | 1 \leq k \leq I-1\} \\ \hat{t}_k^2 &= \frac{1}{I-k-1} \cdot \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k} \cdot \left(\frac{T_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{h}_k \right)^2 & 1 \leq k \leq I-2 \\ \hat{t}_I^2 &= \min \left\{ \frac{\hat{t}_{I-2}^4}{\hat{t}_{I-3}^2}, \hat{t}_{I-3}^2 \right\} \end{aligned}$$

Mit $U_{i,k}$ und $T_{i,k}$ sind auch \hat{m}_k und \hat{h}_{k-1} voneinander unabhängig. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} D &= \{U_{i,k}, T_{i,k} | i+k \leq I+1\} \\ D_i &= \{U_{i,k}, T_{i,k} | 1 \leq k \leq I+1-i\} \end{aligned}$$

für die bekannten Daten und unter der üblichen Annahme der Unabhängigkeit der Daten verschiedener Anfalljahre gilt für $k > I+1-i$

$$\mathbb{E}(C_{i,k}|D) = \mathbb{E}(C_{i,k}|D_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{i,k}|D_{i,k-1})|D_i) = v_i \cdot m_k + \mathbb{E}(C_{i,k-1}|D_i) \cdot (1 + h_{k-1})$$

Sukzessive Anwendung dieser Beziehung und der Abkürzung $g_k = 1 + h_k$ ergibt sich:

$$\mathbb{E}(C_{i,I}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot g_{I+1-i} \cdot \dots \cdot g_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i \cdot m_k \cdot g_k \cdot \dots \cdot g_{I-1}$$

Der mittlere Endschaden ergibt sich, indem der aktuelle Schadenstand $C_{i,I+1-i}$, und die erwarteten Spätschäden $v_i \cdot m_k, I+2-i \leq k \leq I$, mit den Faktoren g_j weiterentwickelt

¹⁷Siehe Anhang: Erwartungstreu

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

werden. Der Endschaden $C_{i,I}$ wird, mit $\hat{g}_k = 1 + \hat{h}_k$, somit durch

$$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{g}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{g}_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i \cdot \hat{m}_k \cdot \hat{g}_k \cdot \dots \cdot \hat{g}_{I-1}$$

und die Reserve R_i durch

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I+1-i}$$

geschätzt.

Falls die Daten auf wenigen Schäden beruhen, kann die Trennung von IBNR- und INBER-Schäden dazu führen, dass das Abwicklungsmuster der Daten schlechter zu erkennen ist. Das Verfahren der Trennung sollte jedoch auf jeden Fall angewendet werden, wenn es die Datendetaillierung zulässt.

5 Fazit

Die Bedeutung der Schadenreserve wird in Zukunft noch mehr zunehmen. Seit 1993 muss in den USA und in Kanada die Höhe der Spätschadenreserve (ähnlich wie in Österreich die Deckungsrückstellung in der Lebens-, Kranken- und Unfallversicherung) von einem versicherungsmathematischen Testat(z.B.: Akturiat) überprüft werden. Es ist wohl nur eine Frage der Zeit, bis Entsprechendes auch für die Schadenreserve in der Haftpflichtversicherung gilt.

In dieser Seminararbeit wurden einige mathematische Verfahren zur Berechnung der Spätschadenreserve vorgestellt. Sie sind zu vielen unterschiedlichen Ausgestaltungen und Verfeinerungen fähig, sodass es insgesamt ein ausreichendes Instrumentarium zur Analyse der Daten und zur Schätzung der Schadenreserve gibt. Die Größe des Standardfehlers gibt die Genauigkeit der geschätzten Reserve an und ist somit ein wichtiges Hilfsmittel zur Erkennung des besten Verfahrens.

Das Chain-Ladder-Verfahren ist das wichtigste Verfahren und wird seine zentrale Stellung innerhalb der verschiedenen Reservierungsverfahren beibehalten. Die anderen Verfahren werden sich nur in Situationen etablieren können, wo ihr Standardfehler unter dem des Chain-Ladder-Verfahrens liegt oder wo detailliertere Daten vorliegen.

Quellen

- Mack, Thomas (2002): Schadenversicherungsmathematik
Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe
- Felsenstein, Klaus (2007): Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Statistik
Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie TU Wien
- Wikipedia: Arithmetisches Mittel
Internetadresse: http://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetisches_Mittel, Stand vom 29.04.2009

Anhang

Arithmetisches Mittel:

Das gewichtete Mittel wird verwendet, wenn Mittelwerte $x_i, i = 1, \dots, n$, aus n Stichproben der gleichen Grundgesamtheit mit verschiedenen Stichprobenumfängen w_i miteinander kombiniert werden sollen.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Erwartungstreu:

Eine Schätzfunktion T , die $\mathbb{E}(T) = \theta$ für alle θ erfüllt, heißt erwartungstreu für θ .

Gammafunktion:

Eine stochastische Größe X ist gammaverteilt $\gamma(a, b)$ mit $a, b > 0$, wenn die Dichte von X durch

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-b \cdot x} \quad x > 0$$

gegeben ist, mit $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{b} = \mu$ und $\mathbb{V}(X) = \frac{a}{b^2}$

Im angewandten Fall wird der Parameter b durch den Erwartungswert μ ersetzt. Somit folgt für die Dichte der Gammafunktion $\gamma(a, \mu)$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{a}{\mu}\right)^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\frac{a}{\mu} \cdot x} \quad x > 0$$

mit $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\mathbb{V}(X) = \frac{\mu^2}{a}$

Iterierter Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z))$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y, Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$$

Likelihoodfunktion:

Für kontinuierliche Verteilungen ist die Likelihoodfunktion die gemeinsame Dichte der Stichprobe (X_1, \dots, X_n) , aufgefasst als Funktion des Parameters θ

$$l(\theta) = l(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta)$$

Steinersche Verschiebungssatz:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Für den bedingten Erwartungswert mit einem Skalar:

$$\mathbb{V}(X|Y) = \mathbb{E}((X - h(Y))^2|Y) - (\mathbb{E}(X|Y) - h(Y))^2$$