Zeitreihe in der Finanzmathematik

Asani Silvia

12. November 2009

Gliederung

Gliederung

1. Einleitung

- Was sind Zeitreihen?
- Zeitreihenanalyse
- Zusammenhang von Zeitreihen mit der Finanzmathematik

Was sind Zeitreihen?

Definition:

Eine **Zeitreihe** ist eine (endliche) Folge von zeitliche geordneten Beobachtungen/Messwerten.

$$((t_k, y_k) | k = 1, 2, ..., T)$$

$t_k \in \mathbb{R}$: Zeitpunkt, $t_1 < t_2 < ... < t_T$.
$y_k \in \mathbb{R}^n$: Messwert(e) zum Zeitpunkt t_k.

Eigenschaften von Zeitreihen

- Geringe Abhängigkeiten zwischen den untersuchten Größen
- Bedingte Erwartungswerte nahe null
- Veränderung der Varianzen über die Zeit

Zeitreihenanalyse

Zeitreihenanalyse

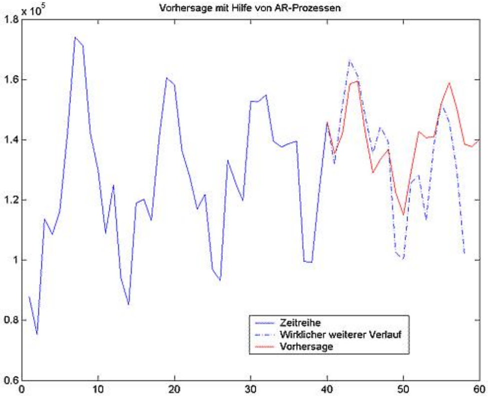
Die Zeitreihenanalyse beschäftigt sich mit der mathematisch - statistischen Analyse von Zeitreihen und der Vorhersage ihrer künftigen Entwicklung.

Anwendung der Zeitreihenanalyse

- besseres Verständnis des zugrunde liegenden Systems
- Prognose
- Erkennen von Veränderungen
- Berechnung von Kennzahlen
- Signalverarbeitung

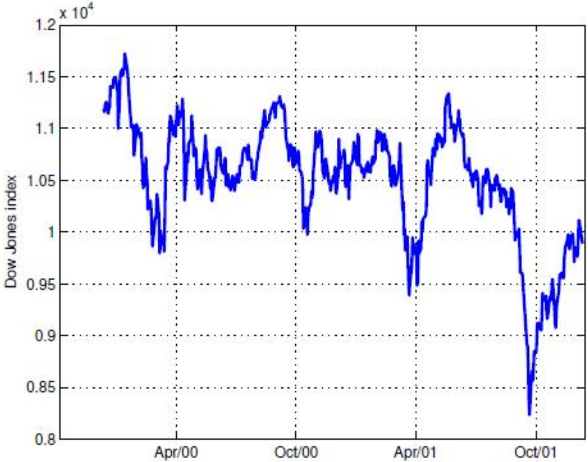
Zusammenhang von Zeitreihen mit der Finanzmathematik

- Vorhersage von Preisen



- Einsatz im Risikomanagement
- Schätzungen von Zinsstrukturen

Dow-Jones-Index



Gliederung

2. Modelle für Zeitreihen

- stationäre Prozesse
- MA(q)-Prozess
- AR(p)-Prozess
- ARMA(p,q)-Prozess
- ARIMA(p,q,d)-Prozess
- Nicht-lineare Zeitreihen

stochastischer Prozess

Definition

Ein **stochastischer Prozess** ist eine Familie von reellen Zufallsvektoren, die auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind:

$$X_t : (\Omega \times \mathbb{T}) \to \mathbb{R}^n$$

$$(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)$$

stationäre Prozesse (1)

Eine Zeitreihe wird als stationär bezeichnet, wenn ...
...sich der Mittelwert nicht mehr ändert,
...sich die Varianz nicht mehr ändert,
...periodische Variationen nicht mehr vorkommen.

stationäre Prozesse (2)

schwach stationäre Prozesse

Ein stochastische Prozess ist schwach stationär, wenn

- $\mathbb{E}X_t = \mu$ für alle $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{V}X_t = \gamma(0) < \infty$, für alle $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{C}(X_{t+k}, X_t) = \gamma(k)$, für alle $t, k \in \mathbb{Z}$

strikt stationäre Prozesse

Ein stochastischer Prozess ist strikt stationär, wenn die gemeinsame Verteilung von $(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$ für alle endlichen Teilmengen $\{t_1, \dots t_n\} \subset \mathbb{Z}$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$ unabhängig von k ist.

stationäre Prozesse (3)

Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion

Die **Autokovarianzfunktion** *(Autokorrelationsfunktion)* eines *(schwach)* stationären Prozesses ist definiert durch

$$\gamma(k) = \mathbb{C}(X_{t+k}, X_t) = \mathbb{E}(X_{t+k} - \mathbb{E}X_t)(X_t - \mathbb{E}X_t)$$
$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Eigenschaften:

- Symmetrie: $\gamma(k) = \gamma(-k)$
- Positivität: $(\gamma(k)|k \in \mathbb{Z})$ ist positiv semidefinit.
- $-1 \leq \rho(k) \leq 1$, $(\rho(0) = 1)$

White Noise

Definition

Ein **White Noise** oder auch Weißes Rauschen, ist ein schwach stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit der Autokorrelationsfunktion:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Definition

Eine Serie von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit endlicher Varianz σ^2 wird als **strikter White Noise Prozess** SWN(μ, σ^2) bezeichnet.

Martingal-Differenz

Definition

Erfüllt eine Zeitreihe $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ folgende Eigenschaften:

$$\mathbb{E}|X_t| < \infty$$
$$X_t \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-messbar}$$
$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

sagt man sie erfüllt die Eigenschaft der **Martingal-Differenz**.

Moving Average Prozess

Definition

Sei $(\epsilon_t) \sim WN(\sigma^2)$ weißes Rauschen. Einen Prozess

$$X_t = \sum_{k=0}^{q} b_k \epsilon_{t-k}$$

nennt man **MA-Prozess**. Gilt $b_0 \neq 0, b_q \neq 0$ dann ist (X_t) ein MA-Prozess der Ordnung q (MA(q)).

Eigenschaften:

- MA-Prozesse sind stationär:
  $\mathbb{E}X_t = 0$
  $\mathbb{V}X_t = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q} b_i^2$

Autoregressiver Prozess

Definition

Sei $(\epsilon_t) \sim WN(\sigma^2)$ ein White-Noise-Prozess. Dann nennen wir einen Prozess X_t **AR(p)-Prozess** der Ordnung p, wenn er eine Darstellung der Form

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \ldots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

für $a_p \neq 0$ hat.

Eigenschaften:

- $\mathbb{E}X_t = 0$
- $\mathbb{V}X_t = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i}$.

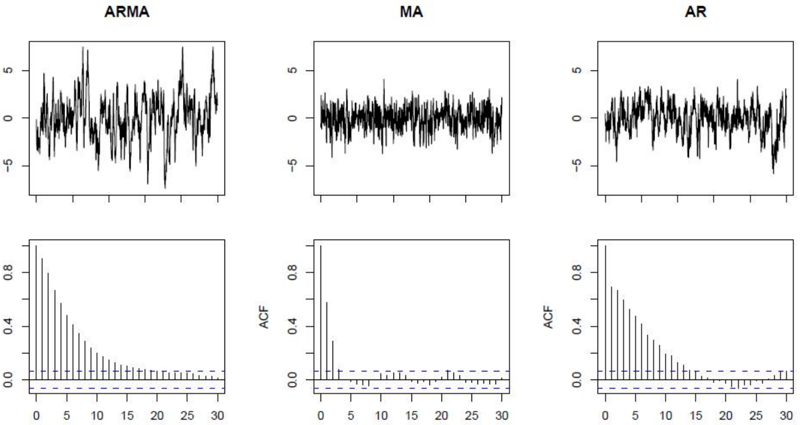
Autoregressiver Moving Average Prozess

Definition

Ein **ARMA(p,q)-Prozess** mit $p, q \in \mathbb{N}$ und Erwartungswert 0 ist ein schwach stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, welcher folgene Differenzengleichung erfüllt:

$$X_t - a_1 X_{t-1} - ... - a_p X_{t-p} = \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + ... + b_q \epsilon_{t-q}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Darstellungsvergleich



AR Integrated MA Prozess

Definition

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ wird als **ARIMA(p,q,d)-Prozess** mit Schrittweite $d \in \mathbb{N}$ und Ordnungen $p, q \in \mathbb{N}$ bezeichnet, wenn der aus der Differenz gebildete Prozess

$$Y_t = X_t - X_{t-d} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

die Bedingungen eines ARMA(p,q)-Prozesses erfüllt.

Nicht-lineare Zeitreihen

Autoregressiver Conditionally Heteroskedastic Prozess

Sei $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein strikter White Noise Prozess SWN(0,1).
Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ wird als **ARCH-Prozess** bezeichnet, wenn für alle $t \in \mathbb{Z}$ und einige streng positive Werte $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2$$

Damit die Varianz immer positiv ist, wird zusätzlich $\alpha_0 > 0$ und $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., p$ gefordert.

Nicht-lineare Zeitreihen

Generalized ARCH Prozess

$(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sei ein strikter White-Noise-Prozess SWN(0,1). Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ wird als **GARCH-Prozess** bezeichnet, wenn für alle $t \in \mathbb{Z}$ und einige streng positive Werte $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

für $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., p$ und $\beta_j \geq 0$, $j = 1, ..., q$.

Beispiel GARCH(1,1)

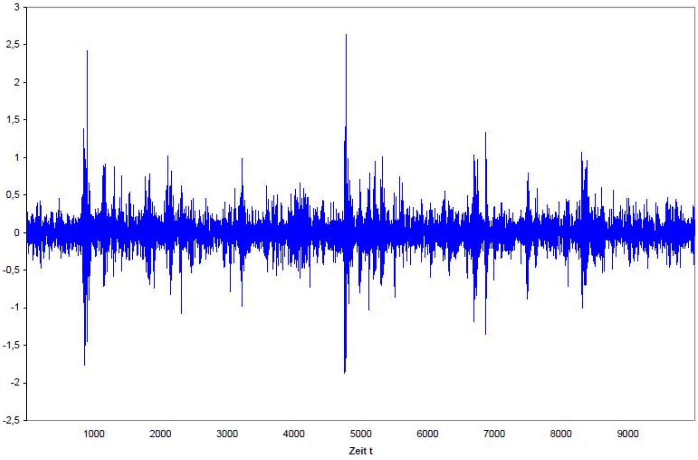


Abbildung: Simulation eines GARCH(1,1)-Prozesses

Bemerkungen

ARCH-Prozess

- $\mathbb{V}X_t$ ist genau dann endlich, wenn $\alpha_1 + ... + \alpha_p < 1$
- X_t^2 eines ARCH(p)-Prozesses ist ein AR(p)- Prozess

GARCH-Prozess

- $\mathbb{V}X_t$ ist genau dann endlich, wenn $\alpha_1 + ... + \alpha_p + \beta_1 + ... + \beta_q < 1$
- Existiert das vierte Moment von X_t existiert, so ist das Quadrat X_t^2 eines GARCH(p,q)-Prozesses ein ARMA(max(p,q),p)-Prozess

Gliederung

3. Vorgehensweise von Zeitreihenanalyse

- Modellauswahl
- Modellschätzung
- Modelldiagnose
- Einsatzphase des Modelles (Prognose)

Modellauswahl

- graphische Darstellung der empirischen Zeitreihenwerte:
  $\Rightarrow$ Existenz von Trends
  $\Rightarrow$ Saisonalitäten
  $\Rightarrow$ sonstige Auffälligkeiten
- z.B.: lineare Korrelation zwischen Zeitwerten (ARMA-Modell)
- z.B.: nicht-lineare Korrelation zwischen Zeitwerten (ARCH- oder GARCH-Modell)

Informationskriterium

Auswahl der Ordnung p und q eines Modelles!

- Akaikes Informationskriterium
  $\Rightarrow AIC(p,q) := \ln \hat{\sigma}^2_{p,q} + 2\frac{(p+q)}{N}$

- Bayessche Informationskriterium
  $\Rightarrow BIC(p,q) := \ln \hat{\sigma}^2_{p,q} + \frac{(p+q)\ln N}{N}$

- Hannan-Quinn Informationskriterium
  $\Rightarrow HQ(p,q) := \ln \hat{\sigma}^2_{p,q} + \frac{2(p+q)*c*\ln(\ln N)}{N} \quad \text{mit } c > 1$

Modellschätzung

Die Parameter des ausgewählten Modelles werden geschätzt!

Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$f_{X_0,\dots,X_n}(x_0,\dots,x_n) = f_{X_0}(x_0) \prod_{t=1}^{n} f_{X_t|X_{t-1},\dots,X_0}(x_t|x_{t-1},\dots,x_0)$$

Modellschätzung an einem ARCH(p)-Modell

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2$$

$Z_t = \frac{X_t}{\sigma_t}$ N(0,1) - verteilt

Setze für p = 1:
Auswahl der zu schätzenden Parameter α_0, α_1:

$$f_{X_1,...,X_n|X_0}(x_1, ..., x_n|x_0) = \prod_{t=1}^{n} f_{X_t|X_{t-1},...,X_0}(x_t|x_{t-1}, ..., x_0)$$

Modellschätzung an einem ARCH(1)-Modell

Bildung der bedingten Dichte mit:

$$f_{X_t|X_{t-1},\ldots,X_0}(x_t|x_{t-1},\ldots,x_0) = f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{x_t}{\sigma_t})$$

wobei σ_t sich aus der Vergangheit berechnen lässt:

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2}$$

Likelihoodfunktion:

$$L(\alpha_0, \alpha_1; X) = f_{X_1,\ldots,X_n|X_0}(x_1,\ldots,x_n|x_0) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{X_t}{\sigma_t})$$

Modellschätzung an einem GARCH(p,q)-Modell

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Setze für p,q = 1:
Parameter: $\alpha_0, \alpha_1, \beta$
Startwert: σ_0

Likelihoodfunktion:

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta; X) = f_{X_1,\dots,X_n|X_0,\sigma_0}(x_1, \dots, x_n | x_0, \sigma_0) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{x_t}{\sigma_t})$$

mit $\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}$.

Modelldiagnose

1. Überprüfung ob geschätzte Koeffizienten signifikant von Null verschieden sind (T-Tests)
2. Überprüfen inwieweit die empirischen Autokorrelationskoeffizienten mit den vorhergeschätzten Koeffizienten übereinstimmen
3. Analyse der Residuen (Differenz zwischen Regressionsgerade & Messwerten)

Einsatzphase

Prognose für die Zukunft

- Modellauswahl
  $\Rightarrow$ Verwendung für zukünftige gerichtete Prognosen
- Prognosenfehler
  $\Rightarrow$ Analyse von systematischen Abweichungen
- Modell neu auswählen

Gliederung

4. Multivariate Zeitreihen

- Stationäre multivariate Zeitreihen
- Multivariater White Noise Prozess
- multivariate Modelle

Multivariate Zeitreihen

- Betrachtung von zwei oder mehr Zeitreihen gemeinsam
- mehrere Werte pro Zeiteinheit
- Zeitwerte werden als Vektoren betrachtet
- Keine Beschränkung der Korrelation auf einzelne Zeiten, sondern auch zwischen den verschiedenen Zeitreihen

Stationäre multivariate Zeitreihen

schwach stationär

Die multivariate Zeitreihe $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist schwach stationär, wenn die ersten zwei Momente existieren, die Erwartungswerte konstant sind und die Kovarianzfunktion nur vom zeitlichen Abstand abhängt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathbf{X}_t &= \mu t \in \mathbb{Z}, \\ \Gamma(t,s) &= \Gamma(t+k, s+k) t, s, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

strikt stationär

Eine multivariate Zeitreihe $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ nennt man strikt stationär, wenn jedes endliche Teilsystem in der Verteilung mit einem um s Zeitpunkte verschobenen System ident ist.

$$(\mathbf{X}_t, ..., \mathbf{X}_{t_n}) \stackrel{d}{=} (\mathbf{X}_{t_1+k}, ..., \mathbf{X}_{t_n+k}), \quad \forall t_1, ..., t_{t_n}, k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

multivariater White Noise Prozess

multivariater White Noise Prozess

Ein schwach stationärer Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist ein multivariater White Noise Prozess, wenn seine Korrelations Matrix Funktion wie folgt aufgebaut ist:

$$P(k) = \begin{cases} P, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

strikter multivariater White Noise Prozess

Ein Vektor von Serien von identisch, unabhängig verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Kovarianz-Matrix ist ein strikter multivariater White Noise Prozess.

multivariate Modelle

Vektor ARMA Prozess

Sei $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein multivariater White Noise Prozess $WN(\mathbf{0}, \Sigma_\epsilon)$.
Die schwach stationäre Lösung $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ der Differenzengleichung

$$X_t - \Phi_1 X_{t-1} - ... - \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} = \epsilon_t + \Theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \Theta_q \epsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

wobei die Parmeter Φ_i und Θ_j Matrizen der Form $\mathbb{R}^{dxd}$ sind, ist ein **VARMA(*p*,*q*)-Prozess** mit Erwartungswert null.

Ein VARMA(p,q)-Prozess mit Erwartungswert μ ergibt sich, wenn der Prozess $(\mathbf{X}_t - \mu)_{t\in\mathbb{Z}}$ die obrige Differenzengleichung erfüllt.

multivariate Modelle

multivariater GARCH-Prozess

Der Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist ein **multivariater GARCH-Prozess**, wenn er strikt stationär und die Gleichung:

$$\mathbf{X}_t = \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

wobei $\Sigma_t^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{dxd}$ der Cholesky-Faktor der positiv-definiten Matrix Σ_t ist, erfüllt.

Quellenangabe

- Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools *von Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, & Paul Embrechts, Kapitel 4, Financial Time Series*
- Einführung in die stochastischen Prozesse und Zeitreihenanalyse *von Prof. Scherrer, SS09*
- http://www.math.uni-hamburg.de/home/drees/VM3_05_06/Kapitel5.pdf

Vielen Dank!