

# optimale Rückversicherung

Magdalena Ettlstorfer

09. Dezember 2009

# Einleitung

Rückversicherung = Versicherung der Versicherer

Durch Rückversicherung schützt sich der Erstversicherer vor der Gefahr nicht kalkulierbare Schäden zu erleiden.

# Grundformen der Risikoteilung

- *proportionale Risikoteilung*: Schadenvariable  $X$  in der Form

$$X = cX + (1 - c)X, \quad 0 < c < 1$$

Aufteilung in die beiden Teile  $cX$  und  $(1 - c)X$

- *nichtproportionale Risikoteilung*: Schadenvariable  $X$  in der Form

$$X = \min(X, a) + \max(X - a, 0), \quad a > 0$$

Aufteilung in Erstrisiko  $\min(X, a)$  und Zweitrisko  $\max(X - a, 0)$

# Gründe und Formen für eine Rückversicherung

Grund für das Funktionieren von Versicherung ist der sogenannte *Ausgleich im Kollektiv*  $\Rightarrow$  Schätz- und Zufallsrisiko des Versicherungsunternehmens wird verringert

Ist die Sicherheitswahrscheinlichkeit  $G(b + c)$  für ein Versicherungsunternehmen zu niedrig, so kann es sich seinerseits Versicherungsschutz kaufen.

Diese Möglichkeit, einen Teil der übernommenen ungewissen Schadenkosten wieder durch fixe Kosten zu ersetzen, wird **RÜCKVERSICHERUNG** genannt.

- **RÜCKVERSICHERER:**  
Versicherungsunternehmen, das einem anderen Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz gewährt
  
- **ERSTVERSICHERER:**  
Unternehmen, das die Originalpolizzen ausstellt,

Der Rückversicherer hat keine Vertragsbeziehung mit den Versicherungsnehmern der bei ihm rückversicherten Policen.

## Arten der Rückversicherung

- **FAKULTATIVE RÜCKVERSICHERUNG:**  
Einzelne Großschäden werden zwischen mehreren Versicherungsunternehmen aufgeteilt.
  
- **OBLIGATORISCHE RÜCKVERSICHERUNG:**  
Der überwiegende Teil der Rückversicherung erfolgt innerhalb eines Vertrags zwischen Erst- und Rückversicherer, in dem für alle im Vertragszeitraum im Portefeuille des Erstversicherers befindlichen Risiken festgelegt ist, welchen Teil der Risiken bzw. Schäden der Rückversicherer zu tragen hat und welche Prämie er dafür erhält.

Vertragsdauer: normalerweise 1 Jahr

## proportionale Rückversicherung

- 1 *Quoten-Rückversicherung*: Der Rückversicherer übernimmt einen festen, überall gleichen Prozentsatz von allen Polizzen.
- 2 *Summenexzedenten-Rückversicherung*: Selbstbehaltsanteil beträgt  $c = c(v) = \min(v_0/v, 1)$ , d.h. der Erstversicherer behält Risiken mit Versicherungssumme  $v \leq v_0$  ganz selbst und beteiligt den Rückversicherer nur bei Risiken mit Versicherungssummen über  $v_0$  und zwar derart, dass der Rückversicherer jeweils den Anteil übernimmt, der der über  $v_0$  hinausgehenden Versicherungssumme entspricht.

## nichtproportionale Rückversicherung

- 1** *Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung*: Erstversicherer trägt von allen Schäden  $X$ , egal von welchem der unter den Vertrag fallenden Risiken, das Erstrisiko  $\min(X, a_0)$  bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag  $a_0$  (=PRIORITÄT) selbst; Rückversicherer zahlt den übersteigenden Teil  $\max(X - a_0, 0)$ .
- 2** *Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung*: Diese Rückversicherungsform ist analog zur Einzelschadenexzedenten - Rückversicherung mit kleiner Ausnahme
- 3** *Jahresüberschaden-Rückversicherung oder Stop Loss*: Übersteigt der Gesamtschaden  $S$  des Erstversicherers aus einem Jahr (und einer Branche) die vereinbarte Priorität  $s_0$ , so übernimmt der Rückversicherer den übersteigenden Teil bis zu einer vereinbarten Höchstgrenze  $s_1$ .

# Entscheidung über Form und Umfang der Risikoteilung

## prinzipielle Entscheidungen

- 1 Form der Risikoteilung (proportional, nichtproportional)  
auf welche Schäden bezieht sich  $X$
- 2 Umfang der Risikoteilung (Aufteilungsverhältnis,  
Höchstgrenze)

Ein Rückversicherungsvertrag regelt die Teilung des Jahresgesamtschadens  $S$  des Erstversicherers in einer bestimmten Versicherungssparte. Dabei wird ein Teil  $R$ ,  $0 < R < S$ , von  $S$  auf den Rückversicherer transferiert zusammen mit einer Prämie  $b(R)$ .

Bezeichnet  $b$  die zu  $S$  gehörende, um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieinnahme des Erstversicherers, so hat dieser das betriebswirtschaftliche Ergebnis

$$b - S \dots \text{vor der Rückversicherung}$$

mit dem Ergebnis

$$b - S - (b(R) - R) - k_1 \dots \text{nach Rückversicherung}$$

zu vergleichen.

$k_1 \dots$  zusätzlich verursachten (Verwaltungs-)Kosten des Erstversicherers

Rückversicherer hat als betriebswirtschaftliches Ergebnis aus diesem Vertrag 0 vor Vertragsabschluss und  $b(R) - R - k_2$  nach Vertragsabschluss, wobei  $k_2$  seine auf diesen Vertrag entfallenden Akquisitions- und Verwaltungskosten sind.

$b(R)$  muss also mindestens so hoch sein wie  $E(R) + k_2$ , wenn der Rückversicherer nicht auf Dauer Verlust machen will.

Erst- und Rückversicherer zusammen haben also nach Rückversicherung ein um  $k_1 + k_2$  schlechteres betriebswirtschaftliches Ergebnis als vor Rückversicherung.

# Probleme

- 1 Können durch Rückversicherung entstehenden zusätzlichen Transaktionskosten  $k_0 = k_1 + k_2$  durch Synergieeffekte wieder wettgemacht werden?
- 2 Es ist ein Modell zu entwickeln, anhand dessen der Erstversicherer bezüglich eines konkreten Rückversicherungsvertrags entscheiden kann, ob die Variante ohne Rückversicherung oder die Variante mit Rückversicherung - und wenn ja, welche - für ihn günstiger ist.

richtige Bemessung der Rückversicherungsprämie entscheidend

⇒

- mindestens so hoch, dass sie Betriebskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers deckt
- höchstens so hoch, dass dem Erstversicherer genügend bleibt, um seinerseits Transaktionskosten und Schwankungszuschlag erwirtschaften zu können

Erstversicherer bevorzugt natürlich diejenige Rückversicherungsform  $(R, b(R))$  bevorzugen, die ihm bei gleichem Sicherheitsniveau den größten Anteil vom Schwankungszuschlag lässt.

Mit den Bezeichnungen

- $S$  = Gesamtschaden des Erstversicherers vor Rückversicherung
- $b$  = um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieinnahme des Erstversicherers
- $R$  = auf den Rückversicherer transferierter Teil von  $S$
- $b(R)$  = Rückversicherungsprämie (inklusive Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers)
- $Q$  =  $S - R$  = Selbstbehalt-Gesamtschaden des Erstversicherers
- $b(Q)$  =  $b - b(R)$  = Selbstbehaltprämie

## Entscheidungsprinzip des Erstversicherers

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass für den Selbstbehalt  $Q = S - R$  das angestrebte Sicherheitsniveau erreicht ist und das erwartete Selbstbehaltsergebnis  $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$  maximal ist.“

## Wahl der geeigneten Rückversicherungform

falls es einmal für den Erstversicherer keine vorteilhafte Rückversicherung geben sollte, muss er eben sein

- Sicherheitskapital oder
- Prämieinnahme erhöhen
- sich von einigen seiner Risiken trennen oder
- niedrigeres Sicherheitsniveau vorübergehend akzeptieren.

Das Sicherheitsniveau bei gegebenen Sicherheitskapital  $c$  haben wir bisher mittels des *Modells der einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P(S > b + c) \text{ bzw. } P(Q > b(Q) + c)$$

quantifiziert.

Die Normalverteilung, insbesondere bei  $S$ , in der Regel nicht gegeben, doch ist die Varianz auch ohne Normalverteilung ein intuitiv einleuchtendes Sicherheitskriterium und außerdem analytisch einfacher zu behandeln als die Gesamtschadenverteilung. Daher ermöglicht das *Varianzmodell* einige interessante Aussagen:

# Varianzmodell

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass die Selbstbehaltsvarianz  $\text{Var}(Q)$  das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis  $b(Q) - E(Q)$  möglichst groß ist.“

weitere Möglichkeit der Quantifizierung des Sicherheitsniveaus:  
Ruinwahrscheinlichkeit

Spezialfall: Beim Nutzenmodell wird jedes mögliche Selbstbehaltsergebnis  $x = b(Q) - Q$  mit Hilfe einer Nutzenfunktion  $u(x)$  bewertet, für die gilt:

- $u'(x) > 0$

- $u''(x) < 0$

Gemäß dem Nutzenmodell wird die Rückversicherung so gewählt, dass der Erwartungswert des Nutzens des resultierenden Selbstbehaltsergebnisses möglichst groß wird:

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass bei gegebenem Sicherheitskapital  $c$  und gegebener Nutzenfunktion  $u$  die Nutzenerwartung  $E(u(c + b(Q) - Q))$  möglichst groß ist.“

Modell mit der Verlustwahrscheinlichkeit und das Varianzmodell jeweils folgende zur vorigen äquivalenten Formulierung besitzen:

### **Verlustwahrscheinlichkeits-Modell:**

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglich so, dass  $b(Q) - E(Q)$  ein angestrebtes Mindetsniveau nicht überschreitet und die Verlustwahrscheinlichkeit  $P(Q > b(Q) + c)$  möglichst klein wird.“

### **Varianz-Modell:**

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass  $b(Q) - E(Q)$  ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreiten und die Varianz  $\text{Var}(Q)$  möglichst klein wird.“

idealisierten funktionalen Ansatz der Transaktionskosten:  
Transaktionskosten werden als Veränderung

$$\begin{aligned}k(R) &= b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) \\ &= b(R) - E(R)\end{aligned}$$

des erwarteten betriebswirtschaftlichen Ergebnisses vor bzw. nach der Rückversicherung definiert.

## Satz (Borch, Kahn, Pesonen)

*Sind die Transaktionskosten  $k$  eine bei allen Rückversicherungsformen  $R$  gleiche Funktion  $g$  des Erwartungswertes  $E(R)$ , d.h.  $k(R) = g(E(R))$ , so ist gemäß Varianzmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.*

### Satz (Beard, Pentikäinen, Pesonen)

*Sind die Transaktionskosten  $k$  eine bei allen Rückversicherungsformen gleiche monoton wachsende Funktion  $k(R) = h(\text{Var}(R))$  der Varianz des Rückversicherungsschadens  $R$ , so ist gemäß dem Varianzmodell die Quoten-Rückversicherung für den Erstversicherer optimal.*

## Folgerung aus den Sätzen

Optimale Entscheidung des Erstversicherers hängt überraschenderweise nicht von der Verteilung des Gesamtschadens  $S$ , sondern ausschließlich von der Art und Höhe der Transaktionskosten ab.

Stop-Loss- oder Quoten-Rückversicherung sind aus Sicht der Erstversicherer nicht die zu bevorzugenden Rückversicherungsformen.

Transaktionskosten enthalten:

- die durch die Rückversicherung bedingten Verwaltungskosten von Erst- und Rückversicherer
- den Schwankungszuschlag des Rückversicherers

Transaktionskosten sind definiert als Differenz

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

zwischen Rückversicherungsprämie (einschließlich der beim Erstversicherer zusätzlich anfallenden Kosten) und dem Erwartungswert der Rückversicherungsschäden, d.h. beinhalten zusätzlich zu den absichtlich einkalkulierten Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag auch noch einen unbeabsichtigten Zu- oder Abschlag durch die Verschätzung bei  $E(R)$ .

## Satz (Arrow)

*Sind die Transaktionskosten  $k$  eine bei allen Rückversicherungsformen  $R = S - Q$  gleiche Funktion  $g$  des Erwartungswerts  $E(R)$ , d.h. gilt  $k(R) = g(E(R))$ , so ist gemäß dem Nutzenmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.*

Erstversicherer schließt nicht einen einzigen Rückversicherungsvertrag für sein gesamtes Portefeuille ab, sondern behandelt jede Branche (Feuer, Allgemein-Haftpflicht, Kraftfahrt-Haftpflicht, Unfall, etc.) getrennt.

Möchte er in mehreren oder allen getrennt rückversicherten Teilportefeuilles dieselbe Rückversicherungsform anwenden:  $\Rightarrow$  Frage: soll der Parameter, der den Umfang der Rückversicherung regelt, überall gleich hoch sein oder nicht?

Wenn die Teilportefeuilles voneinander unabhängig sind, können für diese Fragestellung explizite Lösungen ermittelt werden, wobei wir uns hier wieder auf das Varianzmodell beschränken.

## Satz (De Finetti, Bühlmann)

*Werden mehrere von einander unabhängige Teilportefeuilles  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq I$ , durch getrennte Quotenrückversicherungen geschützt, so sind die Selbstbehaltsquoten*

$$c_i = \frac{Q_i}{S_i}$$

*gemäß dem Varianzmodell proportional zu*

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{\text{Var}(S_i)}$$

*zu wählen, wenn die Transaktionskosten  $k(R_i) = z_i E(R_i)$  jeweils mit dem Faktor  $z_i$  proportional zum Erwartungswert des abgegebenen Schadens  $R_i$  sind.*

Selbstbehaltsanteil  $c_i$  soll

- um so höher sein, je teurer die Rückversicherung, gemessen durch  $z_i$ , ist und je größer das Portefeuille, gemessen durch  $E(S_i)$ , ist
- und um so kleiner, je größer die Varianz des Portefeuilles ist

Wie sind die Prioritäten von unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherungen zu wählen, wenn mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles auf diese Weise rückversichert werden sollen? Dazu sei

$$S_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}$$

der Gesamtschaden von Teilportefeuille  $i$  gemäß dem Kollektiven Modell, d.h. die Schadenhöhen  $X_{i1}, X_{i2}, \dots$  seien unabhängig und identisch wie  $X_i$  verteilt und unabhängig von der Schadenzahl  $N_i$ . Bei Priorität  $a_i$  ist der Selbstbehaltschaden aus Portfeuille  $i$

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_i} \min(X_{in}, a_i),$$

und der auf den Rückversicherer transferierte Schaden beträgt  $R_i = S_i - Q_i$ .

## Satz (Bühlmann)

*Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles  $S_i, 1 \leq i \leq I$ , mit Einzelschadenhöhe  $X_i$  und davon unabhängiger, poissonverteilter Schadenszahl durch getrennte, unlimitierte Schadenexzedenten-Rückversicherungen geschützt, so sollten deren Prioritäten  $a_i$  im Varianzmodell die implizite Gleichung*

$$a_i = \left( \frac{k_1}{2} + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i) \right) / \beta$$

*erfüllen, wenn die Transaktionskosten die Form*

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 \text{Var}(R_i)$$

*haben, und der Faktor  $\beta$  so gewählt wird, dass das vorgegebene Varianzniveau eingehalten wird.*

Es gibt Risikoteilungsformen, die auf jeden Fall gemieden werden sollten, weil eine für beide Beteiligten bessere Alternative existiert. (z.B. *Integral-Franchise*):

Ausgehend vom Jahresgesamtschaden  $S$  und einer vereinbarten Schadengrenze  $\underline{a}$  trägt der Erstversicherer

$$Q = \begin{cases} S, & \text{falls } S \leq \underline{a}, \\ 0, & \text{falls } S > \underline{a}, \end{cases}$$

und der Rückversicherer trägt  $R = S - Q$ , d.h. er übernimmt den vollen Schaden, wenn er höher als die Grenze  $\underline{a}$  ist.

## Satz

*Zu jeder Integralfranchise  $Q + R = S$  mit Schadengrenze  $\underline{a}$  gibt es einen unlimitierten Stop Loss  $Q_a + R_a = S$ ,  $Q_a = \min(S, a)$ , mit Priorität  $a < \underline{a}$  und gleichen Erwartungswerten  $E(Q_a) = E(Q)$ ,  $E(R_a) = E(R)$ , aber niedrigeren Varianzen  $\text{Var}(Q_a) < \text{Var}(Q)$ ,  $\text{Var}(R_a) < \text{Var}(R)$ .*

⇒

Für Erst- und Rückversicherer, die nach dem Varianzmodell entscheiden, stellt die Integralfranchise keine empfehlenswerte Risikoteilung dar, da es eine für beide Seiten bessere Form der Risikoteilung gibt ⇒ Stop-Loss (bzw. die Abzugsfranchise)

Genau genommen gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die Transaktionskosten nur von Erwartungswert und Varianz des Rückversicherungsschaden abhängen - einer im Varianzmodell sehr natürlichen Voraussetzung.

Werden die Transaktionskosten z. B. gemäß

$k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 \text{Var}(R)$  berechnet, so ergibt der gemäß obigem Satz definierte Stop Loss sowohl niedrigere Selbstbehaltsvarianz wie auch niedrigere Transaktionskosten (falls  $k_2 > 0$ ) als die Integralfranchise.

## Definition

Risikoteilungsformen, zu denen es keine Alternative gibt, bei der sich wenigstens eine Seite besser stellt, ohne dass die andere sich verschlechtert, heißen *pareto-optimal*.

Die Integralfranchise ist im Varianzmodell also nicht pareto-optimal.

Bei pareto - optimalen Rückversicherungsformen geht jede Verbesserung zugunsten des Erstversicherers zu Lasten des Rückversicherers und umgekehrt.

## Satz

*Zu jeder Rückversicherungsform  $\underline{Q} + \underline{R} = S$ , bei der  $\underline{Q}$  und  $\underline{R}$  keine Funktionen des Jahresgesamtschadens  $S$  sind, sondern von den Einzelschäden abhängen, gibt es eine Rückversicherungsform  $Q + R = S$ , bei der  $Q$  und  $R$  Funktionen von  $S$  sind, und derart, dass  $E(Q) = E(\underline{Q})$ ,  $E(R) = E(\underline{R})$  und  $\text{Var}(Q) < \text{Var}(\underline{Q})$ ,  $\text{Var}(R) < \text{Var}(\underline{R})$  gilt.*

## Korollar

Eine Rückversicherungsform, die sich nicht als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellen lässt, ist im Varianzmodell nicht pareto-optimal.

Die zur Berechnung von  $E(Q|S = s)$  erforderlichen Schadenzahl- und Schadenhöhenwahrscheinlichkeiten pro Risiko zu den Zweigen der Schadenversicherung können allenfalls approximativ und unter zusätzlichen Modellannahmen ermittelt werden.

Nur in der Lebens- oder Unfalltod-Versicherung erscheint es möglich, dass sich beide Seiten auf die erforderlichen Rechnungsgrundlagen einigen. Daher können Summen- und Schadenexzedenten-Rückversicherung weiterhin ihren Platz in der Versicherungspraxis beanspruchen, da sie zwar suboptimal, doch die theoretisch bessere Rückversicherungsform in der Regel nicht explizit ausgerechnet werden kann.

Abstaffelungen des Selbstbehalts sind nicht pareto-optimal, d.h. können theoretisch noch weiter verbessert werden durch eine Rückversicherungsform, die nur vom Gesamtschaden aller betrachteten Teilportefeuilles abhängt.

⇒ pareto-optimale Rückversicherungsform muss notwendigerweise als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellbar sein. Doch dies allein ist nicht hinreichend, wie das Beispiel der Integralfranchise (auf Jahresbasis) zeigt.

Der folgende Satz charakterisiert die pareto-optimale Rückversicherungsform.

## Satz (Pesonen)

*Eine Rückversicherungsform  $Q + R = S$  ist im Varianz- oder Nutzenmodell genau dann pareto-optimal, wenn Selbstbehaltsschaden  $Q$  und Rückversicherungsschaden  $R$  monoton nichtfallende Funktionen des Jahresgesamtschadens  $S$  sind.*

## Folgerung

- Quote und Stop Loss pareto-optimal sind, da  $Q$  und  $R$  jeweils monoton nicht fallende Funktionen von  $S$  sind.
- Dagegen ist bei der Interalfanchise (auf Jahresbasis) der Selbstbehaltsschaden  $Q$  nicht monoton nichtfallend, was erneut zeigt, dass die Integralfranchise nicht pareto-optimal ist.

# Fazit

- optimale Rückversicherungsform im konkreten Fall normalerweise nicht ermittelt werden kann  $\Rightarrow$  In der Praxis orientiert man sich daher oft an der jeweils dominierenden Komponente des versicherungstechnischen Risikos, d.h. an Zufalls- bzw. Änderungsrisiko.
- Gegen das Zufallsrisiko aus einzelnen Großschäden schützen am besten der Summenexzedent und der Schadenexzedent. Bei Kumulierung vieler Schäden aus einem Ereignis entlastet natürlich der Kumulschadenexzedent am meisten.

- Dem Änderungsrisiko, das sich auf alle Schäden auswirkt, kann offensichtlich durch Quote oder Stop Loss am besten begegnet werden.
- In den Sparten, wo beide Komponenten des versicherungstechnischen Risikos eine Rolle spielen, werden häufig mehrere Rückversicherungsunsformen miteinander kombiniert („Rückversicherungsprogramm“).

Danke für die Aufmerksamkeit!