

Riemann-Stieltjes-Integral

Albert Fandl

21. Jänner 2010

1 Wiederholung zum Riemann-Integral

- Darboux'sches Integral
- Riemann-Integral

2 Riemann-Stieltjes-Integral

- Darboux-Stieltjes-Integral
- Allgemeines zum Riemann-Stieltjes-Integrals
- Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals
- wichtige Sätze zum Riemann-Stieltjes-Integral

3 Das stochastische Integral

- Definition des stochastischen Integrals
- das stochastischen Integral bzgl. einer Brown'schen Bewegung
- einfache Funktionen
- Itô-Integrale, Stratonovich-Integrale
- Eigenschaften des Itô-Integrals
- der $V_{\mathcal{F}}$

Zerlegungen

Definition

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt eine aufsteigend sortierte, endliche Teilmenge \mathcal{Z} von $[a, b]$, die a und b enthält, **Zerlegung** von $[a, b]$.

Bemerkung

Zerlegungen Die Menge der Zerlegungen \mathfrak{Z} bildet eine gerichtete Menge bezüglich der Inklusion.

Ober- und Untersummen

Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$O(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot (t_j - t_{j-1})$$

als Obersumme und

$$U(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot (t_j - t_{j-1})$$

als Untersumme bezüglich einer Zerlegung \mathcal{Z} .

Ober- und Untersummen

Es gilt folgende Ungleichungskette:

$$\inf_{t \in [a,b]} f(t)(b-a) \leq U(\mathcal{Z}) \leq O(\mathcal{Z}) \leq \sup_{t \in [a,b]} f(t)(b-a)$$

Die Obersummen bilden ein monoton fallendes und die Untersummen ein monoton wachsendes Netz.

Aus beschränkt und monoton folgt, dass die beiden Netze gegen ihr Infimum bzw. Supremum konvergieren.

Konvergenz der Ober- und Untersummen

Den Grenzwert

$$\inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) =: \int_a^b f dx$$

bezeichnet man dann als das obere Integral und

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) =: \int_{\bar{a}}^b f dx$$

als das untere Integral.

Darboux'sches Integral

Definition

Stimmen für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ das obere und das untere Integral überein, nennt man f integrierbar und der gemeinsame Grenzwert heißt Integral. Man schreibt dann

$$\int_a^b f dx = \int_{\bar{a}}^b f dx = \int_a^b f dx$$

Bemerkung

Wegen der Konstruktion mit den Ober- und Untersummen nennt man dieses Integral auch **Darboux'sches Integral**.

Das Riemann-Integral

Für komplex- oder vektorwertige Funktionen benötigen wir den allgemeineren Begriff des Riemann-Integrals.

Definition

Für eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (t_i)_{i=0}^{n(\mathcal{Z})}$ nennt man eine endliche Menge τ mit $a = t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \dots \leq \tau_{n(\mathcal{Z})} \leq t_{n(\mathcal{Z})}$ **Belegung** von \mathcal{Z} .

Definition

Für ein Paar (\mathcal{Z}, τ) und eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist die **Riemann-Summe** gegeben durch

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, f) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

Das Riemann-Integral

Um die Konvergenz der Riemann-Summen zu betrachten brauchen wir weiters den Begriff der **Feinheit**.

Definition

Für eine Zerlegung \mathcal{Z} bezeichne $|\mathcal{Z}| = \max_{i=1 \dots n(\mathcal{Z})} |t_i - t_{i-1}|$ die Feinheit der Zerlegung.

Bemerkung

Die Menge der Zerlegungen \mathfrak{Z} bildet eine gerichtete Menge bzgl. der Feinheit der Zerlegung.

Das Riemann-Integral

Definition

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Konvergiert das Netz der Riemann-Summen bzgl. der Feinheit für alle Belegungen τ , bezeichnet man den Limes als **Riemann-Integral**, falls dieser Grenzwert existiert, und schreibt

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \rightarrow 0} \sigma(\mathcal{Z}, \tau, f) = \int_a^b f dx$$

Das Riemann-Integral

Für das Riemann-Integral gilt, dass die beide Zugänge zum Integral äquivalent sind.

Satz:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 Das obere und das untere Integral von f stimmen überein.
- 2 f ist Riemann-integrierbar, d.h. $\lim_{|\mathcal{Z}| \rightarrow 0} \sigma(\mathcal{Z}, \tau, f)$ existiert für alle τ .

das Stieltjes Integral

Beim Riemann-Integral betrachtet man den Grenzwert von Summen, in denen die Summanden $t_i - t_{i-1}$ mit einem Wert der Funktion in diesem Teilintervall gewichtet werden.

Für das Riemann-Stieltjes-Integral betrachtet man Summanden der Form $g(t_i) - g(t_{i-1})$ für eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und gewichtet sie mit einem Funktionswert von f im Intervall $[t_i - t_{i-1}]$.

Die Funktion f heißt dabei **Integrand**, g ist der **Integrator**.

das Darboux-Stieltjes-Integral

Analog zum Aufbau mittels Ober- und Untersummen definiert man Stieltjes-Obersummen

$$O(\mathcal{Z}, fdg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

bzw Stieltjes-Untersummen

$$U(\mathcal{Z}, fdg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

das Darboux-Stieltjes-Integral

Die Stieltjes-Ober und Untersummen bilden zwar beschränkte Netze, müssen aber nicht mehr monoton wachsen bzw. fallen. Beide Netze können also mehr als einen Häufungspunkt besitzen.

Definition

Stimmen $\sup_{Z \in \mathfrak{Z}} U(Z, fdg)$ und $\inf_{Z \in \mathfrak{Z}} O(Z, fdg)$ überein, nennt man diesen Wert **Darboux-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g über $[a, b]$.

Riemann-Stieltjes-Summen

Für eine Zerlegung \mathcal{Z} und eine Belegung τ definiert man analog zu den Riemann-Summen die sogenannten Riemann-Stieltjes-Summen

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

Riemann-Stieltjes-Integral

Definition

*Konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen in der Feinheit unabhängig für alle Belegungen gegen denselben Grenzwert, so nennt man diesen **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g über $[a, b]$ und schreibt:*

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \rightarrow 0} \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) = \int_a^b fdg$$

Riemann-Stieltjes-Integral

Die verschiedenen Integralbegriffe stimmen nicht überein.

Beispiel

Sei $f = \mathbb{I}_{(0,\infty)}$ und $g = \mathbb{I}_{[0,\infty)}$. Die Ober- und Untersummen für $\int_{-1}^1 fdg$ sehen in Abhängigkeit von \mathcal{Z} folgendermaßen aus:
ang. $0 \in \mathcal{Z}$; d.h. es gibt ein i , sodass $t_i = 0$:

$$s(\mathcal{Z}, fdg) = \dots + \underbrace{\inf_{[t_{i-1}, 0]} f \cdot (1 - 0)}_0 + \inf_{[0, t_{i+1}]} f(1 - 1) + \dots = 0$$

$$S(\mathcal{Z}, fdg) = \dots + \underbrace{\sup_{[t_{i-1}, 0]} f \cdot (1 - 0)}_0 + \sup_{[0, t_{i+1}]} f(1 - 1) + \dots = 0$$

für $0 \notin \mathcal{Z}$ ergibt sich für $t_{i-1} < t_i$:

$$s(\mathcal{Z}, fdg) = \dots + \underbrace{\inf_{[t_{i-1}, t_i]} f}_{0} \cdot (1 - 0) + \dots = 0$$

$$S(\mathcal{Z}, fdg) = \dots + \underbrace{\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f}_{1} \cdot (1 - 0) + \dots = 1$$

$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} s(\mathcal{Z}) = 0, \quad \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} S(\mathcal{Z}) = 1 \Rightarrow$ Darboux-Stieltjes-Integral existiert

Wählt man als Belegung $\tau_i = t_i$ (sup), erhält man als Riemann-Stieltjes-Summe die Obersumme.

Obersummen konvergieren nicht \Rightarrow das Riemann-Stieltjes-Integral existiert nicht.

Riemann-Stieltjes-Integral

Satz:

Ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend, so gilt:

- 1 $U(\mathcal{Z}, fdg) \leq \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) \leq O(\mathcal{Z}, fdg)$
- 2 Existiert das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b fdg$, dann auch das Darboux-Stieltjes-Integral und die beiden Werte stimmen überein.

Bemerkung

In der Literatur gibt es unterschiedliche Definitionen für das Riemann-Stieltjes-Integral, die nur für spezielle f und g übereinstimmen.

Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Satz: Linearität

Das Riemann-Stieltjes-Integral ist linear in f und g :

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dg = \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg$$

$$\int_a^b f d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f dg_2$$

Beweis

Die Riemann-Stieltjes-Summen sind linear. □

Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Satz: Integral nach einer konstanten Funktion

Das Riemann-Stieltjes-Integral nach konstanten Funktionen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleich 0 für alle f .

Beweis

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_j) \underbrace{(g(t_j) - g(t_{j-1}))}_{=(c-c)=0} = 0$$

Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Satz: Stetigkeit von f und g

Existiert das Integral $\int_a^b f dg$, sind f und g an keiner Stelle gemeinsam unstetig.

Satz:

- ① Existiert $\int_a^b fdg$, so gilt für jedes $c \in [a, b]$

$$\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg$$

- ② Existieren die Integrale $\int_a^c fdg$ und $\int_c^b fdg$,
und ist entweder f oder g an c stetig,
so existiert auch $\int_a^b fdg$ und es gilt:

$$\int_a^c fdg + \int_c^b fdg = \int_a^b fdg$$

Stetige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar. Das Analogon für Riemann-Stieltjes-Integrale lautet:

Satz: I

ist $f \in C^0([a, b])$ und g von beschränkter Variation, d.h. $V_a^b < \infty$, so existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es besteht die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$$

beschränkte Variation

Definition

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn gilt:

$$\sup_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n(Z)} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

Integral für Funktionen von beschränkter Variation

Beweis: Die Funktion f ist stetig, d.h.:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$$

Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung mit Feinheit $< \delta$. τ sei die dazugehörige Belegung.

\mathcal{Z}' sei eine Verfeinerung von \mathcal{Z} , d.h. $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ und $|\mathcal{Z}'| < \delta$, mit Belegung τ' .

Für zwei Stützstellen $\tau_i \in \tau$ und $\tau'_j \in \tau'$, die im selben Teilintervall der Zerlegung \mathcal{Z} liegen, folgt dann

$$|\tau_i - \tau'_j| < \delta \Rightarrow |f(\tau_i) - f(\tau'_j)| < \epsilon$$

Integral für Funktionen von beschränkter Variation

$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$, ($n(\mathcal{Z}) \leq n(\mathcal{Z}')$), also gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}', \tau', fdg) \right| \\ = & \left| \sum_{i=0}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) - \sum_{j=0}^{n(\mathcal{Z}')} f(\tau'_j)(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) \right| \\ = & \sum_{j=0}^{n(\mathcal{Z}')} \epsilon(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) \\ \leq & \epsilon V_a^b(g) \end{aligned}$$

Integral für Funktionen von beschränkter Variation

Für beliebige Verfeinerungen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ von \mathcal{Z} gilt:

$$\begin{aligned} & |\sigma(\mathcal{Z}_1, \tau_1, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}_2, \tau_2, fdg)| \\ & \leq |\sigma(\mathcal{Z}_1, \tau_1, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg)| + |\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}_2, \tau_2, fdg)| \\ & \leq 2\epsilon V_a^b(g) \end{aligned}$$

$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg)$ bildet also ein Cauchy-Netz und konvergiert, d.h. $\int_a^b fdg$ existiert.

$$|\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg)| \leq \|f\|_\infty \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g)$$

Der folgende Satz verallgemeinert die partielle Integration für Riemann-Integrale

Satz: Partielle Integration

Mit $\int_a^b f dg$ existiert auch $\int_a^b g df$, und es gilt

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = fg|_a^b$$

Eine andere praktikable Methode zum Berechnen von Riemann-Stieltjes-Integralen bietet der folgende

Satz: Transformation in ein Riemann-Integral

Sei f Riemann-integrierbar und $g \in C^1([a, b])$, so existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dt .$$

Umgekehrt kann jedes Integral $\int_a^b fh dt$ in ein Riemann Stieltjes-Integral $\int_a^b f dg$ umgeschrieben werden, mit g Stammfunktion von h .

Transformation in ein Riemann-Integral

Beweis

Weil g' stetig differenzierbar ist, gilt

$$|\tau - x| < \delta \Rightarrow |g(\tau) - g(x)| < \epsilon$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt außerdem

$$\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = g'(x) \quad \text{für ein } x \in [t_{i-1}, t_i]$$

Transformation in ein Riemann-Integral

Außerdem ist f Riemann-integrierbar, also $\exists K > 0 : |f| \leq K$.

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{Z}, \tau) &= \sum f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \\ &= \sum f(\tau_i)g'(x_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

Wenn wir die letzte Summe mit der Riemann-Summe

$$\sum f(\tau_i)g'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

vergleichen, ist die Differenz wegen $|g'(\tau_i) - g'(x_i)| < \epsilon$ kleiner als $K * \epsilon(b - a)$.

Diese Abschätzung gilt für alle Verfeinerungen der Zerlegung, also sind die Integrale gleich.

Satz: erster Mittelwertsatz

Existiert das Integral $\int_a^b f dg$ und ist g auf $[a, b]$ monoton wachsend, so ist

$$\int_a^b f dg = \mu \int_a^b dg \quad \text{mit} \quad \inf f(I) \leq \mu \leq \sup f(I)$$

Bemerkung

Ist f stetig, nimmt es nach dem Zwischenwertsatz den Wert μ auch an.

Satz: zweiter Mittelwertsatz

Sei f monoton und g stetig auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg$$

Beispiel für Riemann-Stieltjes-Integrale:

$$\int_0^2 x(x+2) d \ln(1+x)$$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ ist Riemann-integrierbar auf $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^2 x(x+2) d \ln(1+x) &= \int_0^2 \frac{x^2 + 2x}{1+x} dx \\ &= \int_0^2 \left(1+x\right) - \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right|_0^2 = \ln(3) \end{aligned}$$

Schließlich hat das Riemann-Stieltjes Integral interessante Eigenschaften an Unstetigkeitsstellen von g .

Satz:

Ist f über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und g auf $[a, b]$ bis auf endliche viele Sprungstellen c_1, \dots, c_n mit Sprunghöhen α_j differenzierbar mit $\int_a^b |g'(x)| dx < \infty$, so folgt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dx + \sum_{j=1}^n \alpha_j f(c_j)$$

das stochastische Integral

Statt nach einer (deterministischen) Funktion $g(t)$ kann man natürlich auch das Riemann-Stieltjes-Integral nach einem stochastischen Prozess $X_t(\omega) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten.

Das Integral ist dann eine Zufallsvariable, ein **stochastisches Integral**.

In der Regel ist $X_t = B_t$ eine Brown'sche Bewegung.

Nicht nur in der Finanzmathematik, sondern auch in anderen Wissenschaften, z.B. in der Nachrichtentechnik gebräuchlich.

das stochastische Integral nach einer Brown'schen Bewegung

Ist die Definition eines stochastischen Integrals nach einer Brown'schen Bewegung überhaupt sinnvoll?

Satz: Eigenschaften der Brown'schen Bewegung

- 1 Die Brown'sche Bewegung ist fast sicher von unendlicher Variation.
- 2 Die Brown'sche Bewegung ist fast sicher nirgends differenzierbar.

Die Existenz des stochastischen Integral ist nach den herkömmlichen Methoden also nicht gewährleistet.

Tatsächlich existiert aber sogar das viel allgemeinere Integral

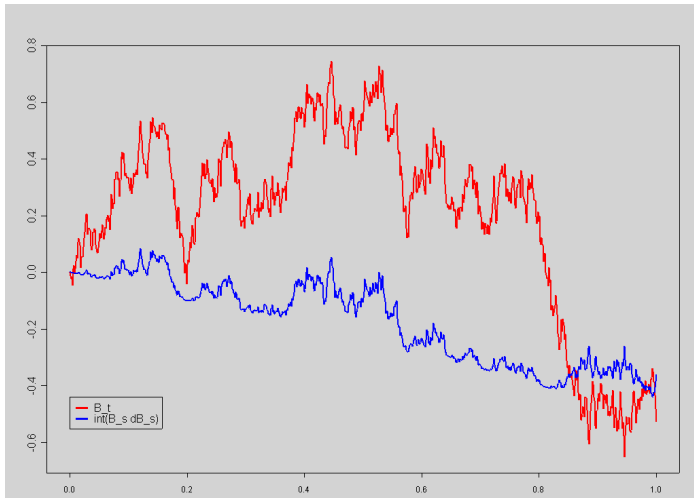
$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

obwohl man zeigen kann, dass es als Riemann-Stieltjes-Integral nicht existiert.

Beweis

Aufwendiges Nachrechnen

Ito-Integral der Brown'schen Bewegung



einfache Funktionen

Man betrachtet das stochastische Integral daher zunächst nur für einfache Funktionen

$$C(t, \omega) = \sum_{i=1}^k e_i(\omega) \mathbb{I}_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$$

mit \mathcal{F}_{t_i} -meßbaren Zufallsvariablen $e_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und definiert das stochastische Integral als

$$\int_0^t C(s, \omega) dB_s(\omega) = \sum_{i=1}^k e_i(\omega) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

Das stochastische Integral besitzt für einfache Funktionen einige wichtige Eigenschaften

Satz:

- 1 Der Wert des stochastischen Integrals ist unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktionen.
- 2 Das stochastische Integral ist linear im Integranden.
- 3 Das stochastische Integral nach einer Brown'schen Bewegung ist stetig bezüglich der oberen Grenze.

Bemerkung

Eigenschaft 3 folgt aus der Stetigkeit der Pfade der Brown'schen Bewegung.

Ist $C(t, \omega)$ keine einfache Funktion, kommt es bei der Approximation von $\int_0^t C(s, \omega) dB_s$ durch Riemann-Stieltjes-Summen der Form

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, CdB) = \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} C(\tau_i, \omega)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

auf die Wahl der Belegung τ an.

- 1 $\tau_i = t_i$ (linker Randpunkt) liefert das Itô-Integral
- 2 $\tau_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$ liefert das Stratonovich-Integral

Es gilt:

Satz: Martingaleigenschaft des Itô-Integrals

Das Itô-Integral $\int_0^t C_s dB_s$, $t \in [0, T]$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration der Brown'schen Bewegung \mathcal{F}_t .

Das Itô-Integral erfüllt die sogenannte Itô-Isometrie

Satz: Itô-Isometrie

Sei $C_s(\omega)$ eine einfache Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t C_s dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E} [C_s^2] ds$$

Beweis: siehe stochastische Analysis

Durch Approximation mittels einfacher Funktionen lässt sich das Itô-Integral auf eine größere Menge von Funktionen ausdehnen.

Definition

Sei $V_{\mathcal{F}}$ die Menge aller $C : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- 1 C ist adaptiert an \mathcal{F}_t
- 2 $\int_0^t \mathbb{E} [C_s^2] ds < \infty$

Satz:

Sei $C \in V_{\mathcal{F}}$. Dann existiert eine Folge $C^{(n)}$ einfacher Funktionen, so dass

$$\int_0^t \mathbb{E}[(C - C^{(n)})^2] \rightarrow 0$$

Beweis: siehe stochastische Analysis

Danke