Schadenreservierung

bei lang andauernder Schadenabwicklung

Maria Kadan

TU Wien

26. November 2009

Inhalt

Einführung in die Thematik

1. Schadenabwicklung und Spätschadenreserve
2. Abwicklungsdreiecke
3. Bedeutung und Berechnung der Schätzgenauigkeit

Schadenabwicklung

1. Eintritt des Schadenfalls
2. Meldung
3. Prüfung, ob der Schaden gedeckt ist
4. Leistung

zeitliche Differenz zwischen Schadeneintritt und endgültiger Regulierung, da die Abwicklung einige Zeit in Anspruch nehmen kann (z.B. für Reparaturen)

Ursachen

Haftpflichtversicherung besonders stark betroffen,
Ursachen:

1. späte Manifestation:
   Schaden wird erst lange Zeit nach der Verursachung bemerkt
2. lange Regulierungsdauer:
   endgültige Schadenhöhe ist lange Zeit unbekannt

Spätschäden

2 Arten von Spätschäden:

1. IBNR
   = incurred but not reported
2. IBNER
   = incurred (and reported) but not enough reserved

Schadenhöhe ist zum Ende jeder Abrechnungsperiode noch nicht definitiv bekannt ⇒ Versicherer muss **Spätschadenreserve** bilden

Bedeutung der Spätschadenreserve

- IBNR-Reserve:
  für externe Rechnungslegung und Prämienkalkulation
- IBNER-Reserve:
  für interne Erfolgsrechnung und Prämienkalkulation

Höhe der Spätschadenreserve muss von einem Aktuar bestätigt werden.

Bedeutung für den Rückversicherer

- Problematik betrifft die Schadenexzedenten-Rückversicherung
- Erstversicherer weiß nicht genau, welche Schäden die Priorität übersteigen werden
- verstärkte IBNR-Problematik für den Rückversicherer

mathematische Verfahren

- Einzelfallreserve:
  - keine mathematischen Verfahren eingesetzt
- IBNR- und IBNER-Reserve:
  - Versuch, Erfahrungen früherer Anfalljahre auf spätere Anfalljahre zu übertragen
  - Trend- und Strukturbrüche müssen ausgeschlossen werden

Schadenzahlungen

Aufwendungen $S_{i,k}$ für einen Schaden gegliedert nach

- Anfalljahr i: diesem Jahr ist der Schaden buchhalterisch zuzuweisen
- Abwicklungsjahr k: in diesem Jahr wurde ein Betrag für den Schaden aufgewendet

Abwicklungsdreieck

S_{11}	S_{12}	$\dots$	S_{1k}	$\dots$	$S_{1,I+1-i}$	$\dots$	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
S_{21}	S_{22}	$\dots$	S_{2k}	$\dots$	$S_{2,I+1-i}$	$\dots$	$S_{2,I-1}$	
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$			
S_{i1}	S_{i2}	$\dots$	S_{ik}	$\dots$	$S_{i,I+1-i}$			
$\dots$	$\dots$		$\dots$					
$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	$\dots$	$S_{I+1-k,k}$					
$\dots$	$\dots$							
$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
S_{I1}								

Tabelle: Abwicklungsdreieck

Zeilen: Anfalljahre $i = 1, \dots, I$
Spalten: Abwicklungsjahre $k = 1, \dots, I$

Annahmen

1. Das 1. Anfalljahr ist vollständig abgewickelt.
2. Die Beträge $S_{i,k}$ nehmen mit wachsendem k tendenziell ab, bis sie gleich Null werden.
3. Die Anfalljahre sind unabhängig.

Ziel

- bekannt: Schadenaufwendungen
  $S_{i1}, \ldots, S_{i,I+1-i}, \quad i = 1, \ldots, I$
- unbekannt: Schadenaufwendungen
  $S_{iI+2-i}, \ldots, S_{i,I}, \quad i = 1, \ldots, I$
- Ziel: Spätschadenreserve $R_i = S_{iI+2-i} + \ldots + S_{i,I}$ zu schätzen

Bedeutung der Bestandsbildung

- Ein wesentlicher Schritt ist die Bildung
  - möglichst großer (Ausgleich im Kollektiv) und zugleich
  - möglichst homogener (ähnliches Abwicklungsverhalten)

  Teilbestände.
- Die Schätzung der Spätschadenreserve ist daher keine rein mathematische Aufgabe.

Bedeutung der Schätzgenauigkeit

- Die zu schätzende Spätschadenreserve ist eine Zufallsvariable.
- Die Schätzung des Erwartungswerts ist mit erheblichen Unsicherheiten verbunden.
- wichtig: Angabe über die Genauigkeit der Schätzung
  $\Rightarrow$ mittels (bedingter) mittlerer quadratischer Abweichung

Berechnung der Schätzgenauigkeit

(bedingte) mittlere quadratische Abweichung

$$\mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D) = \underbrace{\mathbb{V}(R_i | D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(R_i | D) - \hat{R}_i)^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

wobei

R_i ... Spätschadenreserve

$\hat{R}_i$ ... Schätzer für die Reserve

$D = \{S_{i,k} | 2 \leq i + k \leq I + 1\}$

Das Chain-Ladder Verfahren

Einleitung und Überblick

- eines der ältesten und einfachsten Verfahren
- spielt eine zentrale Rolle
- verteilungsfrei

- immer wieder scharf kritisiert
- Kritik durch zugrunde gelegtes stochastisches Modell beseitigt

multiplikatives Modell

Wir schreiben den Endschaden $C_{iI} = S_{i1} + \ldots + S_{iI}$ in der multiplikativen Form

$$C_{iI} = C_{i1} F_{i1} F_{i2} \cdot \ldots \cdot F_{i,I-1},$$

wobei

$$F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

die **multiplikative Zunahme** des akkumulierten Schadenstandes $C_{ik} = S_{i1} + \ldots + S_{ik}$ von Abwicklungsjahr k zu Abwicklungsjahr k+1 in Anfalljahr i ist.

Annahmen

1. Alle Schadenstände sind strikt positiv.

$$C_{ik} > 0$$

2. Aufteilung des Endschadens auf die Abwicklungsjahre ist im Schnitt für alle Anfalljahre gleich.

$$\mathbb{E}(F_{ik}) = f_k$$

f_k gibt die durchschnittliche Steigerung des Schadenstandes von Abwicklungsjahr k auf Abwicklungsjahr k+1 an.
(unabhängig von Anfalljahr i!)

Schätzer für f_k

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}, \quad 2 \leq k \leq I-1$$

Schätzer für Endschaden C_{iI}

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i}\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I$$

Schätzer für Reserve $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$$

Schätzer für Gesamtreserve $R = R_2 + \ldots + R_I$

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$$

1. Modellannahme

Prognose beruht nur auf dem aktuellen Schadenstand $C_{i,I+1-i}$, frühere Schadenstände $C_{i1}, \dots, C_{i,I-i}$ werden nicht berücksichtigt.

CL1

Es gibt Abwicklungsfaktoren $f_1, \dots, f_{I-1}$ mit

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} | C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = f_k, \quad \text{für} \quad C_{ik} > 0$$

bzw.

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k.$$

2. Modellannahme

CL2

Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \ldots, C_{iI}\}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad$ sind global unabhängig.

Satz 2.1

Unter den Annahmen CL1 und CL2 gilt

$$\mathbb{E}(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I.$$

Beweis siehe [M].

$\Rightarrow$ Chain-Ladder Projektion basiert tatsächlich auf dem Modell aus CL1 und CL2.

Satz 2.2

Unter den Annahmen CL1 und CL 2 sind die Schätzer $\hat{f}_k$ ewartungstreu und unkorreliert mit

$$\mathbb{E}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}.$$

Beweis siehe [M].

$\Rightarrow$ Schätzer für $f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}$ ist vernünftig.

Sensitivität des Chain-Ladder Verfahrens

problematische Stellen im Abwicklungsdreieck:

1. rechte obere Ecke:
   Schätzer des letzten Abwicklungsfaktors f_{I-1} beruht nur auf dem *einen* Beobachtungswert S_{1I}, Verfahren überträgt diesen Faktor auf alle weiteren Anfalljahre, auch wenn er untypisch ist
2. linke untere Ecke:
   Reserveschätzer $\hat{R}_I$ für das neueste Anfalljahr beruht nur auf dem *einen* Wert $C_{I1} = S_{I1}$, dieser Wert ist selbst am Ende des Anfalljahres noch nicht sehr aussagekräftig
   Extremfall: $C_{I1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{R}_I = 0$

Sensitivität des Chain-Ladder Verfahrens

mögliche Korrektur eines unplausiblen C_{I1}:

Ersetzte C_{I1} im Reserveschätzer durch

$$\frac{v_I \sum_{i=1}^{I} C_{i1}}{\sum_{i=1}^{I} v_i},$$

wobei v_i das Volumen von Anfalljahr i ist.

Bemerkung: weitere unplausible Erstjahresstände C_{i1} können durch Rückwärtsprojektion aus den aktuellen Schadenständen geschätzt werden (sog. **Cape-Cod-Verfahren**).

Genauigkeit des Chain-Ladder Verfahrens

wichtig: Angabe der Genauigkeit des Reserveschätzers $\hat{R}_i$

mittlerer quadratischer Fehler

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2|D) = \underbrace{\mathbb{V}(R_i|D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(R_i|D) - \hat{R}_i)^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

unter der Bedingung

$$D = \{C_{ik}|i + k \leq I + 1\}$$

Ziel: Schätzung des Zufallsfehlers und des Schätzfehlers.

Dazu ist eine weitere Modellannahme notwendig:

CL3

Es gibt Proportionalitätskonstanten $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{I-1}^2$ mit

$$\mathbb{V}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} | C_{i1}, \ldots, C_{ik}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}} \quad \text{für} \quad C_{ik} > 0$$

bzw.

$$\mathbb{V}(C_{i,k+1} | C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik}\sigma_k^2.$$

Zur konkreten Berechnung brauchen wir noch Schätzer für σ_k^2:

Schätzer für σ_k^2

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-2,$$

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = min \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \hat{\sigma}_{I-3}^2 \right)$$

Bemerkung: Der Schätzer ist erwartungstreu.

Nun können wir einen Schätzer für $mse(\hat{R}_i)$ herleiten, wobei der Standardfehler $s.e.(\hat{R}_i) = \sqrt{mse(\hat{R}_i)}$.

Satz 2.3

Unter den Annahmen CL1, CL2 und CJ3 kann der mittlere quadratische Fehler des Reserveschätzers $\hat{R}_i$ des Chain-Ladder Verfahrens geschätzt werden durch

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right).$$

Beweis siehe [M].

Da die Schätzer $\hat{f}_k, \hat{\sigma}_k$ positiv korreliert sind, dürfen wir zur Berechnung des Standardfehlers von $\hat{R}$ die Standardfehler der einzelnen $\hat{R}_i$ nicht einfach aufsummieren.

Satz 2.4

Unter den Annahmen CL1, CL2 und CJ3 kann der mittlere quadratische Fehler der Gesamtreserve $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ geschätzt werden durch

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^{I} \left((s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{iI} \left(\sum_{j=i+1}^{I} \hat{C}_{jI} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right)$$

Beweis siehe [M].

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

1. Einleitung und Überblick
2. Ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren
3. Weitere kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

Einleitung und Überblick

Das CL-Verfahren ist ein Spezialfall einer Modellklasse, für die gilt:

Klasse A

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1}) = \mathbb{E}(C_{ik})f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

mit unbekannten positiven Parametern $f_1, \ldots, f_{I-1}$.

Bemerkung: (A) folgt aus der Anwendung des Erwartungswertoperators auf CL1.

Satz 3.1

Jedes Modell, für das (A) gilt, erfüllt auch

Klasse B

$$\mathbb{E}(S_{ik}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i, \quad k \leq I,$$

mit unbekannten Parametern $x_i, y_k > 0$ mit $y_1 + \ldots + y_I = 1$.

und umgekehrt.

Beweis siehe [M].

Annahmen

Schätzer für die noch unbekannten Werte $\mathbb{E}(S_{ik}), \quad i+k > I+1$
$\rightarrow$ erhalten wir, wenn wir die Parameter x_i, y_i schätzen können.

1. Alle S_{ik} sind unabhängig.
2. Alle S_{ik} sind strikt positiv.

$$S_{ik} > 0$$

Bemerkung: strengere Annahmen als beim CL-Verfahren!

Individuelles Modell

für die ZV S_{ik} der Änderung des Schadenstands von Anfalljahr i in Abwicklungsjahr k

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{v_i} R_{ikn},$$

wobei wir als Volumenmaß v_i die Polizzenzahl von Anfalljahr i benutzen.
R_{ikn} ist der von der n-ten Polizze stammende Änderungsbetrag, für die meisten Polizzen gleich 0 $\Rightarrow$ Gammaverteilung

allgemeiner Ansatz für R_{ikn}:

- Erwartungswert $\mathbb{E}(R_{ikn}) = x_i y_k, \quad 1 \leq n \leq v_i,$
- und Varianz $\mathbb{V}(R_{ikn}) = \frac{(x_i y_k)^2}{\alpha}$
- mit Formparameter $\alpha < 1$.

$\Rightarrow$

Gammaverteilung für S_{ik}

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(S_{ik}) = v_i x_i y_k$$

und Varianz

$$\mathbb{V}(S_{ik}) = \frac{v_i (x_i y_k)^2}{\alpha}$$

mit Formparameter

$$v_i \alpha.$$

weiteres Vorgehen

- Likelihoodfunktion L bzw. log-Likelihoodfunktion $\ln(L)$ aufstellen
- $\ln(L)$ partiell ableiten nach x_i, y_k und nullsetzen
- Likelihoodschätzer $\hat{x}_i, \hat{y}_k$ berechnen
- Reserveschätzer

$$\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i \hat{x}_i \hat{y}_k$$

und Endschaden

$$\hat{C}_{iI} = c_{i,I+1-i} + \hat{R}_i$$

berechnen

Weitere kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

- Verfahren mittels der **Methode der kleinsten Quadrate**: beruht auf der Lognormalverteilung, ist Basismodell einer verbreiteten Schadenreservierungs-Software (ICRFS von Ben Zehnwirth).
- auf der **Inversen Gaußverteilung** beruhendes Verfahren: Varianzstruktur wird durch einen zusätzlichen Parameter verbessert.
- Modell mit der **modifizierten Poissonverteilung**: Chain-Ladder Verfahren kann daraus hergeleitet werden.

Modifikation der bisher behandelten Verfahren

1. Separation von Kalenderjahreffekten
2. Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden

Separation von Kalenderjahreffekten

- bis jetzt: Annahme der **Unabhängigkeit der Anfalljahre** $\longrightarrow$ problematisch!
- sog. **Kalenderjahreffekte** betreffen meist mehrere Anfalljahre zugleich, z.B.
  - Änderungen der Inflationsrate
  - Änderungen in der Reservierungs- und Regulierungspraxis
  - Änderungen in der Rechtssprechung
- Abwicklungsdreieck auf das Vorhandensein solcher Kalenderjahreffekte überprüfen
- gegebenenfalls Auswirkung des Effekts auf die Höhe der Schadenreserve durch Weglassen oder Glätten einzelner Daten eliminieren

- konstante Kalenderjahreffekte:
  z.B. konstanter jährlicher Inflationsfaktor $u > 1$

  $$\mathbb{E}(S_{ik}) = x_i y_k u^{i+k-2} = (x_i u^{i-1})(y_k u^{k-1})$$

  $\Rightarrow$ in Daten enthaltene, konstante Inflation kann nicht erkannt werden, dennoch kein Problem.
- nichtkonstante Kalenderjahreffekte:
  z.B. Änderung in der Rechtsprechung oder der Schadenregulierung,
  können NICHT in multiplikativer Form geschrieben werden
  $\Rightarrow$ müssen quantifiziert und eliminiert werden.

Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden

- bis jetzt: IBNR- und IBNER-Schäden gemeinsam dargestellt $\longrightarrow$ Trennung sinnvoll!
- Änderungsbetrag $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ zerlegt in

$$S_{ik} = T_{ik} + U_{ik},$$

  wobei
  $U_{ik} \ldots$ Schäden, die vor Abwicklungsjahr k noch nicht gemeldet waren (**IBNR-Schäden**),
  $T_{ik} \ldots$ Schäden, die vor Abwicklungsjahr k bereits gemeldet waren (**IBNER-Schäden**).
- $T_{i1} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{i1} = S_{i1} = U_{i1}$

- Modellierung der IBNR-Schäden:
  U_{ik} unabh. von $U_{i1}, \ldots, U_{i,k-1}$ und $T_{i1}, \ldots, T_{i,k-1} \Rightarrow$

$$\mathbb{E}(U_{ik}) = v_i m_k, \quad 1 \leq i, k \leq I,$$

$$\mathbb{V}(U_{ik}) = v_i s_k^2, \quad 1 \leq i, k \leq I,$$

  mit bekanntem Volumen v_i und unbekannten Parametern m_k, s_k.
- Modellierung der IBNER-Schäden:
  T_{ik} unabh. von U_{ik}, abh. von vergangener Schadenabwicklung $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(T_{ik}|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} h_{k-1},$$
$$\mathbb{V}(T_{ik}|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} t_{k-1}^2,$$

  mit bekanntem $C_{i,k-1}$ und unbekannten Parametern h_k, t_k.

Modell für die C_{ik}

Kombination von Chain-Ladder und Modell der anfalljahrunabh. Schadenquotenzuwächsen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{ik}|D_{i,k-1}) &= \mathbb{E}(C_{i,k-1} + T_{ik} + U_{ik}|D_{i,k-1}) \\ &= C_{i,k-1}(1+h_{k-1}) + v_i m_k\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Schätzer für Endschaden C_{iI}

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i}\hat{g}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{g}_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i \hat{m}_k \hat{g}_k \cdot \ldots \cdot \hat{g}_{I-1}$$

Schätzer für Reserve R_i

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!