Spieltheoretische Anwendungen in der Versicherungsmathematik

Mitterhuber Jürgen

November 2009

Was ist Spieltheorie

Jeder versucht schlauer zu sein, als der andere.

Spieltheorie untersucht, was herauskommt, wenn das alle versuchen.

Gefangenendilemma

	Schweigen	Gestehen
Schweigen	4,4	15,1
Gestehen	1,15	10,10

Tabelle: Ereignismatrix: Haftstrafe in Jahren im Gefangenendilemma

Gefangenendilemma

	Schweigen	Gestehen
Schweigen	3,3	0,5
Gestehen	5,0	1,1

Tabelle: Auszahlungsmatrix des Gefangenendilemmas

wichtige Begriffe

- *Pareto-optimal:* So werden Zustände beschrieben, in denen sich kein Spieler verbessern kann, ohne dass sich gleichzeitig ein anderer verschlechtert.
- *nicht kooperative Spiele:* Verbindliche Absprachen sind hier nicht möglich. Jeder Spieler muss für sich alleine entscheiden.

Definition

Ein Spiel in strategischer (oder Normal-)Form besteht aus drei Elementen:

1. Menge der I Spieler $\{1, \ldots, I\}$
2. Menge S_i der reinen Strategien $s_i^1, \ldots, s_i^{M_i}$ für jeden Spieler i.
3. Auszahlungsfunktionen $u_i(s)$, die für Strategiekombinationen $s = (s_1, \ldots, s_I)$ die Auszahlung an den Spieler i angeben.

Die Aufgabe der Spieltheorie ist es zu prognostizieren, welche Strategie die Spieler in einem Spiel wählen.

Diese Prognose nennt man *Lösung* des Spiels. Sie kann eindeutig sein, aber auch unterschiedliche Strategiekombinationen können als Lösung in Frage kommen.

Definition

Sei $s_{-i} \in S_{-i}$ ein Strategietupel von Strategien aller Spieler bis auf i und sei $\tilde{s}_i$ eine Strategie des i. Dann ist

$$(\tilde{s}_i, s_{-i}) = (s_1, \ldots, s_{i-1}, \tilde{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_I).$$

Definition

Eine reine Strategie s_i des Spielers i ist *strikt dominiert*, falls $\tilde{s}_i \in S$ existiert, so dass

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für alle } s_{-i} \in S_{-i}$$

Die Strategie ist *schwach dominiert*, falls

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für alle } s_{-i} \in S_{-i}$$

und

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für ein } s_{-i} \in S_{-i}$$

gilt.

Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

Mit dem Kriterium der wiederholten Dominanz sind viele ökonomische Spiele, wie zum Beispiel das folgende, nicht zu lösen.

BOEING und AIRBUS

(Zeilenspieler: BOEING, Spaltenspieler: AIRBUS)

	Markteintritt	Kein Markteintritt
Markteintritt	-5,-5	100,0
Kein Markteintritt	0,100	0,0

Tabelle: Auszahlungsmatrix: Flugzeugmarkt

Definition (*Nash-Gleichgewicht*):

Eine Strategiekombination s^* heißt Nash-Gleichgewicht, falls für alle Spieler i

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ für alle } s_i \in S_i$$

Stein-Schere-Papier

	Stein	Schere	Papier
Stein	0,0	1,-1	-1,1
Schere	-1,1	0,0	1,-1
Papier	1,-1	-1,1	0,0

Tabelle: Auszahlungsmatrix: Stein-Schere-Papier

Definition (*Gemischte Strategie*):

So nennt man eine Strategie, bei der die durchgeführte Handlung von einem Zufallsprozess abhängt.

Eine gemischte Strategie $\sigma_i = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{M_i})$ für Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der reinen Strategien $S_i = \{s_i^1, \ldots, s_i^{M_i}\}$. Σ_i sei der Raum aller gemischten Strategien des Spielers i.

Definition (*Gemischtes Nash-Gleichgewicht*):

Eine Kombination $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_I^*)$ von gemischten Strategien heißt Nash-Gleichgewicht, falls für alle Spieler i

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \text{ für alle } \sigma_i \in \Sigma_i$$

Die maximale Auszahlung an einen Spieler, falls die Gegenspieler versuchen, seine Auszahlung zu minimieren, heißt Minmax-Wert.

Definition (*Minmax-Wert*):

Der Minmax-Wert m_i für einen Spieler i eines Spiels mit Strategieräumen Σ_i und Auszahlungen u_i ist

$$m_i = \min_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} \left(\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right)$$

Dynamische Spiele

Spieler entscheiden nicht nur einmal simultan, sondern:

- mehrmals

  oder

- nacheinander.

vollständige Information: Wenn die Spieler nicht nur ihre eigene, sondern alle Auszahlungsfunktionen kennen.

zentrales Problem: Glaubwürdigkeit von Strategien

perfekte Information: Der Spieler, der am Zug ist, kennt alle vorherigen Züge der Mitspieler. sonst: *imperfekte Information*

Um ein dynamisches Spiel zu beschreiben, müssen wir folgende Elemente erläuter:

- Die Menge der Spieler $\{1, \ldots, I\}$
- Die Reihenfolge, in der die Spieler am Zug sind
- Die Aktionsmöglichkeiten der Spieler bei jedem Zug
- Die Auszahlungen in Abhängigkeit der Aktionen
- Die Information der Spieler bei jedem Zug
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von exogenen Ereignissen

Kooperative Spiele

Sind Spiele, bei denen die Spieler verbindliche Absprachen treffen können.

Definition (*Verhandlungsspiel*):

Ist durch die Menge P aller möglichen Auszahlungsvektoren $u = (u_1, u_2)$ und den Konfliktpunkt $C = (c_1, c_2)$ festgelegt.

Ist C gegeben: *einfaches* Verhandlungsspiel
sonst: *allgemeinenes* Verhandlungsspiel

Nash-Verhandlungslösung

- beruht auf vier Axiomen
- f ordnet jedem (P, C) die Lösung zu
- $f_i(P, C) \ldots$ Auszahlung an den $i-$ten Spieler

Nash-Verhandlungslösung

Axiom 1

Unabhängigkeit von äquivalenten Nutzentransformationen:

Für jedes Verhandlungsspiel (P, C) und für beliebige reelle Zahlen $a_i > 0,\ b_i$ ist die Lösung

$$f_i(\tilde{P}, \tilde{C}) = a_i \cdot f_i(P, C) + b_i$$

falls $(\tilde{P}, \tilde{C})$ ein Verhandlungsspiel ist, das sich aus der linearen ordnungserhaltenden Nutzentransformation

$$\tilde{u}_i = a_i \cdot u_i + b_i; \quad \tilde{c}_i = a_i \cdot c_i + b_i$$

ergibt.

Nash-Verhandlungslösung

Axiom 2
Symmetrie:

Ist (P, C) ein symmetrisches Verhandlungsspiel, so gilt $f_1(P, C) = f_2(P, C)$.

Axiom 3
Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen:

Ist $Q \subset P$ und $f(P, C) \in Q$, so gilt $f(Q, C) = f(P, C)$.

Axiom 4
Pareto-Optimalität:

Es existiert kein $x \in P, x \neq f(P, C)$ mit $x_i \geq f_i(P, C)$ für alle $1 \leq i \leq 2$.

Nash-Verhandlungslösung

Satz

Sei (P, C) ein Verhandlungsspiel. Es existiert genau eine Lösung, die die Nash-Axiome erfüllt. Diese sogenannte *Nash-Verhandlungslösung* ist der Vektor $u^* \in P$, der das *Nash-Produkt*

$$NP = (u_1 - c_1) \cdot (u_2 - c_2)$$

maximiert.

Nebenbedingung: Pareto-Optimalität

Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

$C_i \ldots$ Versicherungsunternehmen, $i \in \{1, 2\}$
$x_i \ldots$ Claim-Wert vor Austausch, $i \in \{1, 2\}$
$y_i \ldots$ Claim-Wert nach Austausch, $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{array}{llll} C_1: & x_1 = 5 & C_2: & x_2 = 10 \\ & \sigma_1^2 = 4 & & \sigma_2^2 = 8 \end{array}$$

Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

linearer Risikoaustausch:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1-\alpha)\cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + K \\ y_2 &= \alpha \cdot x_1 + (1-\beta)\cdot x_2 - K \\ &0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \end{aligned}$$

$K\ldots$ fixer (positiver oder negativer) Geldwert
$K := 5 \cdot \alpha - 10 \cdot \beta$, dann:

$\mathbb{E}(y_1) = \mathbb{E}(x_1) = 5$ und $\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(x_2) = 10$

Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

Unabhängigkeit vorausgesetzt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(y_1) &= 4 \cdot (1-\alpha)^2 + 8 \cdot \beta^2 \\ \mathbb{V}(y_2) &= 4 \cdot \alpha^2 + 8 \cdot (1-\beta)^2 \end{aligned}$$

z.B.: $\alpha = 0.2$ und $\beta = 0.3$ ergibt $\mathbb{V}(y_1) = 3.28 < 4$ und $\mathbb{V}(y_2) = 4.08 < 8$ (Punkt 1)

Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

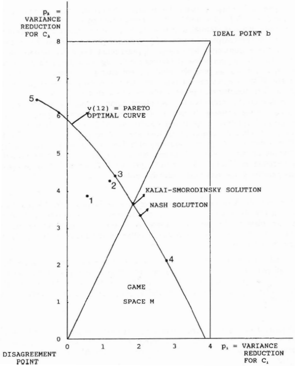

Abbildung: Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

Die Varianzreduktion wird repräsentiert durch:

$$\begin{aligned} p_1 &= 4 - 4 \cdot (1-\alpha)^2 - 8 \cdot \beta^2 \\ p_2 &= 8 - 4 \cdot \alpha^2 - 8 \cdot (1-\beta)^2 \end{aligned}$$

$NP = p_1 \cdot p_2$

Nash-Lösung:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.613, \;\; \beta = 0.387 \\ p_1 &= 2.203, \;\; p_2 = 3.491 \end{aligned}$$

Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

Kalai und *Smorodinsky* liefert:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5858, \;\; \beta = 0.4142 \\ p_1 &= 1.9413, \;\; p_2 = 3.8821 \end{aligned}$$

Koalitionsspiele

Bisher: nur zwei Spieler

Jetzt: mehr als zwei Spieler $\rightarrow$ komplizierter!

Koalitionsbildung ist möglich

Definition (*Koalition*):

Sei $G = \{1, 2, \ldots, I\}$ die Menge aller Spieler. Jede nichtleere, nicht einelementige Teilmenge ungleich G heißt Koalition (im eigentlichen Sinne).

- ein Spieler: *Einerkoalition*
- alle Spieler: *große Koalition*
- sonst: *Koalition im eigentlichen Sinne*

Definition (*Charakteristische Funktion*):

Eine Funktion v, die jeder Koalition $K \subset G$ den Minmaxwert des Spiels von K gegen die Koalition aller Gegenspieler zuordnet, heißt *charakteristische Funktion*.

Definition (*Imputationsmenge*):

Die Imputationsmenge ist die Menge der Auszahlungsvektoren, die die folgenden zwei Eigenschaften besitzen.

1. Individuelle Rationalität: Der Auszahlungsvektor u ist für die Spieler individuell rational, falls gilt:

$$u_i \geq v(\{i\}) \text{ für alle } 1 \leq i \leq N$$

2. Effizienz: u ist effizient, falls es keinen anderen Auszahlungsvektor $\hat{u} \neq u$ gibt der mit $\hat{u}_i \geq u_i$ für alle i. Wobei für mindestens ein i „$>$“ gilt.

Definition (*Kern*):

Der *Kern* besteht aus allen Auszahlungsvektoren, die durch keine Koalition verworfen werden können und die zur Imputationsmenge gehören.

Im Kern sind deshalb alle Vektoren, die weder von:

- einem Spieler
- einer Koalition
- allen Spielern

verworfen werden können.

Verbesserung der Risikoprämie

Gruppe 1:

$$\begin{aligned} n_1 &= 100 \ \mathit{Personen} \\ p_1 &= 0.1 \end{aligned}$$

Claim:

$$\begin{aligned} m &= n_1 \cdot p_1 = 10 \\ \sigma &= \sqrt{n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)} = 3 \end{aligned}$$

Prämien:

$$m + 3 \cdot \sigma = 10 + 9 = 19$$

Verbesserung der Risikoprämie

Gruppe 2:

$$\begin{aligned} n_2 &= 100 \ \textit{Personen} \\ p_2 &= 0.2 \end{aligned}$$

Claim:

$$\begin{aligned} m &= n_2 \cdot p_2 = 20 \\ \sigma &= \sqrt{n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2)} = 4 \end{aligned}$$

Prämien:

$$m + 3 \cdot \sigma = 20 + 12 = 32$$

Verbesserung der Risikoprämie

Beide schließen sich zusammen:

Prämie:

$$n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + 3\sqrt{n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) + n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2)} = \\ = 10 + 20 + 15 = 45$$

besser da: $45 < 51 = 19 + 32$

anteilsmäßiges Aufteilen: Gruppe 1: 15 Gruppe 2: 30

Verbesserung der Risikoprämie

Definieren wir P_1 und P_2 als die zu zahlenden Prämien:

rationales Handeln vorausgesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} &P_1 + P_2 = 45, \text{ mit} \\ &13 \leq P_1 \leq 19 \\ &26 \leq P_2 \leq 32 \end{aligned}$$

Verbesserung der Risikoprämie

Gruppe 3:

$$\begin{aligned} n_1 &= 120 \;\; Personen \\ p_1 &= 0.3 \end{aligned}$$

Prämien:

$$36 + 15 = 51$$

große Koalition: Prämien: 10+20+36+21=87

$$\begin{aligned} &P_1 + P_2 + P_3 = 87, \;\; \text{mit} \\ &4 \leq P_1 \leq 19 \\ &17 \leq P_2 \leq 32 \\ &36 \leq P_3 \leq 51 \end{aligned}$$

Verbesserung der Risikoprämie

Gruppe 2 und 3 bilden Koalition:
Prämie:

$$n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 + 3\sqrt{n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) + n_3 \cdot p_3 \cdot (1 - p_3)} = 20 + 36 + 19.2 = 75.2$$

Aus $P_2 + P_3 < 75.2$ folgt $P_1 > 11.8$.

Verbesserung der Risikoprämie

restliche Koalitionen:
Prämie:

$$P_1 + P_2 < 45$$
$$P_1 + P_3 < 63.4$$

Und schlussendlich:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 87, \text{ mit}$$
$$11.8 \leq P_1 \leq 19$$
$$23.6 \leq P_2 \leq 32$$
$$42 \leq P_3 \leq 51$$

Verbesserung der Risikoprämie

Verallgemeinerung:

m Gruppen (M...Menge aller Gruppen)

Gruppe i: n_i Personen mit p_i für $i \in (1, \ldots, m)$

$S \subset M$ Prämie:

$$v(S) = \sum_S n_i \cdot p_i + 3 \cdot \sqrt{\left(\sum_S n_i \cdot p_i \cdot (1 - p_i)\right)}$$

Verbesserung der Risikoprämie

Nehmen wir an S besteht aus s Gruppen, in $\hat{S}$ sind dann die restlichen $m - s$ Gruppen. Es ist leicht einzusehen, dass

$$v(S) + v(\hat{S}) > v(M)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{m} P_i = v(M), \text{ mit} \\ &P_i \leq v(i) \end{aligned} \tag{1}$$

Verbesserung der Risikoprämie

liefert aber nur Intervalle für P_i

Schreibe $P_i = v(i) - t_i$ mit t_i nicht-negativ und

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = \sum_{i=1}^{m} v(i) - v(M)$$

$\sum_{i=1}^{m} t_i \ldots$ Gewinn durch Zusammenschluss

Verbesserung der Risikoprämie

Prämie darf nicht höher sein, als in der Einerkoalition

$$\sum_{S} P_j \leq v(S) \tag{2}$$

Wenn wir mit $M - i$ die Menge aller Gruppen ohne die i-te bezeichen, können wir unser Intervall schreiben als

$$v(M) - v(M - i) \leq P_i \leq v(i)$$

Verbesserung der Risikoprämie

Gruppe 1 bildet Unternehmen: $P_1 = v(1)$

Gruppe 2 kommt dazu (behält alle Gewinne): $P_2 = v(1,2) - v(1)$

Gruppe 3 kommt dazu: $P_3 = v(1,2,3) - v(1,2)$

Gruppe m als letze dazu: $P_m = v(M) - v(M - (m-1))$

Prämien erfüllen (1) und (2).

Definition (*Shapley-Wert*):

Der *Shapley-Wert* ist ein punktwertiges Lösungs-Konzept der Spieltheorie. Er gibt an, welche Auszahlung die Spieler in Abhängigkeit von einer Koalitionsfunktion erwarten können.

Sei M die Menge der Spieler, $m = |M|$ und v die charakteristische Funktion des Spiels. Dann ist der Shapley-Wert für Spieler i definiert als:

$$\alpha_i = \frac{1}{m!} \sum_{S \subseteq M} (s-1)! \cdot (m-s)! \cdot [v(S) - v(S-i)] \quad i = 1, \ldots, m$$

Zähler: $(s-1)! \cdot (m-s)!$ gibt Anzahl möglicher Permutationen an, in denen Spieler i zu einer in beliebiger Reihenfolge entstandenen Koalition von Spielern aus S dazukommt.

Nenner: $m!$ Anzahl aller möglichen Permutationen.

Also ergibt der Term zusammen den Anteil an Permutationen, in denen Spieler i nach den anderen Spielern aus S und vor den Spielern aus $M \backslash S$ auftritt.

$v(S) - v(S-i)$ gibt den Beitrag an, der dadurch entsteht, dass Spieler i der Koalition S beitritt.

Er ist die einzige Auszahlungsfunktion, welche die folgenden drei Axiome erfüllt:

1. Symmetrie-Axiom: Spieler mit gleichen Beiträgen erhalten das gleiche.
2. Null-Spieler-Axiom: Ein Spieler mit Beitrag null zu jeder Koalition erhält null.
3. Additivitäts-Axiom: Wenn das Spiel in zwei unabhängige Spiele zerlegt werden kann, mit den charakteristischen Funktionen v und w, dann soll die Auszahlung jedes Spielers im zusammengesetzten Spiel der Summe der Auszahlungen in den aufgeteilten Spielen entsprechen.

Verbesserung der Risikoprämie

In einem Zwei-Personen Spiel, ergibt sich für den Shapley-Wert:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1/2) \cdot [v(12) + v(1) - v(2)] \\ \alpha_2 &= (1/2) \cdot [v(12) + v(2) - v(1)] \end{aligned}$$

Shapley-Lösung auf das Beispiel mit nur zwei Gruppen:

$$P_1 = 16 \text{ und } P_2 = 29$$

und für die Variante mit drei Gruppen:

$$P_1 = 14.5,\ \ P_2 = 26.9 \text{ und } P_2 = 45.6$$

Empirische Aspekte

Aufgabe der Spieltheorie ist es, reales Verhalten von Wirtschaftssubjekten

- zu beschreiben
- zu erklären
- zu prognostizieren

um einem Spieler eine Handlungsanweisung zu geben.

experimentelle Spieltheorie:

- Probanden spielen im Labor
- Auszahlungen sind Geldauszahlungen
- beobachteten Verhaltensweisen mit den prognostizierten Aktionen verglichen
- Abweichungen führen dazu, die Unvollkommenheiten aufzudecken und zu beheben.

Nutzenfunktionen

Gefangenendilemma:

- großer Teil schweigt und bevorzugt kooperative Strategie
- versprochene Auszahlung ist abstrakter Wert ohne Nutzen
- Offenbarung des unkooperativen Verhaltens mit psychologischen Nutzenverlusten verbunden

Ultimatum:

- oftmals unter dem Aspekt der Fairneß betrachtet
- Angebote unter 20 Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 50% abgelehnt
- Ablehnungswahrscheinlichkeit steigt an, wenn die Angebote sinken
- in der Regel 40 bis 50 Euro angeboten

Um solches Verhalten, auch *Reziprozität* genannt, in eine allgemeine Theorie einzubauen, existieren mehrere Ansätze. Man unterscheidet Ansätze, in denen:

- Spieler „soziale Präferenzen" besitzen (auch die Auszahlung an die Gegenspieler hat einen Nutzen)
- Intentionen der Gegenspieler mit einbezogen werden

Modellbildung

Nicht nur das mathemtische Spiel, sondern auch die Beschreibung, hat Auswirkungen auf das Verhalten der Spieler.

Beispiel (1)

Der Spieler erhält 10 Euro und hat dann die Entscheidung zwischen einem Verlust von 5 Euro oder einer Lotterie, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit zum Verlust von 10 Euro oder zum Verlust von gar keinem Euro führt.

Beispiel (2)

Der Spieler erhält entweder 5 Euro, oder er spielt die Lotterie, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit nichts oder 10 Euro bedeutet.

- Beispiel (1) und (2) beschreiben aus Sicht der Spieltheorie dieselbe Enscheidungssituation.
- dennoch wird in Beispiel (1) die Lotterie häufiger gespielt als in (2).
- es zeigt sich also: Spieler sind risikobereiter, wenn es um Verluste geht.

Vielen Danke für die Aufmerksamkeit!