Zinsderivate

Schander Kerstin

Dezember 2009

Definition eines Derivates

Definition

Finanzinstrument, dessen Wert von den Werten anderer grundlegender Variablen abhängt

"Underlying" bzw. Basiswert: Waren und Finanzwerte aller Art

Derivate wurden nicht erfunden, sondern haben sich ganz natürlich entwickelt.

Wo können Derivate gehandelt werden?

- *Börsenhandel:* Marktplatz, auf dem Marktteilnehmer standardisierte Kontrakte handeln
  $\Rightarrow$ Future-Kontrakte und Optionen
- *Over-the-Counter-Handel:* außerbörslicher Handel

  Vorteile:
  - freie Gestaltungsmöglichkeit der Kontrakte
  - es müssen keine Börsengebühren entrichtet werden

  Nachteile:
  - Börsenaufsicht fehlt $\Rightarrow$ Kreditrisiko entsteht
  - der OTC-Markt ist weniger liquide

grundlegende Arten von Derivaten

- Forward- und Futurekontrakt
- Option
- Swap

Forward-Kontrakt

Definition

Vereinbarung, ein Gut zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt zu einem bestimmten Kurs zu kaufen bzw. zu verkaufen

	in t_0	in t	in T
Preis	$e^{r(T-t_0)}S_{t_0}$	$e^{r(T-t)}S_t$	S_T
Wert	0	$S_t - e^{-r(T-t)}K$	$S_T - K$

Tabelle: Preis und Wert eines Forward-Kontrakts in den ZPen t_0, t und T

Forward-Kontrakt

$S_t \dots$ Spotpreis = aktueller Kurswert des Underlyings in t
$K \dots$ Basispreis ($K = e^{r(T-t_0)} S_{t_0}$)
$F_t \dots$ Preis des Forward-Kontrakts der in t geschlossen wurde und Ausübungszeitpunkt T hat
$f \dots$ Wert (einer Long-Position) eines Forward-Kontrakts

Long-Position ... Position, die den Kauf eines Vermögensgegenstandes beinhaltet
Short-Position ... Position, die den Verkauf eines Vermögensgegenstandes beinhaltet

Zusammenhang zwischen Preis und Wert eines Forward-Kontrakts

$$F_t = S_t e^{r(T-t)} \qquad f = (F_t - K) e^{-r(T-t)}$$

Future-Kontrakt

Forward	Future
privater Vertrag zweier Parteien	Handel an der Börse
nicht standardisiert	standardisiert
gewöhnlich ein spezifizierter Liefertag	Lieferzeitraum von mehreren Tagen
Abrechnung bei Kontraktende	tägliche Abrechnung
Lieferung oder bare Endabrechnung	gewöhnlich Schließung des Kontrakts vor Fälligkeit
geringes Kreditrisiko	im Prinzip kein Kreditrisiko

Tabelle: Forward- vs. Future-Kontrakt

- *Margin (Einschuss):* Kassenbestand, der von Futurehändlern verlangt wird
- *Marking to Market:* tägliche Neubewertung zu Marktpreisen
- Future-Kurs konvergiert bei Heranrücken des Liefermonats gegen den Spotkurs des Underlyings

Option

Definition

Eine Option gibt dem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht etwas zu tun.

Man unterscheidet:

- Kaufoption(Call) und Verkaufsoption(Put)
- amerikanische und europäische Option

Auszahlung einer europäischen Kaufoption in der Long-Postion:

$$max(S_T - K, 0)$$

Auszahlung einer europäischen Verkaufsoption in der Short-Position:

$$min(S_T - K, 0) = -max(K - S_T, 0)$$

Swap

Definition

Vereinbarung zwischen zwei Unternehmen, in der Zukunft Cash Flows auszutauschen.

Ein Forward-Kontrakt kann als einfaches Beispiel für einen Swap angesehen werden.

gebräuchlichster Swap – „Plain Vanilla“-Zinsswap:

Zwei Vertragspartner vereinbaren, zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten Zinszahlungen auf festgelegte Nominalbeträge auszutauschen – ein Vertragspartner hat einen fixierten Festzinssatz, der andere einen variablen Zinssatz (z.B. LIBOR).

Zinsderivate

“Definition“

Finanzinstrumente, deren Auszahlung in irgendeiner Weise von Zinssätzen abhängt.

Schwierigkeiten bei der Bewertung:

- Komplexität des Zinssatzverhaltens
- meist Modell notwendig, dass das Verhalten der gesamten Spot-Rate-Strukturkurve beschreibt
- Volatilitäten an verschiedenen Punkten der Renditekurve sind unterschiedlich
- Zinssätze für Diskontierung *und* Auszahlungsbewertung erforderlich

Black-Scholes-Merton-Modell

Bewertungsformeln nach Black-Scholes

$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$ ... Preis einer europäischen Kaufoption

$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$ ... Preis einer europäischen Verkaufsoption

mit

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Herleitung der Black-Scholes-Formel (für c):

- Lösung der DGL $\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$ in Abhängigkeit der Randbedingung $f = max(S - K, 0)$, falls $t = T$ gilt
- Verwendung der risikoneutralen Bewertung

$\hat{E}[max(S_T - K, 0)] \ldots$ Erwartungswert in risikoneutraler Welt

$c = e^{-rT}\hat{E}[max(S_T - K, 0)] \ldots$ diskontierter Erwartungswert

1.Schritt: Beweis der allgemeinen Gleichung:

$$E[max(V - K, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2)$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{ln\left[\frac{E(V)}{K}\right] \pm \frac{w^2}{2}}{w}$$

$$E[max(V-K,0)] = \int_K^\infty (V-K)g(V)\,dV$$

lnV normalverteilt mit Standardabweichung $w \Rightarrow E(lnV) = m$

$$m = ln[E(V)] - \frac{w^2}{2}$$

$$Q = \frac{lnV - m}{w} \qquad h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

$$E[max(V-K,0)] = e^{m+\frac{w^2}{2}} \int_{\frac{lnK-m}{w}}^\infty h(Q-w)\,dQ - K \int_{\frac{lnK-m}{w}}^\infty h(Q)\,dQ$$

def. $N(x)$ als die W!, dass eine Variable mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ kleiner als x ist $\Rightarrow$ 1. Integral $= 1 - N[\frac{lnK - m}{w} - w] \Rightarrow$

$$E[max(V - K, 0)] = e^{m + \frac{w^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2)$$

2.Schritt:

betrachte Kaufoption auf dividendenlose Aktie, die zum Zeitpunkt T verfällt:

$$c = e^{-rT} \hat{E}[max(S_T - K, 0)]$$

lt. vorausgesetztem stoch. Prozess ist S_T lognormalverteilt

$\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ Standardabweichung von $lnS_T = \sigma\sqrt{T}$

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Black-Modell

Das Black-Modell stellt eine Erweiterung des Black-Scholes-Merton-Modells dar, mit folgenden Annahmen:

- V_T ist normalverteilt
- $E[V_T] = F_0$
- Standardabweichung von lnV_T ist $\sigma\sqrt{T}$

$$c = P(0, T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

mit $\quad d_{1,2} = \frac{ln\left(\frac{F_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$

Black-Modell

Gültigkeit des Black-Modells:

- Zinssätze konstant bzw. deterministisch:
  - Forward-Preis = Future-Preis
  - $E[S_T] = F_0$
- Zinssätze stochastisch
  - Warum darf man $E(V_T) = F_0$ (dem Forward-Preis von V) setzen?
  - Warum wird beim Diskontieren ignoriert, dass die Zinssätze stochastisch sind?

Anleiheoptionen

Definition

Option auf den Kauf bzw. Verkauf einer bestimmten Anleihe zu einem bestimmten Zeitpunkt für einen bestimmten Preis.

- Eingebettete Anleiheoptionen
  - Callable bzw. Puttable Bond
  - Kredit-/Hypothekentilgung bzw. Kreditzusage
- Europäische Anleiheoptionen

  Es wird angenommen, dass der Anleihepreis bei Fälligkeit der Option lognormalverteilt ist.

Anleiheoptionen

$$c = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)]$$

mit $\quad d_{1,2} = \frac{ln\left(\frac{F_B}{K}\right) \pm \frac{\sigma_B^2 T}{2}}{\sigma_B \sqrt{T}} \quad$ mit $\quad F_0 = \frac{B_0 - I}{P(0,T)}$

$\sigma_B \sqrt{T} =$ Standardabweichung des lnB_T

Anleiheoptionen

theoretische Begründung des Modells

unter Annahme der Forward-risikoneutralen Welt gilt:

- $f_0 = P(0,T)E_T(f_T) \quad \Rightarrow \quad c = P(0,T)E_T[max(B_T - K, 0)]$
- $E_T(V_T) = F \quad \Rightarrow \quad E_T(B_T) = F_B$

unter der Annahme, dass B_T lognormalverteilt ist und die Standardabweichung des $lnB_T = \sigma_B\sqrt{T}$
kann man obige Gleichung auf das Black-Modell zurückführen

Zinscaps

Definition

Vereinbarung einer Zinsobergrenze - Cap Rate R_K
(bei variabler Verzinsung)

Der Cap als Portfolio von Zinsoptionen

$L \ldots$ Nominalbetrag $\quad t_1, t_2, \ldots, t_n \quad \ldots$ Anpassungstermine
$t_{n+1} = T \quad R_k \ldots$ der zum Zeitpunkt t_k beobachtete Zinssatz
$\delta_k = t_{k+1} - t_k \quad$ (für Zeitabschnitt t_k bis $t_k + 1$)

$L\delta_k max(R_k - R_K, 0) \quad \ldots$ Auszahlung zum Zeitpunkt t_{k+1}

Zinscaps

Der Cap als Portfolio von Anleiheoptionen

$$\frac{L\delta_k}{1+R_k\delta_k} max(R_k - R_K, 0) = max\left[L - \frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}, 0\right]$$

$\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$ = Wert eines Zerobonds zumZeitpunkt t_k, der zum Zeitpunkt t_{k+1} den Betrag $L(1+R_K\delta_k)$ auszahlt

- <u>Zinsfloors</u> werden analog zu Zinscaps gebildet

  $L\delta_k max(R_K - R_k, 0)$ ... Auszahlung zum Zeitpunkt t_{k+1}

- <u>Collar</u> ist eine Kombination aus einem Cap(long) und einem Floor(short), bei dem die Einstiegskosten (für gewöhnlich) Null sind.

Bewertung von Caps und Floors

Bewertung eines Caplets:

Annahme: Zins R_k mit Volatilität σ_k ist lognormalverteilt

Wert des Caplets:

$$c = L\delta_k P(0, t_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{ln\left(\frac{F_k}{R_K}\right) \pm \frac{\sigma_k^2 t_k}{2}}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

Wert des entsprechenden Floorlets:

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)]$$

$\Rightarrow$ Spot-Volatilitäten vs. Flat-Volatilitäten

theoretische Begründung des Modells

unter Annahme der Forward-risikoneutralen Welt gilt:

- $f_0 = P(0, t_{k+1})E_{k+1}(f_{k+1}) \quad \Rightarrow$
  $c = L\delta_k P(0, t_{k+1})E_{k+1}[max(R_k - R_K, 0)]$
- $E_{k+1}[R(t_k, t_k, t_{k+1})] = R(0, t_k, t_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad E_{k+1}(R_k) = F_k$

  $R(t, T, T^*) \ldots$ der zum Zeitpunkt t beobachtete Forward-Zinssatz für den Abschnitt zwischen T und T^*

unter der Annahme, dass R_k lognormalverteilt ist
führen die Ergebnisse zum Cap-Bewertungsmodell zurück

europäische Swaptions

Definition

Swaption = Option auf einen Zinsswap
Der Inhaber der Swaption hat das Recht, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt in einen bestimmten Zinsswap einzutreten.

Unternehmen schließt in 6 Monaten Darlehen mit variabler Verzinsung und 5-jähriger Laufzeit ab
$\Rightarrow$ Möglichkeit gegen Prämie in Swaption einzusteigen (Tausch von 6-monatigem LIBOR-Satz gegen 8% per annum)

Bewertung europäischer Swaptions

Swap Rate – s_T

Fester Zinssatz, der in einem neu emittierten Swap mit Laufzeit n gegen den LIBOR-Satz getauscht werden kann.

Annahme: Swap Rate s_T ist bei Fälligkeit der Option lognormalverteilt

$\frac{L}{m} max(s_T - s_K, 0) \quad \Rightarrow \quad$ Auszahlung $=$ n-mal m Cash Flows

$s_K \ldots$ Fester Zinssatz, der in der Swaption vereinbart wurde
$T_1, T_2, \ldots, T_{nm} \quad \ldots$ Zahlungstermine

Bewertung europäischer Swaptions

Wert des im Zeitpunkt T_i erhaltenen Cash Flow:

$$\frac{L}{m} P(0, T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

mit $d_{1,2} = \frac{ln\left(\frac{s_0}{s_K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$

Gesamtwert der Swaption:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

$s_0 \ldots$ Forward Swap Rate zum Zeitpunkt 0

Bewertung europäischer Swaptions

vereinfachter Wert der Swaption:

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

$A \ldots$ Annuität = Wert des Kontrakts, der $\frac{1}{m}$ zu den Zeitpunkten T_i $(1 \leq i \leq mn)$ bezahlt

analog für eine Verkaufsoption auf s_T (also das Recht, den festen Zins s_K zu erhalten anstatt ihn zu bezahlen)

$$\frac{L}{m} max(s_K - s_T, 0)$$

$$LA[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)]$$

europäische Swaptions

theoretische Begründung des Swaption-Modells

unter Annahme der Forward-risikoneutralen Welt bezüglich der Annuität A gilt:

- $f_0 = A(0)E_A\left[\frac{f_T}{A(T)}\right] \quad \Rightarrow \quad LAE_A[max(s_T - s_K, 0)]$
- $s(t) = E_A[s(T)] \quad \Rightarrow \quad s_0 = E_A[s_T]$

unter der Annahme, dass s_T lognormalverteilt ist
führen die Ergebnisse zu den Bewertungen der Swaptions zurück

Rückblick

- Jedes der drei Modelle ist in sich konsistent, aber sie sind nicht untereinander konsistent.
  Es kann immer nur einer der drei Werte (Anleihepreis, Spot Rate, Swap Rate) als logmormalverteilt angenommen werden.
- Das Black-Modell berechnet die erwartete Auszahlung unter der Annahme, dass der Erwartungswert einer Variablen gleich ihrem Forward-Preis ist und diskontiert dann die erwartete Auszahlung mit der gegenwärtig beobachtetenSpot Rate

- Einführung
- Gleichgewichtsmodelle
- No-Arbitrage-Modelle
- Zinsbäume

Einführung

Short Rate r zum ZP t

Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für einen sehr kleinen (unendlich kleinen) Zeitabschnitt gilt. r wird auch als *momentaner kurzfristiger Zinssatz* bezeichnet.

Der Prozess, dem r in der risikoneutralen Welt folgt ist relevant.

Wert eines Zinsderivats (das in T eine Auszahlung f_T leistet):

$$f_t = \hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T\right]$$

$\bar{r}$ ... der durschnittliche Wert von r in [t, T]
$P(t, T)$ ... Preis einer Nullkupon-Anleihe zum Zeitpunkt t,
die in T Betrag 1 auszahlt.

Einführung

$R(t,T)\ldots$ Zinssatz zum Zeitpunkt t bei stetiger Verzinsung für eine Periode $T-t$

$$P(t,T) = \hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right] = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

$$\Longrightarrow R(t,T) = -\frac{1}{T-t} ln\hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right]$$

Diese Gleichung ermöglicht die Ableitung der Laufzeitstruktur der Zinssätze zu jedem beliebigen Zeitpunkt aus dem Wert von r zu diesem Zeitpunkt und dem risikoneutralen Prozess für r.

Gleichgewichtsmodelle mit einem Faktor

grundsätzlich wird der risikoneutrale Prozess für r durch einen Itô-Prozess beschrieben

$$dr = m(r)\,dt + d(r)\,dz$$

$m(r)\ldots$ momentane Drift (= Richtwert für den Zuwachs von r)
$s(r)\ldots$ momentane Standardabweichung

m und s sind zwar von r abhängig, jedoch zeitunabhängig

Einfaktor-Modell $\Rightarrow$ alle Zinssätze ändern in dieselbe Richtung, aber nicht um denselben Betrag

Rendleman-Bartter-Modell

$$dr = \mu r\, ds + \sigma r\, dz$$

μ und σ sind Konstanten
$\Rightarrow$ r folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung
$\Rightarrow$ derselbe Prozess wird auch für Aktienkurse unterstellt

Zinssätze weisen Mittelwerttendenz (Mean Reversion) auf, im Gegensatz zu Aktienkursen

Mittelwerttendenz wird von diesem Modell nicht berücksichtigt

Vasicek-Modell

$$dr = a(b - r)\,dt + \sigma\,dz$$

- dieses Modell berücksichtigt die Mittelwerttendenz, indem r mit einer Rate a auf ein Niveau b „gezogen“ wird
- normalverteilter stochastischer Term $\sigma\,dz$ überlagert Tendenz
- gesamte Zinsstrukturkurve kann als Funktion von $r(t)$ beschrieben werden, sobald a, b und σ bestimmt sind

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} lnA(t, T) + \frac{1}{T - t} B(t, T) r(t)$$

- Problem: r kann negativ werden

Modell von Cox, Ingersoll und Ross

$$dr = a(b - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dz$$

- Standardabweichung ist proportional zu $\sqrt{r}$, wenn Zinssatz steigt, steigt auch Standardabweichung
- Anleihepreise haben dieselbe Form wie im Vasicek-Modell

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t,T)r}$$

- ebenso wie im Vasicek-Modell sind steigende, sinkende oder gekrümmte Zinsstrukturkurven möglich
- $R(t, T)$ hängt linear von $r(t)$ ab
  $\Rightarrow$ $r(t)$ bestimmt das Niveau der Zinsstrukturkurkurve, nicht aber ihre grundsätzliche Form, welche von t abhängt.

Gleichgewichtsmodelle mit zwei Faktoren

- Modell von Brennan und Schwartz:
  Prozess für kurzfristigen Zinssatz tendiert zu langfristigem Zinssatz, der einem stochastischen Prozess folgt.
- Modell von Longstaff und Schwartz:
  geht von allgemeinem Gleichgewichtsmodell für die Ökonomie aus und leitet ein Zinsstrukturmodell mit einer stochastischen Volatilität ab

No-Arbitrage-Modelle

Problem der Gleichgewichtsmodelle:
sie passen meist nicht zur aktuellen Zinsstruktur

Gleichgewichtsmodelle in No-Arbitrage-Modelle überleiten, indem man die Drift von r zeitabhängig modelliert.

wesentliche Unterschiede der beiden Modelle:

	Gleichgewichtsmodelle	No-Arbitrage-Modelle
aktuelle Zinsstruktur	Modelloutput	Modellinput
Driftrate	keine Fkt der Zeit	zeitabhängig

Ho-Lee-Modell

Binomialbaummodell mit zwei Parametern:

- kurzfristige Standardabweichung
- Marktpreis des Risikos des kurzfristigen Zinssatzes

Modell konvergiert in stetiger Zeit gegen

$$dr = \theta(t)\,dt + \sigma\,dz$$

$\sigma \ldots$ momentane Standardabweichung konstant
$\theta(t) \ldots$ definiert mittlere Richtung $\quad \theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$

Einfaktor-Modell von Hull-White

$$dr = [\theta(t) - ar]\,dt + \sigma\,dz = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]\,dt + \sigma\,dz$$

$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$

$F_t(0,t) + a[F(0,t) - r] \ldots$ Driftrate
$\Rightarrow$ r folgt im Mittel der Steigung der anfänglichen Kurve der momentanen Forward Rates, bei Abweichen Rückkehr mit Rate a

Problem: für Ho-Lee und Hull-White kann r negativ werden

Black-Karasinski-Modell

$$dlnr = [\theta(t) - a(t)ln(r)]\, dt + \sigma(t)\, dz$$

lnr folgt dem selben Prozess wie r im Hull-White-Modell
⇒ r ist für zukünftigen Zeitpunkt nicht normalverteilt (wie in Ho-Lee und Hull-White), sondern lognormalverteilt

Black-Karasinski-Modell analytisch schlecht handhabbar
⇒ Ermittlung von Formeln zur Bewertung von Anleihen in Abhängigkeit von r nicht möglich

Zweifaktoren-Modell von Hull-White

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]\, dt + \sigma_1\, dz_1$$

Anfangswert von $u = 0$,

$$du = -bu\, dt + \sigma_2\, dz_2$$

Wahl von $\theta(t)$ so, dass das Modell mit der anfänglichen Zinsstruktur konsistent ist

$u \ldots$ Komponente des Tendenzniveaus von r

$dz_1, dz_2 \ldots$ Wiener Prozesse mit momentaner Korrelation von ρ

Zinsbaum

zeitdiskrete Darstellung des stochastischen Prozesses für den kurzfristigen Zinssatz

$\Delta t \ldots$ Zeitschritt im Baum
$R \ldots$ Zinssatz für Intervall Δt

- Diskontierungssatz variiert von Knoten zu Knoten
- Trinomialbaum oft zweckmäßiger – Mittelwerttendenz
- alternative Verzweigungen:
  - Eins-aufwärts-, Geradeaus-, Eins-abwärts-Verzweigung
  - Zwei-aufwärts-, Eins-aufwärts-, Geradeaus-Verzweigung
  - Geradeaus-, Eins-abwärts-, Zwei-abwärts-Verzweigung

Verfahren zur Konstruktion von Bäumen

Anwendung des Verfahrens auf das Hull-White-Modell

Annahme: R folgt demselben Prozess wie r

$$dR = [\theta(t) - aR]\, dt + \sigma\, dz$$

1. Schritt: konstruiere Baum für R^*, zu Beginn $R^* = 0$

$$dR^* = -aR^*\, dt + \sigma\, dz$$

$R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ ist normalverteilt, Varianz $= \sigma^2 \Delta t$
durchschnittliche Änderung von R^* in $\Delta t = -aR^* \Delta t$

Verfahren zur Konstruktion von Bäumen

$(i,j)\ldots$ Knoten mit $t = i\Delta t$ und $R^* = j\Delta R \quad (i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z})$
$\Delta R \ldots$ Abstand zwischen den Zinssätzen im Baum
$j > j_{max} \ldots$ Wechsel zu Abwärtsverzweigung
$j < j_{min} \ldots$ Wechsel zu Aufwärtsverzweigung

$p_u, p_m, p_d \ldots$ Wahrscheinlichkeiten der höchsten, mittleren und niedrigsten Verzweigung

falls „ normale “ Verzweigung:

$$
\begin{aligned}
p_u \Delta R - p_d R &= -aj\Delta R \Delta t \\
p_u \Delta R^2 + p_d \Delta R^2 &= \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta R^2 \Delta t^2 \\
p_u + p_m + p_d &= 1
\end{aligned}
$$

Verfahren zur Konstruktion von Bäumen

2. Schritt: Transformation des Baums für R^* in einen Baum für R
$\Rightarrow$ Verschiebung der Knoten des R^*-Baums, sodass die anfängliche Laufzeitstruktur der Zinssätze exakt wiedergegeben wird

$\alpha_i = \alpha(i\Delta t) = R(i\Delta t) - R^*(i\Delta t)$
$Q_{i,j} \ldots$ Barwert eines Wertpapiers, das bei Erreichen des Knotens (i,j) Betrag 1 auszahlt (und sonst nichts)

$Q_{0,0} = 1$
$\alpha_0 \ldots$ Wert einer zum Zeitpunkt Δt fälligen Nullkupon-Anleihe

Verfahren zur Konstruktion von Bäumen

nun $Q_{i,j}$ für $i = m + 1$ bestimmen:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t}$$

zB: $Q_{1,1} = Q_{0,0} q(0,1) e^{-\alpha_0 \Delta t}$

$q(k,j) =$ W! für die Bewegung vom Knoten (m,k) zum Knoten $(m+1,j)$

Verfahren zur Konstruktion von Bäumen

α_m so berechnen, dass die Bewertung eines zum Zeitpunkt $(m+1)\Delta t$ fälligen Zerobonds im Baum korrekt ist:

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t}$$

$n_m \ldots$ Anzahl der Knoten zu beiden Seiten des zentralen Knotens in $m\Delta t$

Zinssatz R am Knoten $(m, j) = \alpha_m + j\Delta R$

Erweiterung auf andere Modelle

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]\, dt + \sigma\, dz$$

Annahme: R folgt demselben Prozess wie r $\Rightarrow x = f(R)$

1. Schritt: Baum für x^* konstruieren mit $\theta(t) = 0$ und Anfangswert Null

2. Schritt: Knoten zum Zeitpunkt $i\Delta t$ um einen Betrag a_i verschieben

Erweiterung auf andere Modelle

Die Gleichungen zur Bestimmung von α_i und $Q_{i,j}$ anpassen:

- g Inverse zu f, sodass $g(\alpha_m + j\Delta x)$ für den Zinssatz an (m, j) – am j-ten Knoten zum Zeitpunkt $m\Delta t$ gilt
- Der Preis eines in $(m+1)\Delta t$ fälligen Zerobonds

  $$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t}$$

  Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden.
  $\alpha_0 = f(R(0))$
- wenn α_m bestimmt wurde, Berechnung der $Q_{i,j}$ für $i = m+1$

  $$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) e^{-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t}$$

Auswahl von f(r)

	$f(r) = r \Rightarrow$ Hull-White	$f(r) = lnr \Rightarrow$ Black-Karasinski
Vorteile	analytisch lösbar	r stets positiv
Nachteile	negatives r möglich	analytisch nicht lösbar

gutes Modell:

$f(r)$ so wählen, dass

- für $r < 1\%$ Zinssätze lognormalverteilt
- für $r > 1\%$ Zinssätze normalverteilt