

# Ausscheideordnungen in der Lebensversicherungsmathematik

Karin Zimmermann

17.12.2009

# Einleitung

- Modellierung des biometrischen Risikos
- Todesursache und -zeitpunkt nicht vorhersehbar
- Methoden der Stochastik

# Ein unter einem Risiko stehendes Leben

Personengesamtheit (*Kohorte* oder *Kollektiv*)

Abnahme aufgrund eines Risikos (*Todesfallrisiko*)

stochastisches Modell:

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ... Wahrscheinlichkeitsraum

$T_x \geq 0$  ... zukünftige Lebensdauer eines  $x$ -Jährigen

$\mathfrak{L}(T_x|P)$  ... Lebensdauererverteilung von  $T_x$  unter  $P$

# Verteilungsfunktion

## Definition

Die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, in Zeichen  ${}_tq_x$ , ist definiert durch die **Verteilungsfunktion**  $F_x$ .

$$F_x: [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$t \longmapsto P(T_x \leq t) =: {}_tq_x$$

# Überlebensfunktion

## Definition

Die  $t$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen, in Zeichen  ${}_t p_x$ , ist definiert durch die **Überlebensfunktion**  $S_x$ .

$$S_x: [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$t \longmapsto P(T_x > t) = 1 - F_x(t) =: {}_t p_x$$

# Sterbeintensität

## Definition

Die Sterblichkeitsintensität eines  $x$ -Jährigen im Alter  $x+t$  ist

definiert durch 
$$\Delta\Lambda_x = \frac{\Delta F_x}{1 - F_x(\cdot - 0)}.$$

$$\Lambda_x: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$t \longmapsto \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F_x(\cdot - 0)} dF_x$$

## Sterbeintensität

Sterblichkeitsintensität  $\approx$  mittlere Sterbewahrscheinlichkeit  
im Zeitintervall  $(t, t + \Delta]$   
wobei  $\Delta \rightarrow 0$

Momentansterblichkeit

# Existenz einer Lebesgue-Dichte

$$\mathcal{L}(T_x) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0, \infty))}$$

- $\exists f_x(t) = F'_x(t)$
- $\int_s^t f_x(\tau) d\tau =: {}_s|t-sq_x$
- $\lambda_x(t) = \frac{d}{dt} \Lambda_x(t)$
- $\lambda_x(t) = -\frac{d}{dt} \log S_x(t) = -\frac{d}{dt} \log {}_t p_x$

# Existenz einer Lebesgue-Dichte

Überlebensfunktion als einfache Exponentialformel:

$$S_x(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_x(\tau) d\tau\right) = {}_t p_x$$

## wichtige Größen

- $\omega_x = x + F_x^{-1}(1)$

- rechnerisches Höchstalter:

$$\text{med}(T_x) := F_x^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

- zukünftige Lebenserwartung:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &:= \mathbb{E}(T_x) \\ &= \int_0^\infty S_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_x dt \end{aligned}$$

## wichtige Größen

- relative Momentansterblichkeit:

$$\begin{aligned} \Delta q_{x+t} &= \frac{P(t < T_x < t + \Delta)}{P(T_x > t)} \\ &= \frac{\int_t^{t+\Delta} f_x(s) ds}{{}_t p_x} \stackrel{\Delta \text{ klein}}{\approx} \lambda_x(t) \end{aligned}$$

# Stationaritätsbedingung

$$P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t | T_x > s) \quad s, t, x \geq 0$$

Zusatzinformation zur Verteilung eines Neugeborenen:

mittlerweile Alter  $s$  erreicht

# Stationaritätsbedingung

- rechnerisches Höchstalter:  $\exists \omega_0 \in [0, \infty)$

$$P(T_x > 0) = \begin{cases} 1, & x < \omega_0 \\ 0, & x \geq \omega_0 \end{cases}$$

- Vereinfachungen beim Rechnen:

$${}_{s+t}p_x = P(T_x > s)P(T_x > s + t | T_x > s) = {}_s p_x {}_t p_{x+s}$$

$${}_{s+t}q_x - {}_s q_x = P(s < T_x \leq s + t) = {}_s p_x {}_t q_{x+s}$$

# Äquivalenzen zur Stationaritätsbedingung

$$(a) \iff (b)$$

(a) Stationaritätsbedingung

$$(b) \omega_x = \begin{cases} \omega_0, & x \leq \omega_0 \\ x, & x \geq \omega_0 \end{cases}$$

und

$$\Lambda_x(t) = \Lambda_0(x+t) - \Lambda_0(x), \quad x+t \leq \omega_0, \quad x < \omega_0$$



# Ein unter konkurrierenden Risiken stehendes Leben

Personengesamtheiten, deren Abnahme auf verschiedene Ursachen  $j \in U := \{1, \dots, m\}$  zurückzuführen ist

stochastisches Modell:

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ... Wahrscheinlichkeitsraum

$T_x \geq 0$  ... zukünftige Verweildauer eines  $x$ -Jährigen

$J_x \subset U$  ... zutreffende Kombination von Ausscheideursachen

$\mathfrak{L}(T_x, J_x)$  ... gemeinsame Verteilung

## Beschreibung mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten

partielle Verteilungsfunktionen:  $t \geq 0, \emptyset \neq C \subset U$

$$F_{x,C}: [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$t \longmapsto P(T_x \leq t, J_x = C)$$

$$F_{x,C} = \mathcal{L}(T_x | J_x = C) \cdot P(J_x = C)$$

## Beschreibung mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten

kumulative partielle Ausscheideintensität:  $\emptyset \neq C \subset U$

$$\Lambda_{x,C} : \mapsto \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F_x(\cdot - 0)} dF_{x,C}$$

## Beschreibung mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten

(abhängige) partielle Ausscheidewahrscheinlichkeiten:

$${}_tq_x^{(C)} := F_{x,C}(t) \quad t \geq 0, \emptyset \neq C \subset U$$

(abhängige) partielle Verbleibswahrscheinlichkeiten:

$${}_tp_x^{(C)} := 1 - {}_tq_x^{(C)} \quad t \geq 0, \emptyset \neq C \subset U$$

Ein unter einem Risiko stehendes Leben

Ein unter konkurrierenden Risiken stehendes Leben

Mehrere unter einem Risiko stehende Leben

Sterbegesetze

Verteilung mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten

Verteilung mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen den Modellen  $(T_x, J_x)$  und  $(T_C)$

# Lebensdauerverteilung

## Definition

Die zu  $(T_x, J_x)$  gehörige Lebensdauerverteilung ist die Verteilung von  $T_x$  mit der Verteilungsfunktion

$$F_x := \sum_{\emptyset \neq C \subset U} F_{x,C}$$

Ein unter einem Risiko stehendes Leben  
Ein unter konkurrierenden Risiken stehendes Leben  
Mehrere unter einem Risiko stehende Leben  
Sterbebesetze

Verteilung mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten  
Verteilung mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten  
Zusammenhang zwischen den Modellen  $(T_x, J_x)$  und  $(T_C)$

## totale t-jährige Ausscheide- und Verbleibswahrscheinlichkeit

### Definition

*Die totale t-jährige Ausscheide- und Verbleibswahrscheinlichkeit zum Modell ist gegeben durch*

$${}_tq_x := F_x(t) = \sum_{\emptyset \neq C \subset U} {}_tq_x^{(C)} \qquad {}_tp_x := 1 - {}_tq_x$$

## Existenz einer Lebesgue-Dichte

$$\mathcal{L}(T_x) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0, \infty))}$$

Ausscheidemodell mit Lebesgue-Dichten:

$$\int_s^t f_{x,C}(\tau) d\tau = P(s < T_x \leq t, J_x = C)$$

partielle Ausscheideintensitäten:

$$\lambda_{x,C} := \frac{f_{x,C}}{1 - F_x}$$

## Verteilung mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Begriff unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten geht auf Karup-Loewy zurück

Modell arbeitet nur mit einer Zufallsvariable

## Verteilung mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Motivation:

jede Ausscheideursache  $\hat{=}$  einer Lebensuhr  $T_C$ ,  $C \subset U$

$T_C$  sind unabhängig

Ein unter einem Risiko stehendes Leben  
Ein unter konkurrierenden Risiken stehendes Leben  
Mehrere unter einem Risiko stehende Leben  
Sterbebesetze

Verteilung mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten  
Verteilung mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten  
Zusammenhang zwischen den Modellen  $(T_x, J_x)$  und  $(T_C)$

# Lebensspanne

## Definition

Die Lebensspanne  $\mathcal{L}_x := \{t \in [0, \infty) \mid F_x(t - 0) < 1\} = [0, \omega - x)$   
ist die Lebensdauer die einem  $x$ -Jährigen noch verbleibt.

## Darstellung mittels unabhängiger Wahrscheinlichkeiten

### Definition

Eine Darstellung des Ausscheidemodells  $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$  mittels unabhängiger Ausfallszeiten ist ein System stochastisch unabhängiger  $[0, \infty]$ -wertiger Zufallsvariablen  $T_C$ ,  $\emptyset \neq C \subset U$ , wobei für jede Kombination  $C$  von Ausscheideursachen  $T_C$  die alleinige Wirkung dieser Kombination innerhalb der Lebensspanne  $\mathfrak{L}_x := \{t \in [0, \infty) \mid F_x(t-0) < 1\}$  beschrieben wird:

$$\Lambda_{T_C}(t) = \Lambda_{x,C}(t), \quad t \in \mathfrak{L}_x$$

## Zusammenhang zwischen den Modellen $(T_x, J_x)$ und $(T_C)$

### Satz (Karup-Loewy)

Sei  $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$  ein Ausscheidemodell mit  $m$  Ausscheideursachen, Höchstalter  $\omega_x$  Lebensdauerspanne  $\mathfrak{L}_x$ . Dann gilt:

- (i) Es existiert eine Darstellung von  $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$  mittels unabhängiger latenter Ausfallszeiten  $T_C, \emptyset \neq C \subset U$ .
- (ii) Die Verteilungsfunktion  $F_{T_C}$  von  $T_C$  ist auf  $\mathfrak{L}_x$  durch  $1 - F_{T_C}(t) = \exp(-\Lambda_{x,C}(t))$  eindeutig bestimmt.
- (iii) Ist  $T = \bigwedge_j T_j$ , dann ist die „stoppende Lebensuhr“  $J_x \in U$  fast sicher wohldefiniert und es gilt für alle  $j \in U$ :  
$$P(T \leq t, J_x = j) = F_{x,C}(t)$$

## Zusammenhang zwischen den Modellen $(T_x, J_x)$ und $(T_C)$

- (iv) Ist  $\omega_x = \infty$  und  $\Lambda_{x,C}(\infty) = \infty$ , dann kann  $T_C$  endlich gewählt werden. Mit  $\omega_x < \infty$  gilt das für alle latenten Ausfallzeiten.
- (v) Im Lebesgue-stetigen Fall  $\mathfrak{L}(T_x) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0,\infty))}$  können alle  $T_C$  Lebesgue-stetig auf  $[0, \infty)$  gewählt werden. In diesem Fall heißt  $T_C, \emptyset \neq C \subset U$  eine dominierte Darstellung von  $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$  mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten. Für die Ausscheideintensitäten gilt

$$\lambda_{T_C} = \lambda_{x,C}$$

## Interpretation Karup-Loewy

- ad (i) Es gibt immer eine Darstellung des Ausscheidemodells mit Hilfe der latenten Ausfallzeiten
- ad (ii) Die Verteilungsfunktionen sind eindeutig.
- ad (iii) Es gibt also keine Mehrfachübergänge. Es tritt immer nur eine Ursache zu einem Zeitpunkt ein. Und die Verteilung von  $(T_x, J_x)$  (Ausscheidemodell) und  $(T, J)$  (stoppende Lebensuhr = Auslöser) stimmen überein.
- ad (iv) Bei endlichem Höchstalter sind alle Ausfallzeiten endlich.
- ad (v) Die Ausscheideintensitäten  $\lambda$  der latenten Ausfallzeiten stimmen mit denen im Ausscheidemodell überein.

## Folgerung

Sei  $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$  ein Ausscheidemodell mit  $m$  identifizierbaren Ausscheideursachen, also

$$P(\#J_x = 1) = 1$$

Dann existieren stochastisch unabhängige Zufallsvariablen  $T_j \geq 0, j \in U$ , sodass

$$\Lambda_{T_j}(t) = \Lambda_{x,j}(t), \quad t \in \mathfrak{L}_x$$

## Folgerung

Die Verteilungsfunktion  $F_{T_j}$  von  $T_j$  ist auf  $\mathcal{L}_x$  eindeutig bestimmt:

$$1 - F_{T_j}(t) = \exp(-\Lambda_{x, \{j\}}^{(c)}(t)) \cdot \prod_{\tau \geq t} (1 - \Delta \Lambda_{x, \{j\}}(\tau))$$

## Folgerung

Im Lebesgue-stetigen Fall können alle  $T_j$  Lebesgue-stetig auf  $[0, \infty)$  gewählt werden und für die Ausscheideintensitäten gilt

$$\lambda_{T_j} = \lambda_{x, \{j\}} \quad \text{f.ü. auf } \mathcal{L}_x$$

# unabhängige partielle Verbleibs- und Ausscheidewahrscheinlichkeiten

Sei  $\mathcal{L}(T_x, J_x)$  ein Ausscheidemodell mit mehreren Ausscheidursachen und  $(T_C)_{\emptyset \neq C \subset U}$  eine Darstellung mittels unabhängiger latenter Ausfallszeiten. Dann heißen die durch die Exponentialformeln

$${}_t p_x^{(c)} := 1 - {}_t q_x^{(c)} := P(T_C > t) = \exp(-\Lambda_{x,C}^{(c)}(t)) \cdot \prod_{\tau \geq t} (1 - \Delta \Lambda_{x,C}(\tau))$$

definierten Wahrscheinlichkeiten  ${}_t p_x^{(c)}, {}_t q_x^{(c)}$  die *unabhängigen partiellen Verbleibs- und Ausscheidewahrscheinlichkeiten*.

## Stationaritätsbedingung

$$P(T_{x+s} > t, J_{x+s} = C) = P(T_x > s + t, J_x = C | T_x > s)$$

$$s, t, x \geq 0, \emptyset \neq C \subset U$$

## Mehrere unter einem Risiko stehende Leben

$m$  *unabhängige* Zufallsvariablen  $T_{x_1}, \dots, T_{x_m} \geq 0$   
 $x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}$

nur unter dem Todesfallrisiko stehende Gruppe

Stationaritätsbedingung erfüllt

## Gruppenerlöschung beim ersten Ausscheiden

Gruppe aktiv, solange **alle** Personen am Leben sind

*zukünftige gemeinsame Lebensdauer* der Gruppenmitglieder ist

$$T_{x_1 \dots x_m} := \bigwedge_{i=1}^m T_{x_i}$$

*t-jährige gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit* gilt

$${}_t p_{x_1 \dots x_m} := P(T_{x_1 \dots x_m} > t) = \prod_{i=1}^m P(T_{x_i} > t) = \prod_{i=1}^m {}_t p_{x_i}$$

## Gruppenerlöschung beim ersten Ausscheiden

*t*-jährige Ausscheidewahrscheinlichkeit

$${}_t q_{x_1 \dots x_m} := F_{x_1 \dots x_m} = 1 - {}_t p_{x_1 \dots x_m} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - {}_t q_{x_i})$$

*Verteilungsfunktion der zukünftigen gemeinsamen Lebensdauer*

$$F_{x_1 \dots x_m} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, m\}} F_{x_{i_1}}(t) \dots F_{x_{i_k}}(t)$$

*kumulative gemeinsame Ausscheideintensität* ist definiert durch

$$\Lambda_{x_1 \dots x_m}(t) := \int_{[0, t]} \frac{1}{1 - F_{x_1 \dots x_m}(\cdot - 0)} dF_{x_1 \dots x_m}$$

## Gruppenerlöschung in Abhängigkeit der Lebenden

Gruppe aktiv, solange mindestens  $l$  der  $m$  Individuen am Leben sind

$${}_t p_{x_1 \dots x_m}^{[l]} := P(T_{x_1 \dots x_m}^{[l]} > t)$$

genau  $l$  der  $m$  unabhängigen Personen überleben die Zeit  $t$

$${}_t p_{x_1 \dots x_m}^{[l]} := P(T_{x_1 \dots x_m}^{[l]} > t, T_{x_1 \dots x_m}^{[l+1]} \leq t)$$

## Satz (Schuette-Nesbitt-Formel)

Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathfrak{A}$  und eine nur von der Anzahl der eingetretenen Ereignisse  $N(\omega) := \#\{i \mid \omega \in A_i\}$  abhängige Zufallsvariable

$$C = \sum_{i=0}^m c_i \cdot \mathbb{1}_{\{N=i\}}$$

gegeben.

Dann gilt für  $c := (c_0, \dots, c_m)^T$ ,  $S_0 := 1$

$$E(C) = \sum_{k=0}^m (\Delta^k c)_0 \cdot S_k$$

wobei  $E(c_k) := c_{k+1}$  der „Backshiftoperator“ ist und

$$S_k := \sum_{\{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, m\}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

und der „Differenzenoperator“

$$\Delta : \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^m$$

$$\Delta(c_0, \dots, c_m)^T := (c_1 - c_0, \dots, c_m - c_{m-1})^T$$

so definiert sind.

aus der Schuette-Nesbitt-Formel folgt:

$${}_tS_k := S_k = \sum_{\{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, m\}} {}_tP_{x_{i_1}} \cdots {}_tP_{x_{i_k}}$$

$$\begin{aligned} {}_tP_{x_1 \dots x_m}^l &:= P(T_{x_1 \dots x_m}^l > t) \\ &= \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^k \binom{k+l-1}{k} \cdot {}_tS_{k+l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_tP_{x_1 \dots x_m}^{[l]} &:= P(T_{x_1 \dots x_m}^l > t, T_{x_1 \dots x_m}^{l+1} \leq t) \\ &= \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^k \binom{k+l}{k} \cdot {}_tS_{k+l} \end{aligned}$$

## Gruppenerlöschung beim letzten Ausscheiden

Gruppe aktiv, solange genau eine Person am Leben ist

$${}_t p_{x_1 \dots x_m}^{[1]} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} k \cdot {}_t S_k$$

$${}_t p_{x_1 \dots x_m} := {}_t p_{x_1 \dots x_m}^1 = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot {}_t S_k$$

# Sterbegesetze

Philosophen im 17. und 18. Jahrhundert

Versuche, die Sterblichkeit in einfachen Formeln zu beschreiben

## De Moivre

$$T_x \sim \text{Uni}(0, \omega - x)$$

Dichte: 
$$g_x(t) = \frac{1}{\omega - x} \text{ für } t \in [0, \omega - x]$$

$${}_t p_x = P(T_x > t) = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}$$

$$\Lambda_x(t) = -\log {}_t p_x = \log(\omega - x) - \log(\omega - x - t)$$

$$\lambda_x(t) = \frac{d}{dt} \Lambda_x(t) = \frac{1}{\omega - x - t}$$

## Gompertz

exponentieller Anstieg der Sterblichkeitsintensität

$$\lambda_x(t) = B \cdot c^{x+t} \quad \text{mit Parametern } B > 0, c \geq 1$$

$$\Lambda_x(t) = \int_0^t \lambda_x(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{B}{\log c} (c^{x+t} - c^x), & c \neq 1 \\ B t, & c = 1 \end{cases}$$

$${}_t p_x = \begin{cases} \exp\left(\frac{B}{\log c} (c^x - c^{x+t})\right), & c \neq 1 \\ \exp(-Bt), & c = 1 \end{cases}$$

## Makeham

exponentielles Wachstum der Ausscheideintensität und  
altersunabhängigem Anteil („Grundrisiko“)

$$\lambda_x(t) = A + B \cdot c^{x+t}$$

$$\Lambda_x(t) = At + \frac{B}{\log c} (c^{x+t} - c^x)$$

$${}_t p_x = \exp \left( -At + \frac{B}{\log c} (c^x - c^{x+t}) \right)$$

## Weibull

$$\lambda_0(s) = \frac{c}{\alpha^c} s^{c-1}$$

$$\lambda_x(t) = \frac{c}{\alpha^c} (x + t)^{c-1}$$

$$\Lambda_x(t) = \int_0^t \lambda_x(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha^c} ((x + t)^c - x^c)$$

$${}_t p_x = \exp\left(-\frac{1}{\alpha^c} (x^c - (x + t)^c)\right)$$

# Gumbel

technisch einfacher Verteilung von  $\log T$  zu betrachten

$X$  ist *Gumbel-verteilt* mit Parametern  $m \in \mathbb{R}$  und  $c > 0$

$$\Leftrightarrow P(X \leq x) = \exp(-e^{-c(x-m)})$$

Zusammenhang mit Weibull-Modell:

$$T \sim \text{Weibull}(a, b) \Leftrightarrow -\log T \sim \text{Gumbel}(-\log a, b)$$

**Vielen Dank!**