Zinstheorie in der Versicherung

Zvonarich Marko

16.12.2009

Gesetz der Großen Zahlen

- erste Version des Gesetzes vom Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli
- wichtige Rolle im Versicherungsgeschäft
- erlaubt ungefähre Einschätzung des Schadenverlaufes
- Gesetz nimmt an Genauigkeit zu, je größer die Menge der Versicherten ist
- bei Großereignissen (Naturkatastrophen etc.) teilweise unbrauchbar

Porfolio eines Versicherten

- Betrachten ein Portfolio von l_x identischen n-jährigen Erlebensfallverträgen mit VS 1. l_{x+t} für $t \geq 0$ ist die erwartete Anzahl der Lebenden mit $x + t$ Jahren.
- Standardannahmen: Versicherungsnehmer l_x im Alter x und zum Zeitpunkt 0 sind die Restlebenszeiten gegeben durch $T^1, ..., T^{l_x}$
- Alle haben die gleiche Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+u)\,du\right) $$

Porfolio eines Versicherten

- Sterblichkeitsintensität μ ist deterministische Funktion
- Einführung des Indikators $I_{T^i > n}$, der i-te Versicherungsnehmer überlebt n- Jahre
- Das Verhältnis zwischen den Überlebenden zum Zeitpunkt n und Versicherungsnehmern l_x die den Vertrag zum ZP 0 abgeschlossen haben schreibt man:

$$\frac{1}{l_x} \sum_{i=1}^{l_x} I_{T^i > n}$$

dies konvergiert wegen des *Gesetzes der Großen Zahlen* gegen:

$$E[I_{T^1 > n}] = P(T^1 > n) =_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Porfolio eines Versicherten

- Die Unabhängigkeit der VN ist ausschlaggebend für die Konvergenz
- Unterschied zwischen unsystematischen - und systematischen Sterberisiko:
- Systematisches Risiko: Hängt mit den Konsequenzen der stochastischen Änderung in der Sterbeintensität zusammen, kann nicht eliminiert werden
- Unsystematisches Risiko: Hängt mit der versicherten Lebensdauer zusammen, kann mit der Vergrößerung des Portfolios vermieden werden

Aufzinsungsfaktoren

Einführung folgender Faktoren:

- i konstante Zinsrate
- $r = \ln(1+i)$ Zinsintensität, kann als Zinsrate für stetige Verzinsung interpretiert werden
- $e^r = (1+i)$ einjährige Aufzinsungsfaktor
- $e^{rt} = (1+i)^t = S(t)$ t-jährige Aufzinsungsfaktor entspricht der Differentialgleichung: $\frac{d}{dt}S(t) = rS(t)$ mit der Anfangsbedingung $S(0) = 1$

Diskontierungsfaktoren

- $v = e^{-r}$ einjährige Diskontierungsfaktor
- $v^t = (1+i)^{-t} = e^{-rt}$ t - jährige Diskontierungsfaktor
- $e^{-rt} = S(t)^{-1}$

Aufzinsungsfaktoren

- anderer Fall: i nicht konstant
- Benötigen die Faktoren $i(s)$ und $r(s)$, die der jährlichen Zinsrate bzw. der Zinsintensität im Jahr s entsprechen
- nun gilt durch $(1 + i(s)) = e^{r(s)}$, dass

$$S(t) = (1 + i(s))...(1 + i(t)) = \exp(\sum_{s=1}^{t} r(s))$$

Aufzinsungsfaktoren

- Angenommen der Zinssatz ändert sich öfters als einmal im Jahr, wird folgender Faktor benötigt:
- $r(u)$ ist die Zinsintensität zu einer bestimmten Zeit u
- Den neuen Aufzinsungsfaktor erhalten wir durch: $\frac{d}{dt}S(t) = r(t)S(t)$
- Für das Anfangswertproblem $S(0) = 1$ erhalten wir nun

$S(t) = \exp(\int_0^t r(u), du)$ als Aufzinsungsfaktor bzw.
$S(t)^{-1} = \exp(-\int_0^t r(u), du)$ als Diskontierungsfaktor

Verlust des Versicherers

- betrachten nun ein Portfolio von l_x n - jährigen Erlebensversicherungen, die mit einer Einmalprämie $\pi(0)$ zum ZP 0 bezahlt werden
- Der Barwert der Leistung zur Zeit 0 ist $S(n)^{-1} l_{x+n}$, und die Prämie ist gleich $l_x \pi(0)$
  Der Barwert des Verlustes kombiniert mit dem Portfolio ist nun gegeben als:

$$L = l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0)$$

- Die Prämie ist angemessen falls $L = 0$ ist.

Verlust des Versicherers und Äquivalenzprinzip

- Für $S(n)$ deterministisch, gilt für die Äquivalenzprämie mit $S(t) = \exp(\int_0^t r(u), du)$:

$$\pi(0) = \frac{l_{x+n}}{l_x} \exp(-\int_0^n r(u)du) = {}_np_x \exp(-\int_0^n r(u)du)$$

die dem Barwert der Leistung entspricht

Verlust des Versicherers und Äquivalenzprinzip

- Sterberisiko ist vermeidbar, falls die versicherten Leben unabhängig sind und man die Größe des Portfolios anhebt.

- Die Beseitigung des Diskontierungsfaktors $S(n)^{-1}$ ist jedoch nicht möglich falls $S(n)$ zufällig ist.

- Vermeidung des Risikos der zukünftigen Entwicklung des Zinssatzes durch: Nullkuponanleihen (Zero Coupon Bonds).

Nullkuponanleihe

- Es handelt sich um verzinsliches Wertpapier in Form einer Anleihe
- keine laufenden Zinsenauszahlung, am Ende der Laufzeit erfolgt eine Auszahlung, Gewinn aus gestiegenen Verkaufspreis am Ende der Laufzeit

Nullkuponanleihe

Eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T ist ein Vertrag, der eine Einheit zum Zeitpunkt T ausbezahlt. Der Preis im Intervall $t \in [0, T]$ ist gegeben als $P(t, T)$ mit $P(t, t) = 1$

general Bond

- Eine Anleihe, ausgestellt zum Zeitpunkt τ_0 mit Zahlungen $c_0, \ldots, c_n$ zu den Zeiten $\tau_1 < \ldots < \tau_n$. Der Wert einer solchen Anleihe zur Zeit $t \geq \tau_0$ ist gleich

$$P(t) = \sum_{i:\tau_i > t} P(t, \tau_i) c_i$$

- dies ist der einzige Preis, der nicht zur Möglichkeit eines risikofreien Gewinnes führt

Beispiele

- **Annuity bond** erhält man falls:

$$\text{man setzt } c_k = c \text{ also konstant für alle } k = 1 \dots n$$

- **Bullet bond** erhält man für L eine **simple rate**, und ein K falls:

$$\begin{aligned} c_k &= L(\tau_k - \tau_{k-1})K \text{ für } k = 1 \dots n-1 \\ \text{und } c_n &= L(\tau_n - \tau_{n-1})K + K \text{ für } k = n \end{aligned}$$

- Eigentümer zum ZP τ_k die einfache Zinsrate $L(\tau_k - \tau_{k-1})$ auf K für $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, zum ZP τ_n wird K mit dem Zins für $[\tau_{n-1}, \tau_n]$ zurückgezahlt.

Definition

- Hedgegeschäft: Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken z.B.Wechselkursschwankungen oder Veränderungen des Zinssatzes
- Dem Hedgegeschäft liegt die Absicht zugrunde, einen gegenwärtig als annehmbar empfundenen Preis wie z.B: einen Zinssatz für die Zukunft festzulegen
- Ein perfekter Hedge eliminiert jegliches Risiko, ist aber in der Praxis fast unmöglich.

Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen

- Angenommen, der Versicherer investiert zum ZP 0 in $l_x \kappa$ Einheiten einer n-Anleihe. Der Barwert des Verlustes des Versicherers vom Portfolio von l_x Erlebensfallversicherungen ist gegeben als:

$$\tilde{L} = (l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0)) + l_x \kappa (P(0,n) - 1 \cdot S(n)^{-1}))$$

Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen

- 1.Teil der Gleichung entspricht dem Barwert des Verlustes ohne die n-Anleihen, und der 2.Teil den Barwert des Verlustes zum ZP 0 vom Kauf von $l_x\kappa$ n-Anleihen um den Preis $P(0,n)$ falls man die Terme etwas umordnet erhält man:

$$\tilde{L} = (l_{x+n} - l_x\kappa)S(n)^{-1} + l_x(\kappa P(0,n) - \pi(0))$$

Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen

- 1. Teil ist gleich 0 falls $\kappa = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_np_x$
  2. Teil gleich 0 falls $\pi(0) = {}_np_x P(0, n)$ wobei $\pi(0)$ die angemessene Prämie ist, der Preis zum ZP 0 einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit n mult. mit Überlebenswahrscheinlichkeit
- Im Portfolio mit l_x Versicherungsnehmern sollte der Versicherer $l_x \; {}_np_x = l_{x+n}$ Anleihen kaufen, was wiederum der erwarteten Anzahl von Überlebenden entspricht

Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen

- Der Wert der Anleihe zur zukünftigen Zeit t die zum Zeitpunkt 0 gekauft wurde ist gegeben durch:

$$l_{x\,n}p_x P(t,n) = l_{x+n} P(t,n)$$

- Wiederholung des Arguments zur Ermittlung des Preises zur Zeit t für jeden der l_{x+t} übrigen Versicherungsnehmer. Marktwert zur Zeit t der garantierten Zahlungen, verbunden mit diesen l_{x+t} Erlebensversicherungsverträgen gegeben durch:

Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen

$$l_{x+t} \ {}_{n-t}p_{x+t} P(t,n) = l_{x+n} P(t,n)$$

- Dies zeigt nun, dass der Marktwert der Verpflichtungen genau gleich ist, wie der Wert der assets zu einer Zeit für jede Entwicklung des Wertes der Nullkuponanleihen.

Hedging eines Portfolios von Risikoversicherungen

- Betrachten wir ein Portfolio von l_x Risikoverträgen, wobei die Anzahl der Toten im Jahr t, also $x+t$- jährigen betrachtet zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch:

  $d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}$, wobei die Versicherungssumme am Ende des Jahres zu entrichten ist.

- Das Unternehmen muss in Nullkuponanleihen investieren, genauer zum ZP 0 in $l_x\kappa(t)$ - t Anleihen mit dem Preis $P(0,t)$.

Hedging eines Portfolios von Risikoversicherungen

Der Verlust ist nun gegeben durch:

$$\tilde{L} = \left(\sum_{t=1}^{n} d_{x+t-1} S(t)^{-1} - l_x \pi(0)\right) + l_x \sum_{t=1}^{n} \kappa(t)\left(P(0,t) - 1 \cdot S(t)^{-1}\right)$$

Hedging eines Portfolios von Risikoversicherungen

- Durch Umformen erhält man

$$\tilde{L} = \sum_{t=1}^{n} (d_{x+t-1} - l_x \kappa(t)) S(t)^{-1} + l_x (\sum_{t=1}^{n} \kappa(t) P(0,t) - \pi(0))$$

- wobei wieder der erste bzw. der zweite Teil 0 sind, falls:

$$\kappa(t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = {}_{(t-1)|1}q_x = {}_{t-1}p_x \ q_{x+t-1}$$
$$\text{bzw.}\pi(0) = \sum_{t=1}^{n} {}_{(t-1)|1}q_x P(0,t)$$

Yield curves

- Der laufend zusammengesetzte **Nullkupon - yield** (spot rate) $R(t, T)$für den Zeitraum $[t, T]$ ist definiert als:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T)$$

- nun folgt, dass der Preis der Nullkuponanleihe in Form des laufend zusammengesetzten **Nullkupon - yields** geschrieben werden kann:

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)(T - t))$$

Yield curves

- Diese Gleichung kann als Diskontierungsfaktor im Intervall $[t, T]$, zum konstanten Zinssatz $R(t, T)$ interpretiert werden
- Die Zinsintensität hängt vom Preis der Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t ab.
- Die Zinsstruktur zum Zeitpunkt t (die **zero coupon yield curve**) ist gegen durch die Abbildung:

$$h \mapsto R(t, t + h)$$

Definition

- Die **forward rate** (Terminzins) ist jener Zinssatz, der zur Zeit t (heute) für eine zukünftige Investition zur Zeit T' vereinbart wird und zur Zeit T endet. Wir betrachten also Zeit von $0 \leq t \leq T' \leq T$.
- Die laufend zusammengesetzte **forward rate** zum Zeitpunkt t für den Zeitraum $[T', T]$ ist definiert durch:

$$f(t, T', T) = -\frac{\log P(t,T) - \log P(t,T')}{T - T'}$$

Definition

- Das Verhältnis zum Zeitpunkt t zwischen dem Preis einer T-Anleihe und einer T' Anleihe ist gegeben durch:

$$\frac{P(t,T)}{P(t,T')} = \exp(-f(t, T', T)(T - T'))$$

Sofortige forward rate

- Die sofortige **forward rate** zum Zeitpunkt t für die Zeit T ist definiert als:

$$(t, T) = -\frac{d}{dT} \log P(t, T)$$

- Durch Umformungen erhalten wir:

$$P(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, \tau) d\tau)$$

- Man sieht nun den Zusammenhang zwischen der sofortigen **forward rate** und der Nullkuponanleihe zum ZP t.

Definition

- Als Alternative zu den laufenden zusammengesetzten Zinsen, betrachten wir die **simple forward rate** und **simple spot rate** (einfache Termin - und Kassazinsen)
- Unterschied zu laufenden zusammengesetzten Zinsen: ehemalige Zinsen werden in der Berechnung der neuen Zinsen nicht berücksichtigt
- Für Kapital P zum ZP 0 mit einfacher Zinsrate L für einen Zeitraum $[s, t]$ ergibt sich der Zins: $PL(t-s)$

Definition

- Die **simple spot rate** oder LIBOR **spot rate** ist gegeben durch:

$$\mathrm{L}(t, T) = -\frac{P(t,T)-1}{(T-t)P(t,T)}$$

und die **simple forward rate** durch für den Zeitram $[T', T]$ zum Zeitpunkt t

$$L(t, T', T) = -\frac{P(t,T)-P(t,T')}{(T-T')P(t,T)}$$

Definition

- nun folgt aus der Definition der **simple spot rate**:

$$L(t, T)(T - t)P(t, T) = 1 - P(t, T)$$

- Der rechte Teil ist genau der Ertrag im Zeitraum $[t, T]$ vom Kauf einer T-Anleihe mit Preis t zum ZP T, und vom Einlösen des Betrages 1 zum ZP T
- Der linke Teil ist jener Anteil, der im Zeitraum $[t, T]$ in Kombination mit der Investition von $P(t, T$ unter der konstanten **simple rate** $L(t, T)$ anfällt.

Marktwert garantierter Zahlungen

- Wir betrachten n -jährige Erlebensversicherung mit Erlebensbetrag $b^a(0)$
- falls Tod vorher eintritt b^{ad}, stetige Prämie π
- Vertrag beginnt zum ZP 0, also im Alter x des Versicherungsnehmers.
- Marktwert der Zahlungen für den Überlebensfall:

$$b^a(0)P(t,n)_{n-t}p_{x+t}$$

- Marktwert für Ablebensfall:

$$b^{ad}\int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t}\mu(x+s)ds$$

Marktwert garantierter Zahlungen

- Marktwert für zukünftige Prämie:

$$\pi \int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t} ds$$

- falls man diese drei Ausdrücke zusammensetzt gilt folgender Marktwert:

$$V^g(0,t) = b^a(0)P(t,n)_{n-t}p_{x+t} + \int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t}(\mu(x+s)b^{ad} - \pi)ds$$

- wobei $V^g(t)$ der Marktwert der garantierten Zahlungen zum ZP t ist

Marktwert garantierter Zahlungen

- für r und μ deterministisch gilt für Nullkuponanleihe:

$$P(t,s) = \exp(-\int_t^s r(\tau)d\tau)$$

- falls wir oben einsetzen:

$$V^g(t,u) = b^a(t)\exp(-\int_u^n r(\tau)d\tau)\ {}_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp(-\int_u^s r(\tau)d\tau)\ {}_{s-u}p_{x+u}(\mu(x+s)b^{ad} - \pi)ds$$

Definition

- Darunter versteht man Preise, die keine Arbitrage Möglichkeit bieten.
- Die Preise der gehandelten Assets sollen keine risikofreien Gewinne ermöglichen
- Asset steht in diesem Kapitel für Aktien, Anleihen sogar für Sparkonten

Definition

- Betrachten zwei gehandelte Assets: S^0 und S^1, deren Wert zum ZP 0 übereinstimmt, daher: $S^0(0) = S^1(0)$ und angenommen wir wissen mit Wahrscheinlichkeit 1, dass $S^0(T) \geq S^1(T)$ und $P(S^0(T) > S^1(T)) > 0$
- kaufe nun zum ZP 0 eine Einheit des 0. Assets, und verkaufe zugleich eine Einheit des 1.Assets
- dies führt nun zum Fall, dass $V = S^0(T) - S^1(T) \geq 0$ wobei gilt: $P(V \geq 0) = 1$ und $P(V > 0) > 0$

Definition

- Betrachten in diesem Kapitel einen Finanzmarkt mit zwei gehandelten Assets, deren Preise $S^0(t), S^1(t)$ zum ZP t bekannt sind
- die Preise zum ZP u sind nicht bekannt, und werden durch die Zufallsvariable $(S^0(u), S^1(u))$ beschrieben
- der Werteprozess für den Asset i in diskreter Zeit ist gegeben durch: $S^i = (S^i(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ und ist ein **stochastischer Prozess**
- man führt eine Filtration $(\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$)um die Übersicht der Information zum ZP t zu behalten. Für $t < u$ gilt: $\mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}(u)$

gehandelte Assets und Information

- mathematisch gesehen ist eine Filtration eine wachsende Folge von σ - Algebren
- S^i heißt **adaptiert** zur Filtration $\mathcal{F}$ falls der Wert des i-ten Assets zum ZP t Teil der Information $\mathcal{F}(t)$ ist.
- $S^i(t)$ ist dann $\mathcal{F}(t)$ messbar
- ein Stochastischer Prozess heißt **vorhersehbar** falls sein Wert zum ZP t bereits zum ZP $t-1$ bekannt ist
- wir sehen nun, dass jeder **vorhersehbar** Prozess **adaptiert** ist

gehandelte Assets

- Angenommen $S^0(t)$ ist ein Sparkonto mit periodischem Zinssatz $i(t)$ für $(t-1]$, so dass
$$S^0(t) = (1+i(1)) \cdot \quad \cdots \quad \cdot (1+i(t))$$
wobei $(i(t))_{t \in \{1,\dots,T\}}$ auch ein stochastischer Prozess ist
- Nun könnte zum Beispiel S^1 der Wert einer Nullkuponanleihe sein. Den Prozess $S^0(t)$ können wir als Diskontierungsfaktor festlegen, und können weiters die diskontierten Preis-Prozesse $X(t)$ und $X^0(t)$ einführen, wobei:
$$X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)} \quad \text{und} \quad X^0(t) = \frac{S^0(t)}{S^0(t)} = 1$$

Investmentstrategie

- Eine **Investmentstrategie** ist ein zweidimensionaler Prozess $h = (h^0, h^1)$, so dass $h^1(t)$ vorhersehbar, und $h^0(t)$ adaptiert ist
- Das Paar $h(t) = (h^0(t), h^1(t))$ nennt man das Portfolio zur Zeit t
- Das Portfolio zum ZP $t-1$ ist definiert als:
  $h(t-1) = (h^0(t-1), h^1(t-1))$ wobei
  $h^1(t-1)$ Nullkuponanleihen sind und ein Kapital auf dem Sparkonto mit einem Wert von $h^0(t-1)S^0(t-1)$

Werteprozess

- Der diskontierte Wert des Portfolios $h(t-1)$ zum ZP $t-1$, wobei S^0 der Diskontierungsfaktor ist gegeben als:

$$V(t-1,h) = S^0(t-1)^{-1}(h^1(t-1)S^1(t-1) + h^0(t-1)S^0(t-1)) \\ = h^1(t-1)X(t-1) + h^0(t-1)$$

- wobei der Prozess $(V(t,h))_{t\in\{0,1,\ldots,T\}}$ als der diskontierte Werteprozess bezeichnet wird

Kostenprozess

- Cost process wird eingeführt um die Veränderung des Werteprozesses zu beschreiben.
- Er wird für die Konstruktion von Risiko-minimierenden Strategien eingesetzt. Man geht folgendermaßen vor:
- Betrachten das Intervall $(t-1, t]$, nach dem ZP $t-1$ wird das Portfolio $h(t-1)$ angepasst, sodass der Hedger nun $h^1(t)$ Anleihen besitzt. Also auft man $h^1(t) - h^1(t-1)$ Anleihen. Dies führt zu den diskontierten Kosten:

Kostenprozess

- Dies führt zu den diskontierten Kosten:

$$(h^1(t) - h^1(t-1))X(t-1)$$

- Das neue Portfolio $(h^0(t), h^1(t-1))$ wird bis zum ZP t gehalten. Erhält den Gewinn von:

$$h^1(t)(X(t) - X(t-1))$$

Kostenprozess

- Schließlich wird das Sparkonto $h^0(t-1)S^0(t)$ auf $h^0(t)S^0(t)$ geändert, woraus sich die zusätzlichen diskontierten Kosten von $h^0(t) - h^0(t-1)$ ergeben.
- Die Änderung im Wert des Investmentportfolios kann geschrieben werden als:

$$V(t,h) - V(t-1,h) = (h^1(t) - h^1(t-1))X(t-1) \\ +h^1(t)(X(t) - X(t-1)) + (h^0(t) - h^0(t-1)$$

- Der erste und letzte Term stehen für die Kosten des Hedgers, während der zweite die Gewinne im Zeitraum $(t-1, t]$ repräsentiert

Kostenprozess

- Der Kostenprozess der Strategie h ist nun:

$$C(t,h) = V(t,h) - \sum_{s=1}^{t} h^1(s)\Delta X(s)$$

- wobei wir benutzt haben, dass $\Delta X(s) = X(s) - X(s-1)$. Der Kostenprozess ist definiert als Wert der Strategie, verringert durch das Handeln von Gewinnen. Der Kostenprozess erfüllt folgende Relation:

$$V(t,h) = V(t-1,h) + h^1(t)(X(t) - X(t-1)) + (C(t,h) - C(t-1,h))$$

Self-financing strategies und Arbitrage

- man versteht darunter selbstfinanzierende Strategien, die durch Veränderungen im **value process** - Werteprozess durch das Handeln von Gewinnen erzeugt werden, dh. das Portfolio während der Periode nicht durch Kapitalab- oder zuwanderung beeinflusst wird. Daraus folgt

$$V(t,h) = V(0,h) + \sum_{s=1}^{t} h^1(s)\Delta X(s)$$

Self-financing strategies und Arbitrage

- Kostenprozess ist konstant und gleich $V(0, h)$ Dies charakterisiert die Selbstfinanzierungsstrategien in Form von einem Kostenprozess
- Arbitrage ist nun eine Selbstfinanzierungsstrategie h, sodass

$$V(0, h) = 0, \quad P(V(T, h) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad P(V(T, h) > 0) > 0$$

Äquivalente Martingalmaße

- Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß gibt.
- Martingal:
  Sei X der diskontierte Preisprozess, das Verhältnis zwischen S^1 und S^0 investiert zum ZP 0. Der erwartete Preis der Anleihe zum ZP u ist $E^Q[X(u)]$ für das Wahrscheinlichkeitsmaß Q
- Der erwartete, diskontierte Preis für eine Anleihe zum ZP u unter Q ist gegeben durch:

$$E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)]$$

Äquivalente Martingalmaße und Arbitragefreiheit

- Der Prozess wird nun **Martingal** genannt, gilt:

$$E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t) \forall t \leq u$$

- falls X ein **Markov Prozess** ist gilt:

$$E^Q[X(u)|X(t)] = X(t)$$

- Falls $X(t)$ und $X(u)$ diskontierte Preise einer Anleihe zur Zeit t und zur Zeit u sind und wenn Q ein Martingalmaß ist,so sind die Preise für t und u identisch.
- Ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist äquivalentes Martingalmaß, falls X ein Martingal unter Q ist.
- Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes, schließt die Möglichkeit zur Arbitrage aus.

Modell für die spot rate

- Angenommen die Veränderung bei einem Kassakurs während eines kleinen Zeitintervalls $(t, t + \Delta t]$ kann approximiert werden:

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \Delta r(t) \approx v(t, r(t))\Delta t + \sigma(t, r(t))\Delta \bar{W}(t)$$

- Wobei $\bar{W}$ eine Brown'sche Bewegung ist. Also hat sie unabhängige, normalverteilte Inkremente mit $\bar{W}(t) - \bar{W}(s) \sim N(0, t - s)$
- und $\Delta \bar{W}(t)$ als $\bar{W}(t + \Delta t) - \bar{W}(t)$ definiert ist

Modell für die spot rate

- Die obige Approximation ist nur für kleine Zeitintervalle gültig:

$$dr(t) = v(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}(t)$$

dies können wir integrieren und kommen auf:

$$r(t) = r(0) + \int_0^t v(s, r(s))ds + \int_0^t \sigma(s, r(s))d\bar{W}(s)$$

- Das Sparkonto ist definiert falls $S^0(0) = 1$ und $dS^0(t) = r(t)S^0(t)dt$ mit:

$$S^0(t) = \exp(\int_0^t r(\tau)d\tau)$$

Modell für die spot rate

- Wir haben gezeigt: Die Preise der Nullkuponanleihe gleich dem erwarteten Wert unter einem äquivalenten Martingalmaß Q berechnet werden können.
- Unter dem Martingalmaß Q nehmen wir an dass:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

- nun ist der Preis einer Nullkuponanleihe $P(t, T)$ gegeben durch:

$$P(t, T) = E^Q[\frac{S^0(t)}{S^0(T)}|\mathcal{F}(t)] = E^Q[\exp(-\int_t^T r(\tau)d\tau)|\mathcal{F}(t)]$$

Affine Modelle

- Zinssatz-Modelle der Form
  $dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$ sind affin, falls:

$\mu(t, r(t)) = \alpha(t)r(t) + \beta(t)$ und
$\sigma(t, r(t)) = \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)}$

- wobei α etc. bekannt sind, also affine Funktionen von r für fixes t
- Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T ist:

Affine Modelle

$$P(t,T) = E^Q[\exp(-\int_t^T r(\tau)d\tau)|F(t)] = \exp(A(t,T) - B(t,T)r(t))$$

- A und B lösen folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t,T) + \alpha(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)(B(t,T))^2 = -1,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}A(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)(B(t,T))^2$$

Beispiele

- Vasicek und Cox-Ingersoll-Ross Modell

Vasicek

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

Cox-Ingersoll-Ross Modell

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$