

Seminararbeit aus Finanz- und Versicherungsmathematik

optimale Rückversicherung

Magdalena Ettlstorfer

Wintersemester 2009/2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Gründe und Formen für eine Rückversicherung	2
2.1	Arten der Rückversicherung	3
2.1.1	fakultative Rückversicherung	3
2.1.2	obligatorische Rückversicherung	3
2.2	Formen der proportionalen Rückversicherung	3
2.3	Formen der nichtproportionalen Rückversicherung	4
3	Entscheidung über Form und Umfang der Risikoteilung	5
3.1	Modelle zur Bewertung von Risikoteilungen	6
3.2	Einseitige Optimierung bei gegebenen Transaktionskosten	9
3.3	Abstaffelung des Selbstbehaltes	15
3.4	Suboptimale und pareto-optimale Risikoteilung	17
4	Fazit	21

1 Einleitung

Ein Versicherungsunternehmen, mit dem der Versicherungsnehmer einen Vertrag abgeschlossen hat, gibt einen Teil des Risikos aus dem Versicherungsverhältnis mit dem Versicherungsnehmer an ein anderes Versicherungsunternehmen (=Rückversicherer) zu einem entsprechenden Prämienanteil ab.

Dadurch schützt sich der Erstversicherer vor der Gefahr nicht kalkulierbare Schäden zu erleiden. Auch gibt die Rückversicherung dem Erstversicherer die Möglichkeit Risiken zu versichern, die wegen ihrer Höhe und Gefährlichkeit seine wirtschaftliche Kraft übersteigen würden.

Es gibt zwei wesentliche Grundformen der Risikoteilung:

1. Bei der *proportionalen Risikoteilung* wird die Schadenvariable X (entweder die Schadenhöhe pro Schadenfall oder Jahresgesamtschaden) in der Form

$$X = cX + (1 - c)X, \quad 0 < c < 1$$

in die beiden Teile cX und $(1 - c)X$ aufgeteilt.

2. Bei der *nichtproportionalen Risikoteilung* wird die Schadenvariable X in der Form

$$X = \min(X, a) + \max(X - a, 0), \quad a > 0$$

in das Erstrisiko $\min(X, a)$ und das Zweitrisiko $\max(X - a, 0)$ aufgeteilt.

Während bei der proportionalen Risikoteilung stets beide Seiten involviert sind, ist bei der nichtproportionalen Risikoteilung das Zweitrisiko nicht involviert, wenn die Teilungsgrenze a vom Schaden nicht überschritten wird.

2 Gründe und Formen für eine Rückversicherung

Der Grund für das Funktionieren von Versicherung ist der sogenannte *Ausgleich im Kollektiv*. Damit ist die Tatsache gemeint, dass die Zusammenfassung (Kollektiv, Portefeuille) mehrerer nicht vollständig positiv korrelierter Risiken (Polizzen) zu einer Schadenverteilung und Prämieinnahme führt, die im allgemeinen gegenüber jedem Einzelrisiko vorteilhafter ist, weil sich im Kollektiv günstige und ungünstige Schadenverläufe der Einzelrisiken ausgleichen können. Der Ausgleich im Kollektiv verringert das Schätz- und Zufallsrisiko des Versicherungsunternehmens, ein erhebliches Restrisiko verbleibt dennoch.

Wenn das Versicherungsunternehmen feststellt, dass seine (Netto-)Prämieinnahme b , seine Gesamtschadenverteilung G und sein Sicherheitskapital c zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit $G(b + c)$ führen, die ihm zu niedrig ist, so kann es sich seinerseits Versicherungsschutz kaufen bei anderen Versicherungsunternehmen oder bei dafür spezialisierten Rückversicherungsunternehmen.

Diese Möglichkeit, einen Teil der übernommenen ungewissen Schadenkosten wieder durch fixe Kosten zu ersetzen, wird RÜCKVERSICHERUNG genannt. Sie ist in der Regel einfacher als die Alternativen Erhöhungen der Prämieinnahme, Erhöhung des Sicherheitskapitals oder Verbesserung der Gesamtschadenverteilung und erlaubt es dem Erstversicherer, auch Risiken zu akquirieren, die wegen ihrer Größe seinen Ausgleich eher verschlechtern. Primär kann durch Rückversicherung eine Verringerung des versicherungstechnischen Risikos bewirkt werden. Anhand des Vergleichs mit den genannten Alternativen kann man sagen, dass Rückversicherung eine Erhöhung der Zeichnungskapazität bewirkt oder als Ersatz für eine Sicherheitskapitalerhöhung angesehen werden kann.

Jedes Versicherungsunternehmen, das einem anderen Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz gewährt, wird in diesem Zusammenhang als RÜCKVERSICHERER bezeichnet, während das Unternehmen, das die Originalpolizzen ausstellt, ERSTVERSICHERER genannt wird.

In der Praxis hat fast jedes Versicherungsunternehmen Rückversicherungsverträge mit einem oder mehreren Rückversicherern abgeschlossen. Der Rückversicherer hat keine Vertragsbeziehung mit den Versicherungsnehmern der bei ihm rückversicherten Polizzen, und diese wissen auch nicht, ob sie rückversichert sind, denn der Erstversicherer ist auch bei rückversicherten Polizzen weiterhin voll für Prämienfestsetzung und Schadenregulierung zuständig.

2.1 Arten der Rückversicherung

Im Prinzip können sich Erst- und Rückversicherer Polizze für Polizze über Art und Umfang der Risikoteilung einigen. Meistens unterscheidet man aber zwischen FAKULTATIVER und OBLIGATORISCHER Rückversicherung.

2.1.1 fakultative Rückversicherung

Einzelne Großschäden werden zwischen mehreren Versicherungsunternehmen aufgeteilt.

2.1.2 obligatorische Rückversicherung

Der überwiegende Teil der Rückversicherung erfolgt innerhalb eines Vertrags zwischen Erst- und Rückversicherer, in dem für alle im Vertragszeitraum im Portefeuille des Erstversicherers befindlichen Risiken festgelegt ist, welchen Teil der Risiken bzw. Schäden der Rückversicherer zu tragen hat und welche Prämie er dafür erhält.

Rückversicherungsverträge laufen normalerweise ein Jahr und beziehen sich aus Gründen der Transparenz meistens nur auf eine einzige Branche. Für die Aufteilung der Risiken bzw. Schäden haben sich folgende fünf Formen herausgebildet:

2.2 Formen der proportionalen Rückversicherung

1. *Quoten-Rückversicherung*: Der Rückversicherer übernimmt einen festen, überall gleichen Prozentsatz von allen Polizzen.

2. *Summenexzedenten-Rückversicherung*: Während das Aufteilungsverhältnis $c : (1 - c)$ zwischen Erst- und Rückversicherer bei der Quoten-Rückversicherung bei allen Risiken gleich ist, variiert es beim Summenexzedenten in Abhängigkeit von der Versicherungssumme v des jeweiligen Risikos derart, dass der Selbstbehaltsanteil $c = c(v) = \min(v_0/v, 1)$ beträgt, d.h. der Erstversicherer behält Risiken mit Versicherungssumme $v \leq v_0$ ganz selbst und beteiligt den Rückversicherer nur bei Risiken mit Versicherungssummen über v_0 und zwar derart, dass der Rückversicherer jeweils den Anteil übernimmt, der der über v_0 hinausgehenden Versicherungssumme entspricht. Ansonsten ist alles wie bei der Quoten-Rückversicherung, d.h. pro Risiko mit Versicherungssumme v werden Prämien und Schäden im Verhältnis $c(v)$ zu $1 - c(v)$ aufgeteilt. Es handelt sich also um eine reine proportionale Risikoteilung, wobei aber der Selbstbehaltsanteil $c(v)$ nicht in proportionaler Weise von der Versicherungssumme v abhängt. Durch Vereinbarung einer Summenexzedenten-Rückversicherung wird eine Homogenisierung bzw. Stützung der Versicherungssummen im Selbstbehalt des Erstversicherers bewirkt. Üblicherweise wird im Rückversicherungsvertrag noch die vom Rückversicherer zu übernehmende Versicherungssumme durch einen Maximalbetrag mv_0 begrenzt, d.h. der Rückversicherer übernimmt von einem Risiko mit Versicherungssumme v nicht den Anteil $1 - c(v)$, sondern

$$\min(1 - c(v), mv_0/v) = \min(\max(v - v_0, 0), mv_0)/v$$

mit einem in der Regel ganzzahligen $m \geq 1$. Dadurch weiß der Rückversicherer bereits bei Vertragsabschluss, dass er pro Einzelschaden unabhängig vom betroffenen Risiko, auf keinen Fall mehr als den Betrag mv_0 zu bezahlen hat.

2.3 Formen der nichtproportionalen Rückversicherung

1. *Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung*: Hierbei trägt der Erstversicherer von allen Schäden X , egal von welchem der unter den Vertrag fallenden Risiken, das Erstrisiko $\min(X, a_0)$ bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_0 (=PRIORITÄT) selbst, während der Rückversicherer den etwa übersteigenden Teil $\max(X - a_0, 0)$ zu zahlen hat, in der Regel ebenfalls nur bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_1 , also $\min(\max(X - a_0, 0), a_1)$. Ein etwaiger Schadenteil oberhalb $a_0 + a_1$, also $\max(X - a_0 - a_1, 0)$ geht wieder zu Lasten des Erstversicherers, falls nicht eine weitere Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $a_0 + a_1$ besteht. Bei allen vom Rückversicherungsvertrag gedeckten Risiken gelten üblicherweise dieselben Beträge a_0 und a_1 . Damit ist die Aufteilung der Schäden geregelt. Die dem Rückversicherer zustehende Prämie hängt von der vermuteten Anzahl und Höhe der Schäden über a_0 sowie der Höhe von a_1 ab und ist letztlich Verhandlungssache. Die Kalkulation von Prämien für Schadenexzedenten-Rückversicherungsverträge ist ein wichtiges Teilgebiet der Rückversicherungs-Mathematik.
2. *Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung*: Diese Rückversicherungsform ist analog zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit der Ausnahme, dass sich der Schadenbetrag X , der der Priorität gegenübergestellt wird, auf die Summe aller Einzelschäden des Erstversicherers aus einem einzelnen Schadenereignis bezieht, da sich z. B. bei einem Sturm oder einem Erdbeben gleichzeitig eine große Zahl

kleinerer Schäden ereignen kann, die zusammengenommen einen sehr hohen Betrag ergeben können.

3. *Jahresüberschaden-Rückversicherung oder Stop Loss*: Dies ist die Fortsetzung des Prinzips der Schadenexzedenten-Rückversicherung vom Einzelschaden über den Kumulschaden auf den Jahresschaden. Übersteigt der Gesamtschaden S des Erstversicherers aus einem Jahr (und einer Branche) die vereinbarte Priorität s_0 , so übernimmt der Rückversicherer den übersteigenden Teil bis zu einer vereinbarten Höchstgrenze s_1 , d.h. der Erstversicherer trägt $\min(S, s_0) + \max(S - s_0 - s_1, 0)$, der Rückversicherer $\min(\max(S - s_0, 0), s_1)$. Wenn - wie in der Praxis meist der Fall- Gesamtschäden oberhalb $s_0 + s_1$ sehr unwahrscheinlich sind, gewährt diese Rückversicherungsform dem Erstversicherer offenkundig den umfassendsten Schutz, indem sie sein Schadenpotential auf s_0 begrenzt, so dass das versicherungstechnische Risiko fast vollständig auf den Rückversicherer übergeht.

Die genannten Rückversicherungsformen werden - auch innerhalb einer einzelnen Branche - häufig miteinander kombiniert, um so Schutz gegen das *Frequenzrisiko* (durch Quote und Kumulschadenexzedent oder Stop Loss) und das *Großschadenrisiko* (durch Summenexzedent und Einzelschadenexzedent) zu erreichen. Prinzipiell können in der Rückversicherung beliebige Risikoteilungsformen vereinbart werden.

3 Entscheidung über Form und Umfang der Risikoteilung

Bei jeder Risikoteilung sind von beiden involvierten Seiten zwei prinzipielle Entscheidungen zu treffen:

1. Die Form der Risikoteilung muss festgelegt werden, z.B. proportional $X = cX + (1 - c)X$ oder nichtproportional $X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$, und ob sich X auf den Einzel-, Kumul- oder Jahresschaden bezieht.
2. Der Umfang der Risikoteilung muss festgelegt werden, z.B. bei rein proportionaler Risikoteilung das Aufteilungsverhältnis $c : (1 - c)$ oder bei rein nichtproportionaler Risikoteilung die Höhe der Schadengrenze a .

In der Erstversicherung, insbesondere im Massengeschäft, werden praktisch nur genormte Versicherungsverträge angeboten, so dass der Entscheidungsspielraum des Versicherungsnehmers oft nur zwischen den Extrema „vollständiger Risikotransfer“ oder „vollständige Risikoselbsttragung“ besteht.

In der Rückversicherung sind die beiden Vertragspartner gleichberechtigt und schließen miteinander eine individuelle Risikoteilungs-Vereinbarung ab, so dass tatsächlich weitgehend Entscheidungsfreiheit besteht.

Ein Rückversicherungsvertrag wird normalerweise für ein Jahr abgeschlossen und regelt die Teilung des Jahresgesamtschadens S des Erstversicherers in einer bestimmten Versicherungssparte. Dabei wird ein Teil R , $0 < R < S$, von S auf den Rückversicherer

transferiert zusammen mit einer Prämie $b(R)$. Bezeichnet b die zu S gehörende, um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieinnahme des Erstversicherers, so hat dieser das betriebswirtschaftliche Ergebnis $b - S$ vor der Rückversicherung mit dem Ergebnis $b - S - (b(R) - R) - k_1$ nach Rückversicherung zu vergleichen, wobei k_1 die durch die Rückversicherung eventuell zusätzlich verursachten (Verwaltungs-)Kosten des Erstversicherers sind. (Alle Beträge seien auf den Zeitpunkt des Vertragsbeginns diskontiert.) k_1 kann von Form und Umfang der Rückversicherung abhängen.

Der Rückversicherer hat als betriebswirtschaftliches Ergebnis aus diesem Vertrag 0 vor Vertragsabschluss und $b(R) - R - k_2$ nach Vertragsabschluss, wobei k_2 seine auf diesen Vertrag entfallenden Akquisitions- und Verwaltungskosten sind. $b(R)$ muss also mindestens so hoch sein wie $E(R) + k_2$, wenn der Rückversicherer nicht auf Dauer Verlust machen will. Auch k_2 kann von Art und Umfang des Rückversicherungsvertrags abhängen. Erst- und Rückversicherer zusammen haben also nach Rückversicherung ein um $k_1 + k_2$ schlechteres betriebswirtschaftliches Ergebnis als vor Rückversicherung.

Aus dieser Darstellung der Entscheidungssituation bei Rückversicherung ergeben sich zwei Probleme:

1. Es ist zu klären, ob die durch Rückversicherung entstehenden zusätzlichen Transaktionskosten $k_0 = k_1 + k_2$ durch Synergieeffekte wieder wettgemacht werden können.
2. Es ist ein Modell zu entwickeln, anhand dessen der Erstversicherer bezüglich eines konkreten Rückversicherungsvertrags entscheiden kann, ob die Variante ohne Rückversicherung oder die Variante mit Rückversicherung - und wenn ja, welche - für ihn günstiger ist.

3.1 Modelle zur Bewertung von Risikoteilungen

Im Kapitel 2 wurde als Ursache der Rückversicherung die Tatsache genannt, dass verfügbare Prämie und Sicherheitskapital des Erstversicherers nicht zu dem von ihm gewünschten Sicherheitsniveau führen. Eine andere Möglichkeit als Rückversicherung wäre die Erhöhung des Sicherheitskapitals. Daher liegt es auf der Hand, die Möglichkeit „Rückversicherung“ mit der Alternative „Erhöhung des Sicherheitskapitals“ zu vergleichen. Bei geeigneter Rückversicherung wird ein Teil des Schwankungszuschlags frei, der zur Deckung der Transaktionskosten ausreicht und nicht zu einer Erhöhung der Originalprämie führt.

Dabei ist klar, dass sich der insgesamt vorteilhafte Transfer auch nur dann für jeden der beiden Beteiligten lohnt, wenn der Original-Schwankungszuschlag so aufgeteilt wird, dass jeder die bei ihm anfallenden Transaktionskosten und den nach Risikoteilung noch erforderlichen Schwankungszuschlag decken kann. Es kommt also entscheidend auf die richtige Bemessung der Rückversicherungsprämie an: Sie muss mindestens so hoch sein, dass sie Betriebskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers deckt, aber höchstens so hoch, dass dem Erstversicherer genügend bleibt, um seinerseits Transaktionskosten und Schwankungszuschlag erwirtschaften zu können. Hier zeichnet sich ab, dass die Bemessung der Rückversicherungsprämie eine äußerst wichtige Rolle spielt.

Das Portefeuille eines Erstversicherers könnte mit der Quoten - Rückversicherung so rückversichert werden, dass bei unverändertem Kapital ein höheres Sicherheitsniveau erreicht werden könnte. Dies wäre auch mit jeder anderen Rückversicherungsform möglich, da alle Rückversicherungsformen im Prinzip Risikoteilungen jedes Umfangs zwischen „alles“ und „nichts“ zulassen. Natürlich wird der Erstversicherer diejenige Rückversicherungsform $(R, b(R))$ bevorzugen, die ihm bei gleichem Sicherheitsniveau den größten Anteil vom Schwankungszuschlag lässt.

Mit den Bezeichnungen

- S = Gesamtschaden des Erstversicherers vor Rückversicherung
- b = um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieinnahme des Erstversicherers
- R = auf den Rückversicherer transferierter Teil von S
- $b(R)$ = Rückversicherungsprämie (inklusive Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers)
- Q = $S - R$ = Selbstbehalts-Gesamtschaden des Erstversicherers
- $b(Q)$ = $b - b(R)$ = Selbstbehaltsprämie

lautet das Entscheidungsprinzip des Erstversicherers (wobei zur einfacheren Darstellung angenommen wird, dass die Transaktionskosten k_1 des Erstversicherers in $b(R)$ stecken):

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass für den Selbstbehalt $Q = S - R$ das angestrebte Sicherheitsniveau erreicht ist und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$ maximal ist.“

Dabei interessieren wir uns jetzt nur noch für die Wahl der geeigneten Rückversicherungsform und nicht mehr für die Frage, ob die Rückversicherung überhaupt vorteilhaft für den Erstversicherer ist. Falls es (z.B. wegen hoher Rückversicherungspreise) einmal für den Erstversicherer keine vorteilhafte Rückversicherung geben sollte, muss er eben sein Sicherheitskapital oder seine Prämieinnahme erhöhen oder sich von einigen seiner Risiken trennen oder das niedrigere Sicherheitsniveau vorübergehend akzeptieren.

Das Sicherheitsniveau bei gegebenem Sicherheitskapital c haben wir bisher mittels des *Modells der einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P(S > b + c) \text{ bzw. } P(Q > b(Q) + c)$$

quantifiziert. Unter der Annahme, dass S und Q normalverteilt sind und das der kalkulatorische Gewinn $b - E(S)$ bzw. $b(Q) - E(Q)$ an die Kapitalgeber ausgeschüttet wird, sind diese Wahrscheinlichkeiten gleich

$$1 - \Phi(c/Sta(S)) \text{ bzw. } 1 - \Phi(c/Sta(Q)),$$

wenn Φ die Standard-Normalverteilung bezeichnet. In diesem Fall ist das Erreichen einer bestimmten Verlust-Wahrscheinlichkeit gleichbedeutend mit dem Erreichen einer bestimmten (niedrigen) Varianz $Var(Q) = (Sta(Q))^2$ des Selbstbehalts-Gesamtschadens. Zwar ist die Normalverteilung, insbesondere bei S, in der Regel nicht gegeben, doch ist die Varianz auch ohne Normalverteilung ein intuitiv einleuchtendes Sicherheitskriterium

und außerdem analytisch einfacher zu behandeln als die Gesamtschadenverteilung. Daher ermöglicht das *Varianzmodell*

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass die Selbstbehaltsvarianz $\text{Var}(Q)$ das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q)$ möglichst groß ist.“

einige interessante allgemeine Aussagen.

Eine weitere Möglichkeit der Quantifizierung des Sicherheitsniveaus eines Portefeuilles besteht in der sogenannten Ruinwahrscheinlichkeit, die ein kontinuierliches mehrjähriges Analogon zur einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit ist. Dieses von der Risikotheorie entwickelte Kriterium hat sich jedoch in der Praxis nicht etablieren können. Da es auch analytisch nicht so leicht in den Griff zu bekommen ist, wird - wenn überhaupt - meist mit einer von Cramér/Lundberg stammenden Abschätzung gearbeitet. Dann kommt das Kriterium aber sehr in die Nähe eines Spezialfalls des *Nutzenmodells*, das die von der betriebswirtschaftlichen Entscheidungstheorie bevorzugte Vorgehensweise ist. Hierbei wird jedes mögliche Selbstbehaltsergebnis $x = b(Q) - Q$ mit Hilfe der Nutzenfunktion $u(x)$ bewertet, für die $u'(x) > 0$ (d.h. je höher das Ergebnis, desto besser) und $u''(x) < 0$ gilt (d.h. eine Erhöhung des Ergebnisses um einen festen Betrag ist um so weniger erstrebenswert, je höher das Ergebnis bereits ist: Risikoaversion). Das angestrebte Sicherheitsniveau kommt in der speziellen Wahl der Nutzenfunktion u zum Ausdruck.

Gemäß dem Nutzenmodell wird die Rückversicherung so gewählt, dass der Erwartungswert des Nutzens des resultierenden Selbstbehaltsergebnisses möglichst groß wird:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass bei gegebenem Sicherheitskapital c und gegebener Nutzenfunktion u die Nutzenerwartung $E(u(c + b(Q) - Q))$ möglichst groß ist.“

Problematisch am Nutzenmodell ist die Tatsache, dass unklar ist, welche Nutzenfunktion u der Erstversicherer seinen Entscheidungen zugrunde legen sollte. Zwar liefert die axiomatische Fundierung der Nutzentheorie im Prinzip ein Verfahren, die Nutzenfunktion eines rational handelnden Entscheidungsträgers zu ermitteln, doch sind entsprechende Resultate für Versicherungsunternehmen nicht bekannt. Bei theoretischen Untersuchungen ist die Familie der exponentiellen Nutzenfunktion

$$u(x) = (1 - e^{-r \cdot x})/r,$$

wobei der Parameter $r > 0$ den Grad der Risikoaversion angibt, beliebt, weil sie analytisch besonders einfach zu behandeln ist. Aber statt den Grad der Risikoaversion r festzulegen, ist es anschaulicher, das gewünschte Varianzniveau oder die einjährige Verlustwahrscheinlichkeit vorzugeben.

Schließlich ist noch anzumerken, dass das Modell mit der Verlustwahrscheinlichkeit und das Varianzmodell jeweils folgende zur vorigen äquivalenten Formulierung besitzen:

Verlustwahrscheinlichkeits-Modell:

„Wähle R und $b(R)$ möglich so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht überschreitet und die Verlustwahrscheinlichkeit $P(Q > b(Q) + c)$ möglichst klein wird.“

Varianz-Modell:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreiten und die Varianz $\text{Var}(Q)$ möglichst klein wird.“

Auch das Nutzenmodell kann bei Beschränkung auf exponentielle Nutzenfunktionen analog umformuliert werden, derart, dass bei gegebenen Mindestnutzen die Risikoaversion maximiert wird, dass die Formulierungen äquivalent sind, überlegt man sich leicht mittels Widerspruchsbeweise.

Die für diese Modelle ableitbaren allgemeinen Resultate sind sehr ähnlich, d.h. der Vergleich zweier verschiedener Rückversicherungsvarianten führt unter allen genannten Modellen im allgemeinen zum gleichen Ergebnis.

3.2 Einseitige Optimierung bei gegebenen Transaktionskosten

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die in der Rückversicherungsprämie $b(R)$ steckenden Transaktionskosten bei der Rückversicherungsentscheidung eine wichtige Rolle spielen, und dass ihre Höhe darüber entscheidet, ob ein Rückversicherungsvertrag aus Sicht jedes Beteiligten überhaupt sinnvoll ist. Um gemäß einem der vorgestellten Entscheidungsmodelle die optimale Rückversicherungsform aus Sicht des Erstversicherers finden zu können, müsste für alle in Betracht kommenden Rückversicherungsformen die Höhe der Transaktionskosten bekannt sein. In der Praxis ist das natürlich eine unrealistische Forderung. Dort kann der Erstversicherer allenfalls Angebote für einige wenige Varianten einholen und stellt dann wahrscheinlich fest, dass selbst bei diesen wenigen Varianten die Entscheidung sehr unsicher bleibt, weil er die (künftige) Verteilung seines Gesamtschadens S - und damit auch von Q und R - gerade im relevanten Großschadenbereich nicht genau genug kennt.

Wenn man auf analytischen Weg zu Antworten kommen will, muss man von einem idealisierten funktionalen Ansatz der Transaktionskosten ausgehen.

Zwei solche Ansätze werden in den beiden folgenden Sätzen gemäß dem Varianzmodell analysiert. Dabei werden die Transaktionskosten als die Veränderung

$$\begin{aligned}k(R) &= b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) \\ &= b(R) - E(R)\end{aligned}$$

des erwarteten betriebswirtschaftlichen Ergebnisses vor bzw. nach der Rückversicherung definiert, d.h. als der im Mittel durch Rückversicherung abfließende Betrag. (Das sind formal nur die in Abschnitt 3 mit k_2 bezeichneten Kosten, doch kann, solange wir nur die Situation des Erstversicherers untersuchen, $b(R)$ auch die durch Rückversicherung beim Erstversicherer zusätzlich entstehenden Verwaltungskosten k_1 beinhalten.) Die beiden folgenden Sätze geben eine explizite Lösung für die Fälle, wo für die Transaktionskosten $k(R)$ zum Beispiel $k(R) = \alpha_1 E(R)$, $k(R) = \alpha_2 \text{Sta}(R)$ oder $k(R) = \alpha_3 \text{Var}(R)$ gilt. Dabei benutzen wir das Varianzmodell in der am Ende des vorigen Abschnitts angegebenen Form, d.h. wir gehen von einem vorgegebenen Höchstniveau der Transaktionskosten $k(R)$ aus und minimieren die Selbstbehaltsvarianz $\text{Var}(Q)$.

Satz(Borch, Kahn, Pesonen):

Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen R gleiche Funktion g des Erwartungswertes $E(R)$, d.h. $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß Varianzmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis:

Die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung ist bei Gesamtschaden S und Priorität $a > 0$ gegeben durch den Selbstbehaltsschaden $Q_a = \min(S, a)$ und den Rückversicherungsschaden $R_a = \max(S - a, 0)$. Sei $(R, b(R))$ eine beliebige Rückversicherungsform mit Transaktionskosten $k(R) = g(E(R))$. Dann wählen wir a so, dass $E(R_a) = E(R)$ und damit auch $k(R_a) = k(R)$ gilt. Das ist stets möglich, da $E(R_a)$ stetig monoton fallend in a ist mit $E(R_0) = E(S) \geq E(R)$ und $E(R_\infty) = 0 \leq E(R)$. Es genügt zu zeigen, dass $\text{Var}(Q_a) \leq \text{Var}(Q) = \text{Var}(S - R)$ gilt.

Zunächst nehmen wir an, dass sich der zu R gehörende Selbstbehaltsschaden $Q = S - R$ als Funktion $Q = t(S)$ des Gesamtschadens darstellen lässt, wie dies auch bei $Q_a = Q_a(S) = \min(S, a)$ der Fall ist. Mit der Verteilungsfunktion G von S gilt dann

$$\begin{aligned} E(Q - a)^2 &= \int_0^\infty (t(s) - a)^2 dG(s) \\ &\geq \int_0^a (t(s) - a)^2 dG(s) \\ &\geq \int_0^a (s - a)^2 dG(s) \quad (\text{wegen } Q \leq S) \\ &= \int_0^a (Q_a(s) - a)^2 dG(s) \\ &= \int_0^\infty (Q_a(s) - a)^2 dG(s) \\ &= E((Q_a - a)^2) \end{aligned}$$

Wegen $E(Q_a) = E(S) - E(R_a) = E(S) - E(R) = E(Q)$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q) &= \text{Var}(Q - a) = E(Q - a)^2 - (E(Q - a))^2 \\ &\geq E(Q_a - a)^2 - (E(Q_a - a))^2 = \text{Var}(Q_a - a) \\ &= \text{Var}(Q_a). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz für solche Rückversicherungsformen bewiesen, bei denen sich der Erstversicherungsschaden Q als Funktion $Q = t(S)$ des Gesamtschadens S darstellen lässt. Dies ist jedoch z.B. für die Summenexzedenten- oder die Schadenexzedenten-Rückversicherung nicht erfüllt.

Für beliebige, nicht als Funktion von S darstellbare Rückversicherungsformen $Q + R = S$ ist noch folgender Zwischenschritt erforderlich:

Wir betrachten die durch $\underline{R} = S - E(Q|S)$ gegebene Rückversicherungsform, deren Erstversicherungsschaden $\underline{Q} = S - \underline{R} = E(Q|S)$ nach Definition des bedingten Erwartungswerts eine Funktion von S ist. \underline{R} hat wegen $E(\underline{R}) = E(S) - E(Q) = E(R)$ dieselben Transaktionskosten wie R . Daher gilt nach dem zuvor Bewiesenen $\text{Var}(Q_a) \leq \text{Var}(\underline{Q})$.

Wegen

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{Q}) &= \text{Var}(E(Q|S)) \\ &\leq \text{Var}(E(Q|S)) + E(\text{Var}(Q|S)) = \text{Var}(Q) \end{aligned}$$

folgt schließlich $\text{Var}(Q_a) \leq \text{Var}(Q)$ auch für den allgemeinen Fall.

□

Satz(Beard, Pentikäinen, Pesonen):

Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen gleiche monoton wachsende Funktion $k(R) = h(\text{Var}(R))$ der Varianz des Rückversicherungsschadens R , so ist gemäß dem Varianzmodell die Quoten-Rückversicherung für den Erstversicherer optimal.

Beweis:

Sei $(R, b(R))$ eine beliebige Rückversicherungsform mit Transaktionskosten $k(R) = h(\text{Var}(R))$. Wir können $\text{Var}(R) \leq \text{Var}(S)$ annehmen, denn sonst ist die vollständige Quoten-Rückversicherung $R_1 = S$ trivialerweise günstiger als R . Daher gibt es ein $q \leq 1$ mit $\text{Var}(qS) = \text{Var}(R)$, und die durch das Aufteilungsverhältnis $(1 - q) : q$ von S gegebene Quoten-Rückversicherung hat dieselben Transaktionskosten wie R . Wegen der allgemeinen Eigenschaft

$$\frac{\text{Cov}(S, R)}{\text{Sta}(S) \cdot \text{Sta}(R)} \leq 1$$

des Korrelationskoeffizienten von R und S wird unter Benutzung von $\text{Var}(R) = q^2 \text{Var}(S)$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q) &= \text{Var}(S - R) \\ &= \text{Var}(S) - 2 \cdot \text{Cov}(S, R) + \text{Var}(R) \\ &\geq \text{Var}(S) - 2 \cdot \text{Sta}(S) \cdot \text{Sta}(R) + \text{Var}(R) \\ &= \text{Var}(S) - 2 \cdot q \text{Var}(S) + q^2 \text{Var}(S) \\ &= \text{Var}((1 - q)S). \end{aligned}$$

Somit hat die Quoten-Rückversicherung bei gleichen Transaktionskosten wie R eine günstigere Varianz des Erstversicherungsschadens.

□

Diese beiden Sätze zeigen, dass die optimale Entscheidung des Erstversicherers überraschenderweise nicht von der Verteilung des Gesamtschadens S , sondern ausschließlich von der Art und Höhe der Transaktionskosten abhängt. Dagegen zeigen sie nicht, dass Stop-Loss- oder Quoten-Rückversicherung auch in der Realität die aus Sicht der Erstversicherer zu bevorzugenden Rückversicherungsformen sind, weil die jeweils vorausgesetzte funktionale Form der Transaktionskosten kaum realistisch ist. Dies erkennt man am klarsten, wenn man sich vor Augen hält, dass die Transaktionskosten sowohl die durch die Rückversicherung bedingten Verwaltungskosten von Erst- und Rückversicherer enthalten

als auch den Schwankungszuschlag des Rückversicherers. Für den Schwankungszuschlag des Rückversicherers ist die Annahme einer Varianzabhängigkeit nicht unrealistisch. Die Verwaltungskosten werden dagegen eher volumenabhängig sein, also etwa proportional zum Erwartungswert der Schäden, allerdings mit einer von der Rückversicherungsform abhängenden Proportionalitätskonstanten und einer durch die Fixkosten bedingten Untergrenze. Außerdem handelt es sich hierbei jeweils um die kalkulatorischen Kosten. Gemäß unserem Modell sind die Transaktionskosten aber richtigerweise definiert als Differenz

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

zwischen Rückversicherungsprämie (einschließlich der beim Erstversicherer zusätzlich anfallenden Kosten) und dem Erwartungswert der Rückversicherungsschäden, d.h. beinhalten zusätzlich zu den absichtlich einkalkulierten Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag auch noch einen unbeabsichtigten Zu- oder Abschlag durch die Verschätzung bei $E(R)$. Da in der Realität $E(R)$ aber nie genau bekannt ist, kann auch die Art des Transaktionskosten-Ansatzes letztlich nicht festgestellt werden.

Im jedem Beweis der beiden Sätze hat sich gezeigt, wie der Umfang der Rückversicherung (bzw. die Höhe des Selbstbehalts) bestimmt wird:

Ausgehend von der vorgegebenen (Maximal-)Höhe der Transaktionskosten, die zugleich der tolerierten mittleren Ergebnisreduzierung entspricht, wird die Stop-Loss-Priorität a bzw. der Quotenselbstbehalt $1 - q$ gerade so festgelegt, dass sich die gewünschte Höhe der Transaktionskosten und damit die gewünschte Höhe des Selbstbehaltsergebnisses ergibt. Normalerweise ist die Kostenfunktion $k(R) = g(E(R))$ bzw. $k(R) = h(Var(R))$ streng monoton wachsend in $E(R)$ bzw. $Var(R)$, so dass aus den vorgegebenen Kosten unmittelbar und eindeutig der zugehörige Umfang $E(R)$ bzw. $Var(R)$ der Rückversicherungsabgabe berechnet werden kann. Wegen der Monotonie der Kostenfunktion resultiert immer dann eine höhere Stop-Loss-Priorität bzw. eine höhere Quoten-Selbstbehalt und daher eine höhere Selbstbehaltsvarianz, wenn man die mit der Rückversicherung verbundenen Kosten reduzieren will.

Bei zunächst noch nicht bekannten Transaktionskosten, kann der Erstversicherer so vorgehen:

Für jede der relevanten Rückversicherungsformen bestimmt er die Höhe des für ihn resultierenden Selbstbehalts anhand der maximal tragbaren Selbstbehalts-Varianz. Für die sich so ergebenden Rückversicherungsalternativen besorgt er sich Preisangebote vom Rückversicherungsmarkt und entscheidet sich dann für die preisgünstigste Variante. Dies lässt sich natürlich in der Praxis nur für einige wenige der im Prinzip beliebig vielen Rückversicherungsformen (einschließlich aller Kombinationen) durchführen. Außerdem kann es sehr wohl sein, dass die gewählte Variante wegen des Schätz- und Änderungsrisikos nicht einmal unter den betrachteten Alternativen optimal ist, denn weder die Transaktionskosten noch die Selbstbehaltsvarianz sind genau genug bekannt.

Wie sieht nun die Lage des Rückversicherers aus, wenn der Erstversicherer einen für sich selbst möglichst günstigen Rückversicherungsvertrag anstrebt?

Für zwei Rückversicherungsformen, d.h. Zerlegungen $S = Q + R$ und $S = \underline{Q} + \underline{R}$ von S mit $Var(Q) < Var(\underline{Q})$ gilt in der Regel $Var(R) > Var(\underline{R})$, d.h. die für den Erstversicherer günstigere Form ist meist die für den Rückversicherer ungünstigere Form.

Wenn den Transaktionskosten die vom Rückversicherer für erforderlich gehaltene Marge (Verwaltungskosten, Schwankungszuschlag) zugrunde liegt, stellt sich die Frage nicht. Dies ist anders, wenn der Erstversicherer von sich aus mit einem von sich selbst erstellten Vertrags- und Preisangebot in den Rückversicherungsmarkt geht. Dann muss jeder angesprochene Rückversicherer prüfen, ob die Konditionen für ihn tragbar sind. Das ist nicht so trivial:

Der Erstversicherer bietet die Abgabe der Schadenvariable R gegen die Prämie $b(R)$ an. Wir versetzen uns jetzt in die Lage eines Rückversicherers, dessen bestehendes Portfolio unabhängig von R ist. Wir nehmen weiter an, dass der Rückversicherer bei Rückversicherung von R dem neuen Vertrag ein Sicherheitskapital c_R zuordnet, worauf er einen Schwankungszuschlag der Höhe $z \cdot c_R$ erwirtschaften will. Wenn $b(R) - E(R)$ größer als die beim Rückversicherer anfallenden Verwaltungskosten k_R zuzüglich des Schwankungszuschlages $z \cdot c_R$ ist, kann der Rückversicherer das Vertragsangebot des Erstversicherers natürlich voll übernehmen. Aber selbst wenn

$$b(R) - E(R) < k_R + z \cdot c_R$$

gilt, kann der Rückversicherer eventuell immerhin einen Anteil am angebotenen Rückversicherungsvertrag zeichnen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $b(R) - E(R) > k_R$ gilt und sich die Verwaltungskosten zumindest bis zu einer Anteilsgröße von

$$q = \frac{b(R) - E(R) - k_R}{z \cdot c_R} < 1$$

noch proportional zum Anteil reduzieren. Denn es reduziert sich wegen der Unabhängigkeit von R das erforderliche Sicherheitskapital und damit auch der Schwankungszuschlag proportional zur Varianz $Var(qR) = q^2 Var(R)$, also quadratisch mit q , so dass sich für den Rückversicherer bei Zeichnung von qR ein Mindestprämienbedarf von

$$\begin{aligned} E(qR) + q \cdot k_R + q^2 z \cdot c_R &= q \cdot (E(R) + k_R + q \cdot z \cdot c_R) \\ &= q \cdot b(R) \end{aligned}$$

ergibt (unter Benutzung der Definition von q), der gerade mit dem Anteil q der angebotenen Prämie $b(R)$ übereinstimmt. In der Tat ist es in der Praxis durchaus üblich, dass sich mehrere Rückversicherer proportional die Rückversicherung eines Erstversicherers teilen.

Nun sei noch an einem Beispiel gezeigt, dass auch bei Wahl eines anderen Entscheidungsmodells keine wesentlichen anderen Resultate zu erwarten sind.

Satz(Arrow):

Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen $R = S - Q$ gleiche Funktion g des Erwartungswerts $E(R)$, d.h. gilt $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß dem Nutzenmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis:

Sei R der Rückversicherungsschaden einer beliebigen Rückversicherungsform. Dann gibt es wie beim Varianzmodell eine Stop-Loss-Schadenvariable $R_a = \max(S - a, 0)$ derart,

dass $E(R_a) = E(R)$ gilt und daher die Transaktionskosten gleich sind. Daher gilt auch $b(Q) = b(Q_a)$ für die zu den Erstversicherungsschadenvariablen $Q_a = S - R_a = \min(S, a)$ bzw. $Q = S - R$ gehörenden Prämien. Die Nutzenfunktion u des Erstversicherers ist wegen $u'' \leq 0$ konkav, und daher gilt für alle x, x_0

$$u(x) \leq u(x_0) + u'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Lässt sich nun Q als Funktion $Q(S)$ des Gesamtschadens S schreiben, so ist bei einem vorhandenen Sicherheitskapital c

$$\begin{aligned} u(b(Q) + c - Q(s)) - u(b(Q_a) + c - Q_a(s)) & \\ & \leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u'(b(Q_a) + c - Q_a(s)) \\ & \leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u'(b(Q_a) + c - a). \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung sieht man wie folgt ein:

Im Fall $Q_a(s) < Q(s)$ folgt aus $Q(s) \leq s$ zunächst $Q_a(s) < s$ und daraus $Q_a(s) = \min(s, a) = a$. Daher sind die Argumente von u' gleich, und es gilt in der Abschätzung das Gleichheitszeichen. Im Fall $Q_a(s) \geq Q(s)$ gilt wegen $Q_a(s) \leq a$ für die Argumente von u' die Beziehung $b(Q_a) + c - Q_a(s) \geq b(Q_a) + c - a$, und daraus ergibt sich die Abschätzung, da u' nicht wachsend ist.

Wenden wir auf die vorstehende Ungleichung den Erwartungswert-Operator an, so erhalten wir

$$E(u(b(Q) + c - Q)) - E(u(b(Q_a) + c - Q_a)) \leq 0,$$

wegen $E(Q_a) = E(Q)$ und weil $b(Q_a)$ und damit auch $u'(b(Q_a) + c - a)$ ein Skalar ist.

Damit ist der Satz für solche $Q + R = S$ bewiesen, die eine Funktion von S sind.

Für beliebiges $Q + R = S$ betrachten wir wieder den durch $\underline{Q} = E(Q|S)$, $\underline{R} = S - E(Q|S)$ definierten Rückversicherungsschaden, der wegen $E(\underline{R}) = E(S) - E(Q) = E(R)$ dieselben Transaktionskosten wie R hat und damit auch dieselbe Selbstbehaltprämie $b(\underline{Q}) = b(Q)$. Wegen der Konkavität von u gilt für jede messbare Funktion h

$$E(u(h(Q))|S) \leq u(E(h(Q)|S)),$$

was man analog wie vorhin beweist. Damit folgt

$$\begin{aligned} E(u(b(Q) + c - Q)) &= E(E(u(b(Q) + c - Q)|S)) \\ &\leq E(u(b(Q) + c - E(Q|S))) \\ &= E(u(b(\underline{Q}) + c - \underline{Q})), \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist, da \underline{Q} eine Funktion von S ist und daher keine höhere Nutzenerwartung als der Stop Loss hat. □

Im Spezialfall der quadratischen Nutzenfunktion

$$u(x) = x - \frac{x^2}{2w}, \quad x \leq w,$$

mit „Sättigungsniveau“ w ist die Nutzenmaximierung bei gegebenem Erwartungswert der Selbstbehaltsschäden nichts anderes als eine Varianzminimierung. Der vorstehende Satz ist also eine echte Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes zum Varianzmodell.

3.3 Abstufung des Selbstbehaltes

Normalerweise schließt der Erstversicherer nicht einen einzigen Rückversicherungsvertrag für sein gesamtes Portefeuille ab, sondern behandelt jede Branche (Feuer, Allgemein-Haftpflicht, Kraftfahrt-Haftpflicht, Unfall, etc.) getrennt. Angenommen er möchte in mehreren oder allen getrennt rückversicherten Teilportefeuilles dieselbe Rückversicherungsform anwenden, so stellt sich die Frage, ob der Parameter, den den Umfang der Rückversicherung regelt, überall gleich hoch sein sollte oder nicht. Wenn die Teilportefeuilles voneinander unabhängig sind, können für diese Fragestellung explizite Lösungen ermittelt werden, wobei wir uns hier wieder auf das Varianzmodell beschränken.

Satz(De Finetti, Bühlmann):

Werden mehrere von einander unabhängige Teilportefeuilles S_i , $1 \leq i \leq I$, durch getrennte Quotenrückversicherungen geschützt, so sind die Selbstbehaltsquoten

$$c_i = \frac{Q_i}{S_i}$$

gemäß dem Varianzmodell proportional zu

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{\text{Var}(S_i)}$$

zu wählen, wenn die Transaktionskosten $k(R_i) = z_i E(R_i)$ jeweils mit dem Faktor z_i proportional zum Erwartungswert des abgegebenen Schadens R_i sind.

Beweis:

Die proportionale Aufteilung des Portefeuilles i ist durch $S_i = Q_i + R_i$ mit $Q_i = c_i S_i$ gegeben. Ist b_i die zu S_i gehörige Prämie (nach Abzug der Originalkosten), so beträgt das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$w_i = b_i - E(S_i) - z_i E(R_i) = b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i).$$

Im Varianzmodell legt der Erstversicherer die Selbstbehaltsquoten c_i so fest, dass bei vorgegebener Gesamtvarianz $\sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i) = v_0$ das erwartete Selbstbehaltsergebnis $w_1 + \dots + w_I$ maximal wird. Diese Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung kann mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode gelöst werden. Dazu müssen die optimalen c_i so gewählt werden, dass

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left\{ \sum_{i=1}^I (b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i)) + \beta(v_0 - \sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i)) \right\} = 0$$

für $j = 1, \dots, I$ gilt mit einem konstanten Multiplikator β , der so zu wählen ist, dass die Nebenbedingung erfüllt ist. Wegen $\text{Var}(Q_i) = \text{Var}(c_i S_i) = c_i^2 \text{Var}(S_i)$ ergibt die Ableitung $z_j E(S_j) - 2\beta c_j \text{Var}(S_j) = 0$; das heißt $c_j = \frac{z_j E(S_j)}{2\beta \text{Var}(S_j)}$, $1 \leq j \leq I$. Dabei ist β so zu wählen, dass $v_0 = \sum_{i=1}^I c_i^2 \text{Var}(S_i)$ gilt, d.h. $\beta^2 = \frac{1}{4 \cdot v_0} \sum_{i=1}^I \frac{(z_i E(S_i))^2}{\text{Var}(S_i)}$.

□

Der Selbstbehaltsanteil c_i soll also um so höher sein, je teurer die Rückversicherung, gemessen durch z_i , ist und je größer das Portefeuille, gemessen durch $E(S_i)$, ist, und um so kleiner, je größer die Varianz des Portefeuilles ist. Dieses Resultat ist sehr plausibel. Sollten einzelne $c_i \geq 1$ ausfallen, so werden die zugehörigen Teilportefeuilles nicht rückversichert.

Es macht wenig Sinn, den vorstehenden Satz auf echte Teilportefeuilles unmittelbar auf einzelne Risiken anzuwenden, da dann die zur Selbstbehaltfestlegung erforderlichen Parameter $Var(S_i)$ in der Praxis nicht zuverlässig genug bestimmt werden können. Wenn man aber für ein (Teil-)Portefeuille annehmen kann, dass die Risiken sich nur in ihrer Größe, gemessen durch die Versicherungssumme v_i , unterscheiden, d.h. dass die Schadenvariablen $\frac{S_i}{v_i}$ für alle Risiken i identisch verteilt sind, d.h. insbesondere dieselben Momente $E(\frac{S_i}{v_i}) = \mu$, $Var(\frac{S_i}{v_i}) = \sigma^2$ haben, so liefert obiger Satz die Empfehlung, dass die Selbstbehaltsquote c_j von Risiko i proportional zu $\frac{z \cdot v_i \cdot \mu}{v_i^2 \cdot \sigma^2}$, d.h. zu $\frac{1}{v_i}$, d.h. umgekehrt proportional zur Versicherungssumme v_i sein sollte, wenn wir angesichts des überall gleich verteilten Schadensatzes auch von einem konstanten Transaktionskostenansatz $z_i = z$ ausgehen.

Schließlich wollen wir noch untersuchen, wie die Prioritäten von unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherungen zu wählen sind, wenn mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles auf diese Weise rückversichert werden sollen. Dazu sei $S_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}$ der Gesamtschaden von Teilportefeuille i gemäß dem Kollektiven Modell, d.h. die Schadenhöhen X_{i1}, X_{i2}, \dots seien unabhängig und identisch wie X_i verteilt und unabhängig von der Schadenzahl N_i . Bei Priorität a_i ist der Selbstbehaltsschaden aus Portefeuille i $Q_i = \sum_{n=1}^{N_i} \min(X_{in}, a_i)$, und der auf den Rückversicherer transferierte Schaden beträgt $R_i = S_i - Q_i$.

Dann gilt folgender

Satz(Bühlmann):

Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i , $1 \leq i \leq I$, mit Einzelschadenhöhe X_i und davon unabhängiger, poissonverteilter Schadenzahl durch getrennte, unlimitierte Schadenexzedenten-Rückversicherungen geschützt, so sollten deren Prioritäten a_i im Varianzmodell die implizite Gleichung

$$a_i = \left(\frac{k_1}{2} + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i) \right) / \beta$$

erfüllen, wenn die Transaktionskosten die Form

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 Var(R_i)$$

haben, und der Faktor β so gewählt wird, dass das vorgegebene Varianzniveau eingehalten wird.

Beweis:

b_i sei die zu Teilportefeuille i gehörende Prämie (nach Abzug der Originalkosten). Gemäß dem Varianzmodell sind die a_i so zu wählen, dass das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$\sum_{i=1}^I (b_i - E(S_i) - k(R_i))$$

maximal wird unter der Nebenbedingung, dass die Varianz ihr vorgegebens Niveau einhält, d.h. unter

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^I Q_i\right) = v_0.$$

Nach der Langrangeschen Multiplikatorenmethode ist dazu notwendig, dass für $j = 1, 2, \dots, I$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left\{ \sum_{i=1}^I (b_i - E(S_i) - k(R_i)) + \beta(v_0 - \sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i)) \right\} = 0.$$

Da die Schadenzahl N_i poissonverteilt ist, wird mit $h_i = E(N_i)$

$$\begin{aligned} E(R_i) &= h_i \cdot E(\max(X_i - a_i, 0)), \\ \text{Var}(R_i) &= h_i \cdot E(\max(X_i - a_i, 0))^2, \\ \text{Var}(Q_i) &= h_i \cdot E(\min(X_i, a_i))^2, \end{aligned}$$

und daher wird mit der Verteilungsfunktion F_i von X_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} E(R_i) &= -h_i(1 - F_i(a_i)), \\ \frac{\partial}{\partial a_i} \text{Var}(R_i) &= -2 \cdot h_i \cdot E(\max(X_i - a_i, 0)), \\ \frac{\partial}{\partial a_i} \text{Var}(Q_i) &= 2 \cdot h_i \cdot a_i \cdot (1 - F_i(a_i)). \end{aligned}$$

Die Langrange-Bedingung lautet also

$$k_1 h_i (1 - F_i(a_i)) + 2k_2 h_i E(\max(X_i - a_i, 0)) - 2\beta \cdot h_i a_i (1 - F_i(a_i)) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{k_1}{2\beta} + \frac{k_2}{\beta} \cdot \frac{E(\max(X_i - a_i, 0))}{1 - F_i(a_i)} \\ &= \frac{k_1}{2\beta} + k_2 \cdot \frac{E(X_i - a_i | X_i > a_i)}{\beta} \end{aligned}$$

Dabei ist β wieder so zu wählen, dass die Nebenbedingung $\text{Var}(Q_1 + \dots + Q_I) = v_0$ erfüllt ist.

□

3.4 Suboptimale und pareto-optimale Risikoteilung

Es gibt Risikoteilungsformen, die auf jeden Fall gemieden werden sollten, weil eine für beide Beteiligten bessere Alternative existiert. Ein Beispiel ist die *Integral-Franchise*, die hier im Rückversicherungskontext auf Jahresbasis formuliert wird:

Ausgehend vom Jahresgesamtschaden S und einer vereinbarten Schadengrenze \underline{a} trägt der Erstversicherer

$$Q = \begin{cases} S, & \text{falls } S \leq \underline{a}, \\ 0, & \text{falls } S > \underline{a}, \end{cases}$$

und der Rückversicherer trägt $R = S - Q$, d.h. er übernimmt den vollen Schaden, wenn er höher als die Grenze \underline{a} ist.

Satz:

Zu jeder Integralfranchise $Q + R = S$ mit Schadengrenze \underline{a} gibt es einen unlimitierten Stop Loss $Q_a + R_a = S$, $Q_a = \min(S, a)$, mit Priorität $a < \underline{a}$ und gleichen Erwartungswerten $E(Q_a) = E(Q)$, $E(R_a) = E(R)$, aber niedrigeren Varianzen $Var(Q_a) < Var(Q)$, $Var(R_a) < Var(R)$.

Beweis:

$E(Q_a)$ ist eine stetige, streng monoton wachsende Funktion von a mit $0 \leq E(Q_a) \leq E(S)$. Daher gibt es zur gegebenen Integralfranchise $Q + R = S$ mit Schadengrenze \underline{a} einen Stop Loss derart, dass $E(Q_a) = E(Q)$ und damit auch $E(R_a) = E(R)$ gilt. Wir müssen also nur die Aussage über die Varianzen beweisen.

An der Darstellung

$$\begin{aligned} \int_0^{\underline{a}} s \, dG(s) &= E(Q) = E(Q_a) \\ &= \int_0^a s \, dG(s) + a \cdot (1 - G(a)) \end{aligned}$$

(mit der Verteilungsfunktion G von S) sieht man sofort, dass $a < \underline{a}$ und

$$\int_a^{\underline{a}} s \, dG(s) = a(1 - G(a))$$

gelten muss. Daher wird

$$\begin{aligned} E(Q^2) &= \int_0^{\underline{a}} s^2 \, dG(s) = \int_0^a s^2 \, dG(s) + \int_a^{\underline{a}} s^2 \, dG(s) \\ &> \int_0^a s^2 \, dG(s) + a \cdot \int_a^{\underline{a}} s \, dG(s) \\ &= \int_0^a s^2 \, dG(s) + a^2(1 - G(a)) = E(Q_a^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} Var(Q_a) &= E(Q_a^2) - (E(Q_a))^2 \\ &< E(Q^2) - (E(Q))^2 = Var(Q), \end{aligned}$$

was auch schon aus dem Satz von Borch, Kahn und Pesonen folgte.

Wir zeigen nun noch

$$\int_a^{\infty} (s - a)^2 \, dG(s) = E(R_a^2) < E(R^2) = \int_{\underline{a}}^{\infty} s^2 \, dG(s).$$

Dies folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
 \int_a^{\underline{a}} (s - a)^2 dG(s) &< (\underline{a} - a) \cdot \int_a^{\underline{a}} (s - a) dG(s) \\
 &= (\underline{a} - a)a(1 - G(a) - (G(\underline{a}) - G(a))) \\
 &< (2\underline{a}a - a^2) \cdot (1 - G(\underline{a})) \\
 &< \int_{\underline{a}}^{\infty} (s^2 - (s - a)^2) dG(s).
 \end{aligned}$$

Damit ist auch

$$\begin{aligned}
 Var(R_a) &= E(R_a^2) - (E(R_a))^2 \\
 &< E(R^2) - (E(R))^2 = Var(R)
 \end{aligned}$$

bewiesen.

□

Der bevorstehende Satz besagt, dass für Erst- und Rückversicherer, die nach dem Varianzmodell entscheiden, die Integralfranchise keine empfehlenswerte Risikoteilung darstellt. Da es eine für beide Seiten bessere Form der Risikoteilung gibt, nämlich den Stop-Loss (bzw. die Abzugsfranchise). Genau genommen gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die Transaktionskosten nur von Erwartungswert und Varianz des Rückversicherungsschaden abhängen - einer im Varianzmodell sehr natürlichen Voraussetzung. Werden die Transaktionskosten z. B. gemäß $k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 Var(R)$ berechnet, so ergibt der gemäß obigem Satz definierte Stop Loss sowohl niedrigere Selbstbehaltsvarianz wie auch niedrigere Transaktionskosten (falls $k_2 > 0$) als die Integralfranchise.

Risikoteilungsformen, zu denen es keine Alternative gibt, bei der sich wenigstens eine Seite besser stellt, ohne dass die andere sich verschlechtert, heißen *pareto-optimal*. Die Integralfranchise ist im Varianzmodell also nicht pareto - optimal. Das gilt übrigens auch im Nutzenmodell, wenn die Transaktionskosten nur von der Schadenerwartung des Rückversicherers abhängen. Bei pareto - optimalen Rückversicherungsformen geht jede Verbesserung zugunsten des Erstversicherers zu Lasten des Rückversicherers und umgekehrt.

Wir haben bisher hauptsächlich Rückversicherungsformen betrachtet, bei denen der Selbstbehaltsschaden Q des Erstversicherers und der auf den Rückversicherer transferierten Schadenteil $R = S - Q$ Funktionen des Gesamtschadens S sind. Dies ist bei Quote $Q = cS$, Stop Loss $Q = \min(S, a)$ und Integralfranchise (wenn sie, wie hier, auf Jahresbasis definiert ist) der Fall. Dagegen sind z. B. der Summenexzedent und der Schadenexzedent keine Funktionen des Gesamtschadens S . Vielmehr hängt hier die Aufteilung von S davon ab, in welcher Weise sich S aus kleinen oder großen Einzelschäden zusammengesetzt (beim Schadenexzedenten) bzw. ob die großen Einzelschäden eher bei Risiken mit hohen oder weniger hohen Versicherungssummen anfallen (beim Summenexzedenten).

Satz:

Zu jeder Rückversicherungsform $\underline{Q} + \underline{R} = S$, bei der \underline{Q} und \underline{R} keine Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind, sondern von den Einzelschäden abhängen, gibt es eine Rückversicherungsform $Q + R = S$, bei der Q und R Funktionen von S sind, und derart, dass $E(Q) = E(\underline{Q})$, $E(R) = E(\underline{R})$ und $Var(Q) < Var(\underline{Q})$, $Var(R) < Var(\underline{R})$ gilt.

Beweis:

Wir zeigen, dass $Q = E(Q|S)$, $R = S - Q = E(S|S) - E(Q|S) = E(R|S)$ die geforderten Bedingungen erfüllen. Q und R sind Funktion von S und es gilt $E(Q) = E(E(Q|S)) = E(\underline{Q})$ und $E(R) = E(E(R|S)) = E(\underline{R})$. Weiters ist

$$\begin{aligned} Var(Q) &= Var(E(Q|S)) \\ &< Var(E(Q|S)) + E(Var(Q|S)) \\ &= Var(\underline{Q}). \end{aligned}$$

Genauso ist

$$\begin{aligned} Var(R) &= Var(E(R|S)) \\ &< Var(E(R|S)) + E(Var(R|S)) \\ &= Var(\underline{R}). \end{aligned}$$

□

Korollar:

Eine Rückversicherungsform, die sich nicht als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellen lässt, ist im Varianzmodell nicht pareto-optimal.

Der vorstehende Beweis gibt auch konkret an, wie wir prinzipiell zu Summen- oder Schadenexzedenten eine für beide Seiten *bessere Rückversicherungsform* konstruieren können. Ist z. B. ein bestimmtes Portefeuille und ein konkreter Summenexzedent gegeben, so kann sich ein und derselbe Jahresgesamtschaden $S = s$ auf viele unterschiedliche Weisen aus Einzelschäden zusammensetzen. Für alle möglichen Weisen mit Gesamtschaden s muss dann festgestellt werden, welcher Selbstbehalt Q sich gemäß Summenexzedent jeweils ergibt. Der Erwartungswert $E(Q|S = s)$ dieser zu $S = s$ gehörenden Selbstbehaltsschäden stellt dann den unter der besseren Rückversicherungsform tatsächlich vom Erstversicherer zu tragenden Selbstbehaltsgesamtschaden dar, falls der Jahresgesamtschaden $S = s$ beträgt.

Es ist klar, dass die zur Berechnung von $E(Q|S = s)$ erforderlichen Schadenzahl- und Schadenhöhenwahrscheinlichkeiten pro Risiko zu den Zweigen der Schadenversicherung allenfalls approximativ und unter zusätzlichen Modellannahmen ermittelt werden können. Nur in der Lebens- oder Unfalltod-Versicherung erscheint es möglich, dass sich beide Seiten auf die erforderlichen Rechnungsgrundlagen einigen. Daher können Summen- und Schadenexzedenten-Rückversicherung weiterhin ihren Platz in der Versicherungspraxis beanspruchen, da sie zwar suboptimal, doch die theoretisch bessere Rückversicherungsform in der Regel nicht explizit ausgerechnet werden kann. Ebenso sind die im vorigen Abschnitt behandelten Abstufungen des Selbstbehalts nicht pareto-optimal, d.h.

können theoretisch noch weiter verbessert werden durch eine Rückversicherungsform, die nur vom Gesamtschaden aller betrachteten Teilportefeuilles abhängt.

Wir haben gesehen, dass eine pareto-optimale Rückversicherungsform notwendigerweise als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellbar sein muss. Doch dies allein ist nicht hinreichend, wie das Beispiel der Integralfranchise (auf Jahresbasis) zeigt. Der folgende Satz charakterisiert die pareto-optimale Rückversicherungsform.

Satz(Pesonen):

Eine Rückversicherungsform $Q + R = S$ ist im Varianz- oder Nutzenmodell genau dann pareto-optimal, wenn Selbstbehaltsschaden Q und Rückversicherungsschaden R monoton nichtfallende Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind.

Aus dem Satz folgt unmittelbar, dass Quote und Stop Loss pareto-optimal sind, da Q und R jeweils monoton nicht fallende Funktionen von S sind. Dagegen ist bei der Integralfranchise (auf Jahresbasis) der Selbstbehaltsschaden Q nicht monoton nichtfallend, was erneut zeigt, dass die Integralfranchise nicht pareto-optimal ist.

4 Fazit

Wir haben gesehen, dass wegen der Vagheiten bezüglich der Schadenverteilung und damit bezüglich der tatsächlichen Transaktionskosten die für den Erstversicherer optimale Rückversicherungsform im konkreten Fall normalerweise nicht ermittelt werden kann. In der Praxis orientiert man sich daher oft an der jeweils dominierenden Komponente des versicherungstechnischen Risikos, d.h. an Zufalls- bzw. Änderungsrisiko. Die spielen nämlich in den einzelnen Versicherungssparten in der Regel eine unterschiedliche Rolle. So dominiert z. B. in der Feuerversicherung von Industriebetrieben mit ihren stark unterschiedlichen Versicherungssummen normalerweise das Zufallsrisiko, d.h. der Verlauf dieser Sparte wird entscheidend durch wenige Großschäden geprägt. In der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung dagegen spielen einzelne Großschäden keine dominierende Rolle; der Verlauf wird hier stark vom Änderungsrisiko („Jahresqualität“) sowie von der sich über die Lohnkosten auswirkenden Inflationsrate beeinflusst.

Gegen das Zufallsrisiko aus einzelnen Großschäden schützen am besten der Summenexzedent und der Schadenexzedent. Bei Kumulierung vieler Schäden aus einem Ereignis entlastet natürlich der Kumulschadenexzedent am meisten. Dem Änderungsrisiko, das sich auf alle Schäden auswirkt, kann offensichtlich durch Quote oder Stop Loss am besten begegnet werden. In den Sparten, wo beide Komponenten des versicherungstechnischen Risikos eine Rolle spielen, werden häufig mehrere Rückversicherungsformen miteinander kombiniert („Rückversicherungsprogramm“).

Auch theoretische Modelle - unter idealisierten und wenig realistischen Annahmen bezüglich der Transaktionskosten - liefern die optimale Rückversicherungsform und den optimalen Selbstbehalt zugleich. Wenn man - wie in der Realität meist der Fall - die konkrete Situation nicht analytisch durchrechnen kann, ergeben sich für eine numerische Berechnung zu viele Möglichkeiten, selbst wenn man sich auf die fünf Rückversicherungs-

- Grundformen und ihre Kombinationsmöglichkeiten beschränkt. Bei vorgegebener Rückversicherungsform hingegen hält sich der Rechenaufwand zur Bestimmung des Selbstbehalts in Grenzen, auch wenn man sich dem theoretischen Optimum meist nur durch Probieren und Interpolieren nähern kann- Problematisch und von entscheidenden Einfluss bleibt in jedem Fall die Quantifizierung wichtiger Einflußgrößen, insbesondere der Schadenverteilung (speziell im Großschadenbereich) und der Transaktionskosten, zumal beide sich im Laufe der Zeit erheblich ändern können.

Jedenfalls sollte man sich in der Praxis trotz aller Schwierigkeiten beim Umsetzen eines theoretischen Modells zur Ermittlung der Verteilung des Selbstbehaltsergebnisse nicht zu sehr auf sein praxisgeschultes Gefühl verlassen, insbesondere wenn man nur wenig Rückversicherungsschutz kaufen will. Denn nur ein risikothoretisches Modell kann auch all die kleinen Wahrscheinlichkeiten berücksichtigen, für deren Realisierung in einer 20- oder 30- jährigen praktischen Erfahrung kein Platz ist, mit denen aber dennoch stets zu rechnen ist.

Literatur

- [M] THOMAS MACK: SCHADENSVERSICHERUNGSMATHEMATIK, VERLAG VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT KARLSRUHE 1997, TEIL 4