Seminar aus Finanz-und Versicherungsmathematik

Riemann-Stieltjes Integral

Albert FANDL

TU-Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Riemann-Stieltjes Integral ist eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals. Thomas-Jean Stieltjes, ein holländischer Mathematiker, führte es 1894 in einer Arbeit über Kettenbrüche ein. Erst später wurde es nach ihm benannt. Er lehnte es ihm Aufbau an das Riemann-Integral an und definierte dementsprechend sogenannte Riemann-Stieltjes Summen

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau) = \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

für eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ und eine Belegung τ. Den Grenzwert bildet er analog zum Riemann-Integral und bezeichnet ihn mit $\int f dg$.

Das Integral wurde zunächst wenig beachtet. Größere Bekanntheit erlangte es erst durch den ungarische Mathematiker Friedrich Riesz, der die Funktionalanalysis mitbegründete und im Jahr 1909 im Darstellungssatz von Riesz zeigte, dass sich jede lineare Abbildung $L : C(I) \to \mathbb{R}$ als Stieltjes Integral

$$f \mapsto L(f) = \int_a^b f(t)dg(t) \quad \text{mit } g \in BV([a, b])$$

anschreiben lässt (BV bezeichne die Funktionen von *beschränkter Variation*, siehe Kapitel 2).

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über das Riemann-Stieltjes-Integral zu bieten und vor allem aus diesem Blickwinkel den Begriff eines stochastischen Integrals zu motvieren. Auf das stochastische Integral soll daher auch im letzten Kapitel kurz eingegangen werden.

Das zweite Kapitel beinhaltet neben der Konstruktion des Riemann-Stieltjes Integrals die wichtigsten Sätze, die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals betreffend, sowie Sätze zur praktischen Berechnung des Riemann-Stieltjes Integrals.

Das erste Kapitel behandelt schließlich die Konstruktion des Riemann-Integrals und geht dabei auf die verschiedenen Zugänge zum Integral ein. Der Aufbau des Kapitels orientiert sich dabei an [KALTEN].

2 Wiederholung zum Riemann-Integral

Schon in der Antike beschäftigte man sich mit der Berechnung des Flächeninhaltes von allgemeinen geometrischen Figuren. Wird eine solche Flächen in der Ebene durch zwei stetige Funktionen begrenzt, lässt sich der Inhalt durch die Integrale der beiden Funktionen berechnen. Die für die Bestimmung des Integrals notwendigen Grundlagen wurden mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung Ende des 17. Jahrhunderts durch Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton gelegt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt dabei den für die Integralrechnung wichtigen Zusammenhang mit dem Differenzieren her. Demnach stimmt das Integral als Funktion in der oberen Grenze mit der Stammfunktion des Integranden überein.

2.1 Darboux'sches Integral

Sei f eine beschränkte Funktion auf dem beschränkten Intervall $[a, b]$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Für die Fläche S unter der Funktion, das Integral, gilt zunächst sicher folgende Ungleichungskette

$$\inf_{t\in[a,b]} f(t)(b-a) \leq S \leq \sup_{t\in[a,b]} f(t)(b-a)$$

Zerlegt man das Intervall geeignet in Teilintervalle, und betrachtet die Ungleichung für jedes dieser Teilintervalle, wird die Abschätzung für S im Allgemeinen besser. Mathematisch benötigt man dafür den Begriff der Zerlegung.

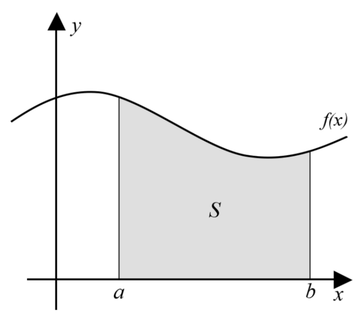


Abbildung 1: Das Integral der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$

Definition 2.1. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt eine aufsteigend sortierte, endliche Teilmenge $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$, die a und b enthält, **Zerlegung** von $[a, b]$. $n(\mathcal{Z})$ bezeichnet die Anzahl der Elemente in $\mathcal{Z}$.

Um Konvergenzbetrachtungen anstellen zu können brauchen wir weiters den Begriff der **Feinheit**.

Definition 2.2. Für eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ bezeichne $|\mathcal{Z}| = \max_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} |t_i - t_{i-1}|$ die Feinheit der Zerlegung.

Bemerkung 2.3. Die Menge der Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ bildet eine gerichtete Menge bzgl. der Feinheit der Zerlegung.

Für eine feste Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ definieren wir

$$O(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1})$$

als Obersumme und

$$U(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1})$$

als Untersumme von f. Da f als beschränkt vorausgesetzt wurde, existieren diese Ausdrücke auch.

Seien die Zerlegungen $\mathcal{Z}_1 = (t_j)_{j=0}^{n(\mathcal{Z}_1)}, \mathcal{Z}_2 = (x_i)_{i=0}^{n(\mathcal{Z}_2)}$ gegeben. Wenn $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$, dann existiert eine Abbildung $j : i \to j(i)$, sodass

$$t_{i-1} = x_{j(i-1)} < x_{j(i-1)+1} < \ldots < x_{j(i)-1} < x_{j(i)} = t_i$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f &= \sum_{j=j(i)+1}^{j(i)} (t_j - t_{j-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \\
&\geq \sum_{j=j(i)+1}^{j(i)} (t_j - t_{j-1}) \sup_{[t_{j-1},t_j]} f
\end{aligned}$$

da das Supremum über eine kleinere Menge nur kleiner werden kann. Summiert man über alle i auf, erhält man $O(\mathcal{Z}_2) \leq O(\mathcal{Z}_1)$. Die Obersummen bilden also ein monoton fallendes Netz. Ebenso bilden die Untersummen ein monoton wachsendes Netz. Wegen

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \leq U(\mathcal{Z}) \leq O(\mathcal{Z}) \leq (b - a) \inf_{[a,b]} f$$

handelt es sich schließlich um beschränkte Netze.

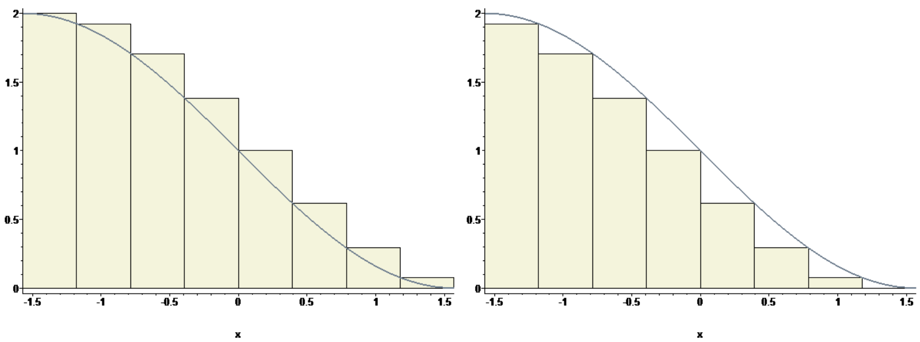


Abbildung 2: Ober- und Untersumme der Funktion $f(x) = 1 - \sin(x)$

Das Netz der Obersummen und das Netz der Untersummen konvergiert also und ihr Grenzwert existiert in $\mathbb{R}$. Den Grenzwert

$$\inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) =: \overline{\int_a^b} f dx$$

bezeichnet man dann als das obere Integral und

$$\sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) =: \underline{\int_a^b} f dx$$

als das untere Integral.

Definition 2.4. Darboux-Integral
Stimmen für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ das obere und das untere Integral überein, nennt man f integrierbar und der gemeinsame Grenzwert heißt Integral. Man schreibt dann

$$\overline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^b} f dx = \int_a^b f dx$$

Wegen der Konstruktion mit den Ober- und Untersummen nennt man dieses Integral auch **Darboux'sches Integral**.

2.2 Riemann-Integral

Mit dem Darboux-Integral lässt sich bereits die Fläche unter einer beschränkten reellwertigen Funktion beschreiben. Wie geht man aber bei vektor- oder gar komplexwertigen Funktionen vor? Dafür benötigt man den alternativen Ansatz des Riemann-Integrals.

Infimum bzw. Supremum der Funktionswerte werden beim Riemann-Integral durch den Funktionswert eines Punktes aus dem Teilintervall der Zerlegung ersetzt. Diese fasst man zu einer Belegung zusammen.

Definition 2.5. Für eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (t_i)_{i=0}^{n(\mathcal{Z})}$ nennt man eine endliche Menge τ mit $a = t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq \tau_{n(\mathcal{Z})} \leq t_{n(\mathcal{Z})}$ Belegung von $\mathcal{Z}$.

Für ein Paar $(\mathcal{Z}, \tau)$ und eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die **Riemann-Summe** dann gegeben durch

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, f) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_j)(t_i - t_{i-1})$$

Anders als bei der Konstruktion über Ober- und Untersummen ist bei den Riemann-Summen von vornherein nicht klar, ob diese in der Feinheit der Zerlegung überhaupt konvergieren.

Man definiert das Riemann-Integral daher auf folgende Weise.

Definition 2.6. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Konvergiert das Netz der Riemann-Summen bzgl. der Feinheit für alle Belegungen τ, bezeichnet man den Limes als **Riemann-Integral**, falls dieser Grenzwert existiert, und schreibt

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} \sigma(\mathcal{Z}, \tau, f) = \int_a^b f dx$$

Tatsächlich sind die beiden Zugänge zum Integral sogar äquivalent, wie der

folgende Satz zeigt.

Satz 2.7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Das obere und das untere Integral von f stimmen überein.
2. f ist Riemann-integrierbar, d.h. $\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} \sigma(\mathcal{Z}, \tau, f)$ existiert für alle τ.

Im Folgenden sei noch ein Satz zur Existenz des Riemann-Integrals gebracht.

Satz 2.8. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig, so existiert auch das Riemannintegral von f über $[a, b]$.

Ein Beweis zu diesem wichtigen Satz findet sich z.B. in [KALTEN], Kapitel 8.

Einer der wichtigsten Sätze zur Integralrechnung stellt den Zusammenhang zur Differentialrechnung her

Satz 2.9. Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung
Sei f eine reell- oder komplexwertige Funktion auf $[a, b]$, die über $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist. Für $x \in [a, b]$ definiere

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig auf $[a, b]$.
Ist f in einem Punkt x_0 stetig, so ist F bei x_0 differenzierbar, und es gilt

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Beweis Als integrierbare Funktion ist f auch beschränkt. Es gilt also $|f| \leq K$ für ein $K > 0$. Sind $x, y \in [a, b]$, sodass $x < y$, so folgt

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq K \cdot (y - x)$$

Insbesondere ist F damit stetig.
Sei nun f stetig bei einem $x_0 \in [a, b)$ stetig. Ist $\epsilon > 0$ gegeben, so existiert $\delta > 0$, sodass

$$|f(t) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für } |t - x_0| < \delta$$

Für $x_0 < x < x_0 + \delta \leq b$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \; - \; f(x_0) \right| \quad &= \quad \left| \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{x - x_0} \, dt \; - \; f(x_0) \frac{x - x_0}{x - x_0} \right| \\ &= \quad \left| \int_{x_0}^x \frac{f(t) - f(x_0)}{x - x_0} \, dt \right| \\ &< \quad \left| \int_{x_0}^x \frac{\epsilon}{x - x_0} \, dt \right| \; = \; \epsilon \end{aligned}$$

Die rechtsseitige Ableitung $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ von F ist also genau $f(x_0)$. Entsprechend geht man bei der linksseitigen Ableitung für $x \in (a, b]$ vor.

■

3 Riemann-Stieltjes-Integral

In diesem Kapitel soll in Anlehnung an das Riemann-Integral ein Stieltjes-Integral konstruiert werden, sowie die wichtigsten Sätze zu dessen Existenz und praktischen Berechnung gebracht werden. ([MLITZ], [WALTER])

Riemann-Summen, aber auch die Ober- und Untersummen, lassen sich auch als gewichtete Summen interpretieren, mit Summanden $t_i - t_{i-1}$ und Gewichten $f(\tau_i)$ bzw. $\inf f$ oder $\sup f$. Anschaulich gesprochen gewichtet man beim Riemann-Integral also jeden Punkt des Intervalls $[a, b]$ mit dem Funktionswert in diesem Punkt.

Statt Summanden von der Form $t_i - t_{i-1}$ geht man beim Stieltjes-Integral zu $g(t_i) - g(t_{i-1})$ über. Dies hat auch eine physikalische Entsprechung: denkt man sich das Intervall $[0, 1]$ mit punktförmig oder kontinuierlich verteilter Masse belegt, und bezeichnet $g(t)$ die im Intervall $[0, t]$ enthaltene Masse, so entspricht die Differenz $g(t_i) - g(t_{i-1})$ der Masse im Teilintervall $(t_{i-1}, t_i]$. Das Stieltjes-Integral erlaubt es dann, Gesamtmasse und Schwerpunkt in einheitlicher Form anzuschreiben.

Die Funktion f nennt man dabei **Integrand**, g ist der **Integrator**.

3.1 Darboux-Stieltjes-Integral

Analog zum Aufbau mittels Ober- und Untersummen definiert man die Stieltjes-Obersummen

$$O(\mathcal{Z}, fdg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \ \cdot (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

bzw Stieltjes-Untersummen

$$U(\mathcal{Z}, fdg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \ \cdot (g(t_i) - g(t_{i-1}))\,.$$

Im Gegensatz zum Riemann-Integral ist bei diesen Netzen die Konvergenz im Allgemeinen nicht gewährleistet. Die Monotonie der Ober- bzw. Untersummen ist beispielsweise nur bei monoton wachsendem g zu erwarten.

Man definiert das Darboux-Stieltjes Integral daher folgendermaßen

Definition 3.1. Stimmen $\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}, fdg)$ und $\inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}, fdg)$ überein, nennt man diesen Wert **Darboux-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g über $[a, b]$.

3.2 Das Riemann-Stieltjes-Integral

Ebenfalls analog zum Aufbau des Riemann-Integrals definiert man für eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ und eine Belegung τ die Riemann-Stieltjes-Summen als

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_j)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

Konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen in der Feinheit unabhängig für alle Belegungen gegen denselben Grenzwert, nennt man den Grenzwert **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g über $[a, b]$ und schreibt

$$\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) = \int_a^b fdg$$

Anders als beim herkömmlichen Riemann-Integral stimmen die verschiedenen Integralbegriffe (Darboux, Riemann) hier nicht überein, wie man anhand des folgenden Beispiels sieht.

Beispiel 3.2. Sei $f = \mathbb{I}_{(0,\infty)}$ und $g = \mathbb{I}_{[0,\infty)}$. Die Ober- und Untersummen für $\int_{-1}^{1} fdg$ sehen in Abhängigkeit von $\mathcal{Z}$ folgendermaßen aus:
ang. $0 \in \mathcal{Z}$; d.h. es gibt ein i, sodass $t_i = 0$:

$$U(\mathcal{Z}, fdg) = \ldots + \underbrace{\inf_{[t_{i-1},0]} f}_{0} \cdot (1-0) + \inf_{[0,t_{i+1}]} f(1-1) + \ldots = 0$$

$$O(\mathcal{Z}, fdg) = \ldots + \underbrace{\sup_{[t_{i-1},0]} f}_{0} \cdot (1-0) + \sup_{[0,t_{i+1}]} f(1-1) + \ldots = 0$$

für $0 \notin \mathcal{Z}$ ergibt sich für $t_{i-1} < 0 < t_i$:

$$U(\mathcal{Z}, fdg) = \ldots + \underbrace{\inf_{[t_{i-1},t_i]} f}_{0} \cdot (1-0) + \ldots = 0$$

$$O(\mathcal{Z}, fdg) = \ldots + \underbrace{\sup_{[t_{i-1},t_i]} f}_{1} \cdot (1-0) + \ldots = 1$$

$\sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) = \inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) = 0$, das Darboux-Stieltjes-Integral existiert also und ist gleich 0.

Wählt man allerdings als Belegung $\tau_i = t_i$ (sup), erhält man als Riemann-Stieltjes-Summe die Obersumme. Infimum und Supremum der Obersummen stimmen aber nicht überein, das Riemann-Stieltjes-Integral existiert also nicht.

Satz 3.3. Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so gilt:

1. $U(\mathcal{Z}, fdg) \leq \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) \leq O(\mathcal{Z}, fdg)$
2. Existiert das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b fdg$, dann auch das Darboux-Stieltjes-Integral und die beiden Werte stimmen überein.

3.3 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Das Riemann-Stieltjes Integral erfüllt einige wichtige Eigenschaften, die man sich von einem Integral erwartet.

Satz 3.4. Linearität Das Riemann-Stieltjes-Integral ist linear in f und g:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dg = \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg$$

$$\int_a^b f d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f dg_2$$

Satz 3.5. Aufteilen des Integrals

1. Existiert $\int_a^b fdg$, so gilt für jedes $c \in [a,b]$

$$\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg$$

2. Existieren die Integrale $\int_a^c fdg$ und $\int_c^b fdg$, und ist entweder f oder g an c stetig, so existiert auch $\int_a^b fdg$ und es gilt:

$$\int_a^c fdg + \int_c^b fdg = \int_a^b fdg$$

Wie man anhand des letzten Beispiel sehen kann, spielt die Stetigkeit von f und g für das Riemann-Stieltjes-Integral ein große Rolle. Die nächsten beiden Sätze sind aus Beispiel 3.2 motiviert.

Satz 3.6. Existiert das Integral $\int_a^b fdg$, so sind f und g an keiner Stelle gemeinsam unstetig.

Satz 3.7. Das Riemann-Stieltjes-Integral nach konstanten Funktionen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleich 0 für alle f.

Beweis Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung. Dann ergibt sich für die Riemann-Stieltjes-Summe

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, f dg) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_j) \underbrace{(g(t_i) - g(t_{i-1}))}_{=(c-c)=0} = 0.$$

■

3.4 Existenz des Riemann-Stieltjes-Integral

Aus dem letzten Satz folgt somit auch, dass das Riemann-Stieltjes-Integral nach einer konstanten Funktion g für alle f existiert. Ist g nicht konstant, stellt sich natürlich die Frage, für welche f das Integral überhaupt existiert.

Stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar. Das Analogon für Riemann-Stieltjes-Integrale lautet

Satz 3.8. Ist $f \in C^0([a, b])$ und g von beschränkter Variation, d.h. $V_a^b(g) < \infty$, so existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es besteht die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) .$$

Definition 3.9. Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nennt man dabei von beschränkter Variation, wenn gilt

$$V_a^b(g) := sup_{\mathcal{Z} \in Z} \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} |g(t_i) - g(t_{i-1})| < \infty$$

Beweis
Zunächst gilt wegen der Stetigkeit von f

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

Seien Zerlegungen $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ gegeben mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ und $|\mathcal{Z}| < \delta$ (woraus folgt, dass ebenfalls $|\mathcal{Z}'| < \delta$). Die dazugehörigen Belegungen seien τ und τ'.

Für zwei Stützstellen $\tau_i \in \tau$ und $\tau'_j \in \tau'$, die im selben Teilintervall der Zerlegung $\mathcal{Z}$ liegen, folgt dann

$$|\tau_i - \tau'_j| < \delta \Rightarrow |f(\tau_i) - f(\tau'_j)| < \epsilon$$

Weil $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
& |\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}', \tau', fdg)| \\
= & \left| \sum_{i=0}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) - \sum_{j=0}^{n(\mathcal{Z}')} f(\tau_j')(g(t_j') - g(t_{j-1}')) \right| \\
= & \sum_{j=0}^{n(\mathcal{Z}')} \epsilon \cdot (g(t_j') - g(t_{j-1}')) \\
\leq & \epsilon \cdot V_a^b(g)
\end{aligned}$$

Für beliebige Verfeinerungen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ von $\mathcal{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
& |\sigma(\mathcal{Z}_1, \tau_1, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}_2, \tau_2, fdg)| \\
\leq & |\sigma(\mathcal{Z}_1, \tau_1, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg)| + |\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg) - \sigma(\mathcal{Z}_2, \tau_2, fdg)| \\
\leq & 2\epsilon V_a^b(g)
\end{aligned}$$

$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg)$ bildet also ein Cauchy-Netz. Es konvergiert daher, d.h. $\int_a^b fdg$ existiert. Schließlich gilt

$$|\sigma(\mathcal{Z}, \tau, fdg)| \leq \|f\|_\infty \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g)$$

■

Als sehr hilfreich erweist sich der folgende Satz, der die partielle Integration für Riemann-Integrale verallgemeinert, wenn es darum geht entweder das Riemann-Stieltjes Integral konkret zu berechnen oder dessen Existenz zu zeigen.

Satz 3.10. Partielle Integration
Mit $\int_a^b fdg$ existiert auch $\int_a^b gdf$, und es gilt

$$\int_a^b fdg + \int_a^b gdf = fg|_a^b$$

Beweis Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit $|\mathcal{Z}| < \epsilon$ und τ die dazugehörige Belegung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n(\mathcal{Z})} g(\tau_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\
+ & \sum_{i=0}^{n(\mathcal{Z})} f(t_{i-1})(g(\tau_i) - g(t_{i-1})) + f(t_i)(g(t_i) - g(\tau_i)) \\
= & f(b)g(b) - f(a)g(a) = fg|_a^b
\end{aligned}$$

Die erste Summe stellt $\sigma(\mathcal{Z}, \tau, gdf)$ dar. Die zweite Summe ist ebenfalls eine Riemann-Stieltjes-Summe $\sigma(\mathcal{Z}', \tau', fdg)$ mit einer Verfeinerung $\mathcal{Z}'$ von $\mathcal{Z}$, die neben den Punkten von $\mathcal{Z}$ auch jene der Belegung τ enthält. Als Belegung τ' wähle man abwechselnd den linken bzw. rechten Endpunkt des Teilintervalls.

Wegen der Feinheit von $\mathcal{Z}$ gilt

$$|\sigma(\mathcal{Z}', \tau', fdg) - \int_a^b fdg| \leq \epsilon.$$

Verwendet man die obige Gleichung, gilt sogar

$$|\left(fg|_a^b - \sigma(\mathcal{Z}, \tau, gdf)\right) - \int_a^b fdg| \leq \epsilon.$$

$\int gdf$ existiert also und ist gleich $fg|_a^b - \int_a^b fdg$.

■

Eine andere praktikable Methode zum Berechnen von Riemann-Stieltjes-Integralen bietet schließlich noch der folgende Satz.

Satz 3.11. Transformation in ein Riemann-Integral
Sei f Riemann-integrierbar und $g \in C^1([a,b])$, so existiert das Integral $\int_a^b fdg$, und es gilt

$$\int_a^b fdg = \int_a^b fg'dt\,.$$

Umgekehrt kann jedes Integral $\int_a^b fhdt$ in ein Riemann Stieltjes-Integral $\int_a^b fdg$ umgeschrieben werden, mit g Stammfunktion von h.

Beweis g ist stetig differenzierbar und damit stetig, also gilt

$$|\tau - x| < \delta \Rightarrow |g(\tau) - g(x)| < \epsilon$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt außerdem

$$\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = g'(x) \quad \text{für ein } x \in [t_{i-1}, t_i]$$

Weiters ist f Riemann-integrierbar, also $\exists K > 0 : |f| \leq K$.

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{Z}, \tau) &= \sum f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \\ &= \sum f(\tau_i) g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Vergleicht man die letzte Summe mit der Riemann-Summe

$$\sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} f(\tau_i)g'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

ist die Differenz wegen $|g'(\tau_i) - g'(x_i)| < \epsilon$ kleiner als $K \cdot \epsilon \cdot (b - a)$.

Diese Abschätzung gilt für alle Verfeinerungen der Zerlegung, also sind die Integrale gleich.

■

3.5 Mittelwertsätze des Riemann-Stieltjes-Integrals

Eine wichtige Eigenschaft von Integralen wurde bisher noch nicht behandelt: die Isotonie. Wie man sich leicht überlegen kann, ist die Differenz $g(t_i) - g(t_{i-1})$ für monoton wachsendes g immer positiv. Ist somit $f_1 \leq f_2$, gilt auch $\sigma(\mathcal{Z}, \tau, f_1 dg) \leq \sigma(\mathcal{Z}, \tau, f_2 dg)$ bzw. auch $\int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg$.

Durch die elementare Abschätzung $\inf_{[a,b]} f \leq f(t) \leq \sup_{[a,b]} f$ erhält man damit den ersten Mittelwertsatz

Satz 3.12. erster Mittelwertsatz Existiert das Integral $\int_a^b f dg$ und ist g auf $[a, b]$ monoton wachsend, so ist

$$\int_a^b f dg = \mu \int_a^b dg \quad \text{mit } \inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f$$

Bemerkung 3.13. Ist f stetig, nimmt es nach dem Zwischenwertsatz den Wert μ auch an.

Satz 3.14. zweiter Mittelwertsatz Sei f monoton und g stetig auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg$$

Beweis Angenommen f ist monoton wachsend (wenn nicht gehe man von f zu $-f$ über). Daher gilt für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(b) - f(a)$$

Da $\mathcal{Z}$ beliebig, folgt $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$. f ist somit von beschränkter Variation.

Nach Satz 3.8 existiert das Integral $\int_a^b g df$ und nimmt nach dem ersten Mittelwertsatz den Wert $g(c)\left(f(b) - f(a)\right)$ für ein $c \in [a,b]$ an. Damit existiert auch $\int_a^b f dg$ und es gilt schließlich

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= fg|_a^b - \int_a^b g df \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c)(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Womit die behauptete Gleichung gezeigt ist.

■

Beispiel 3.15.

$$\int_0^2 x(x+2) d\ln(1+x)$$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ ist Riemann-integrierbar auf $[0,2]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^2 x(x+2) d\ln(1+x) &= \int_0^2 \frac{x^2+2x}{1+x} dx \\ &= \int_0^2 (1+x) - \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)|_0^2 = \ln(3) \end{aligned}$$

Das Riemann-Stieltjes Integral hat interessante Eigenschaften an Unstetigkeitsstellen von g. Es gilt folgender Satz

Satz 3.16. Ist f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und g auf $[a,b]$ bis auf endliche viele Sprungstellen $c_1, \ldots, c_n$ mit Sprunghöhen α_j differenzierbar mit $\int_a^b |g'(x)| dx < \infty$, so folgt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx + \sum_{j=1}^n \alpha_j f(c_j)$$

4 Das stochastische Integral

Was, wenn man nicht nach einer (deterministischen) Funktion $g(t)$, sondern nach einem stochastischen Prozess $X_t(\omega) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ integriert? Wünschenswerterweise sollte das Ergebnis wieder eine Zufallsvariable sein. Ein solches Integral nennt man auch **stochastisches Integral**. Hier sollen vor allem Integrale nach einer Brown'schen Bewegung behandelt werden.
Solche Integrale werden oft zur Lösung sogenannter stochastischer Differentialgleichungen eingesetzt. Auf solche trifft man nicht nur in der Finanzmathematik, sonder auch in den klassischen Ingenieurswissenschaften, wie beispielsweise der Nachrichtentechnik. (siehe auch [MIKO],[BAUER] oder [OKSEN])

Dabei ist von vornherein noch gar nicht klar, ob ein solches Integral überhaupt existieren sollte. Für die Brown'sche Bewegung gilt nämlich folgender Satz.

Satz 4.1. Eigenschaften der Brown'schen Bewegung

1. Die Brown'sche Bewegung ist fast sicher von unendlicher Variation.
2. Die Brown'sche Bewegung ist fast sicher nirgends differenzierbar.

Nach den herkömmlichen Methoden ist die Existenz also nicht gewährleistet. Tatsächlich existiert sogar das stochastische Integral $\int_0^t B_s dB_s$, das im folgenden konkret berechnet werden soll. Dafür wird zunächst folgendes Resultat aus der stochastischen Analysis benötigt

Lemma 4.2. Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Dann konvergiert folgender Ausdruck im $\mathcal{L}^2$ in der Feinheit der Zerlegung für das Intervall $[a, b]$

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 = d \cdot (b - a)$$

Beispiel 4.3. $\int_0^t B_s dB_s$
Wir fassen das Integral zunächst als Riemann-Stieltjes Integral auf. Bildet man die zugehörigen Riemann-Stieltjes-Summen und wählt als Belegung $\tau_i = t_{i-1}$, d.h. jeweils den linken Randpunkt, ergibt sich

$$\sigma(\mathcal{Z}, \tau, B_s dB_s) = \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} B_{t_i} - B_{t_{i-1}}^2$$

mithilfe der Binomischen Formel

$$\begin{aligned} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 &= B_{t_i}^2 + B_{t_{i-1}}^2 - 2B_{t_i} B_{t_{i-1}} \\ B_{t_i} B_{t_{i-1}} &= \frac{1}{2} B_{t_i}^2 + \frac{1}{2} B_{t_{i-1}}^2 - \frac{1}{2}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

gilt daher ($B_0 = 0$)

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{Z}, \tau, B_s dB_s) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}B_{t_i}^2 - \frac{1}{2}B_{t_{i-1}}^2 - \frac{1}{2}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\end{aligned}$$

Lässt man die Feinheit gegen 0 gehen, ergibt sich daher

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

für $\tau_i = t_{i-1}$ als gewählte Belegung.

Tatsächlich ist der Wert des Integrals nicht unabhängig von der Wahl der Belegung.

1. $\tau_i = t_i$ (linker Randpunkt) liefert das Itô-Integral
2. $\tau_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$ liefert das Stratonovich-Integral

Da diese Art der Integralrechnung sehr mühsam ist (ein wesentlicher Teil der Arbeit des vorigen Beispiels wurde durch das Lemma geleistet), betrachtet man das stochastische Integral zuerst für einfache Funktionen.

4.1 das Itô-Integral für einfache Funktionen

Man definiert daher zuerst ein stochastisches Integral für **einfache Funktionen**. Das sind Funktionen von der Bauart

$$C(t, \omega) = \sum_{i=1}^{k} e_i(\omega)\mathbb{I}_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$$

mit $\mathcal{F}_{t_i}$-meßbaren Zufallsvariablen $e_i : \Omega \to \mathbb{R}$

Das **Itô-Integral** ist dann gegeben durch

$$\int_0^t C(s, \omega) dB_s(\omega) = \sum_{i=1}^{k} e_i(\omega)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

Das Itô-Integral besitzt für einfache Funktionen einige wichtige Eigenschaften

Satz 4.4.

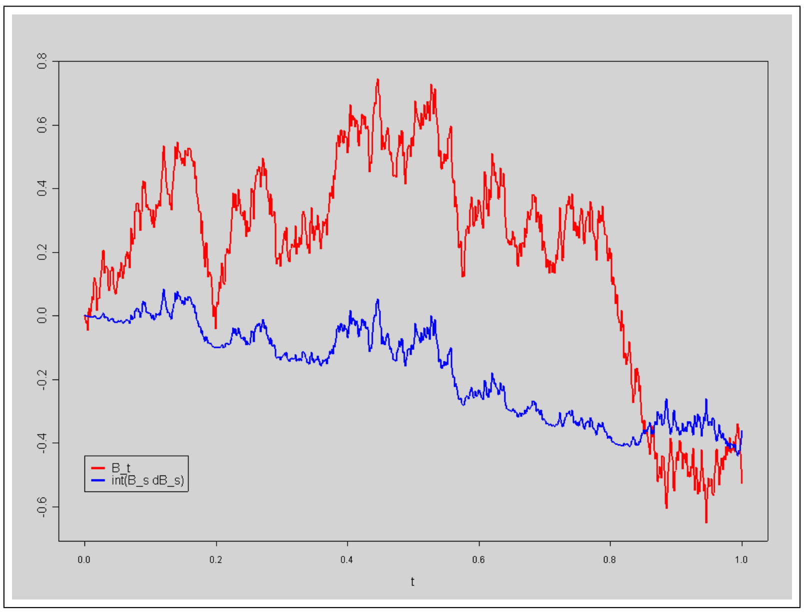
1. Der Wert des stochastischen Integrals ist unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktionen.

2. Das stochastische Integral ist linear im Integranden.
3. Das stochastische Integral nach einer Brown'schen Bewegung ist stetig bezüglich der oberen Grenze.

Bemerkung 4.5. Eigenschaft 3 folgt aus der Stetigkeit der Pfade der Brown'schen Bewegung.

Die Form des Itô-Integrals erinnert auch stark an eine Martingaltransformation bezüglich der Filtration der Brown'schen Bewegung. Es gilt

Satz 4.6. Martingaleigenschaft des Itô-Integrals
Das Itô-Integral $\int_0^t C_s dB_s, t \in [0,T]$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration der Brown'schen Bewegung $\mathcal{F}_t$.



Eine der wichtigsten Eigenschaften des Itô-Integral ist die sogenannte Itô-Isometrie

Satz 4.7. Itô-Isometrie
Sei $C_s(\omega)$ eine einfache Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t C_s dB_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[C_s^2\right] ds$$

4.2 der $V_{\mathcal{F}}$

Wir wollen eine neue Klasse von Funktionen einführen

Definition 4.8. Sei $V_{\mathcal{F}}$ die Menge aller $C : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

1. C ist adaptiert an $\mathcal{F}_t$
2. $\int_0^t \mathbb{E}\left[C_s^2\right] ds < \infty$

Durch die Itô-Isometrie ist nun möglich, auch ein Itô-Integral für Funktionen aus dem $V_{\mathcal{F}}$ zu definieren (dieser enthält auch die Menge der einfachen Funktionen). Der letzte Satz zeigt nämlich, dass die einfachen Funktionen auch dicht im $V_{\mathcal{F}}$ bezüglich der $\mathcal{L}^2$-Norm liegen.

Satz 4.9. Sei $C \in V_{\mathcal{F}}$. Dann existiert eine Folge $C^{(n)}$ einfacher Funktionen, sodass

$$\int_0^t \mathbb{E}[\left(C - C^{(n)}\right)^2] \to 0$$

Literatur

[KALTEN] Michael Kaltenback: **Analysis 2**, Vorlesungsskriptum (Vorlesung an der TU-Wien), Wien 2008

[MLITZ] Rainer Mlitz: **Analysis 2**, Vorlesungsskriptum (Vorlesung an der TU-Wien), Wien 2006

[WALTER] Wolfgang Walter: **Analysis 2**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995

[MIKO] Thomas Mikosch: **Elementary Stochastic Calculus**, World Scientific Press, 1998

[BAUER] Heinz Bauer: **Wahrscheinlichkeitstheorie**, de Gruyter, Berlin 2001

[OKSEN] Bernt Oksendal: **Stochastic Differential Equations, Sixth Edition**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007