Fondsgebundene Lebensversicherung

Philip Gruber
e0725861

Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der fondsgebundenen Lebensversicherung betrachten wir Modelle, bei denen der Wert der Versicherungspolizze nicht mehr als deterministisch angenommen wird, sondern von einem zugrundeliegenen Fonds abhängig ist.
Allgemein wird der Wert der Polizze also von der Anzahl der Leistungsanteile an einem Fonds $N(t)$ und dem Wert eines Anteils zur Zeit t $S(t)$ abhängen.
Wir werden als Erstes die sogenannten "Unit-Linked"-Produkte betrachten. Bei diesen bietet der Versicherer keine Zins- oder sonstige Garantien auf das Versicherungsprodukt an. Das Kapitalmarktrisiko wird also nicht übernommen und verbleibt beim Versicherten.
Später werden wir auch noch Produkte mit Garantien betrachten. Diese ähneln den Optionen aus der Finanzmathematik, weswegen wir einige Definitionen und Ergebnisse aus dieser übernehmen.
Zuerst aber eine kurze Wiederholung zur Lebensversicherungsmathematik.

2 Grundlegende Ergebnisse der Lebensversicherungsmathematik

Da wir im Folgenden viele Begriffe der klassischen Lebensversicherungsmathematik wie Sterblichkeit, Nettoeinmalprämie einer Todesfall-/Erlebensfallversicherung usw. verwenden, hier eine Wiederholung der wichtigsten Ergebnisse.

2.1 Modell für die zukünftige Lebensdauer

Definition 2.1 *Die zukünftige Lebensdauer einer Person im Alter x wird durch die Zufallsvariable T_x bezeichnet. $G_x(t) = \mathbb{P}[T_x \leq t]$ ist die Verteilungsfunktion von T_x, $g_x(t)$ bezeichnet dann die zugehörige Dichtefunktion.*

Definition 2.2 *Die Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen innerhalb t Jahre zu sterben wird mit ${}_tq_x$ bezeichnet. (${}_tq_x = G_x(t)$)*

Definition 2.3 *Die Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen t Jahre zu überleben wird mit ${}_tp_x$ bezeichnet. (${}_tp_x = 1 - G_x(t)$)*

Definition 2.4 *Die Sterblichkeitsintensität eines x-Jährigen im Alter x+t ist definiert durch $\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1-G_x(t)}$*

Bemerkung 2.5 *Ein paar einfache Zusammenhänge:*

- ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$
- $\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_x)$
- ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds}$

2.2 Versicherungsarten

Wir wollen im Folgenden sowohl die temporäre Todesfallversicherung als auch die Erlebensfallversicherung (welche laut Definition ebenfalls temporär ist) erläutern. Zuerst betrachten wir den diskreten Fall, werden danach aber auch die stetige Todesfallversicherung definieren. Solange nicht anders angegebeben, wird die Versicherungssumme auf 1 gesetzt, andere Versicherungssummen lassen sich dann einfach durch passende Multiplikation erreichen.

2.2.1 Erlebensfallversicherung

Bei einer Erlebensfallversicherung (engl. pure endowment) über n Jahre wird die Versicherungssumme genau dann ausbezahlt, wenn der Versicherungsnehmer nach n Jahren noch am Leben ist. Der Barwert ist folglich:

$$\text{Barwert:} \quad Z = \begin{cases} v^n & \text{wenn} \quad K_x \geq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Daraus folgt für die Nettoeinmalprämie

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \mathbb{E}[Z] = v^n \, {}_np_x \tag{2}$$

2.2.2 Temporäre Todesfallversicherung

Bei einer temporären Todesfallversicherung über n Jahre erfolgt die Auszahlung der Versicherungssumme bei Tod des Versicherungsnehmers innerhalb von n Jahren.

$$\text{Barwert:} \quad Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{wenn} \quad K_x < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Dies liefert für die Nettoeinmalprämie

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \tag{4}$$

2.2.3 stetige Todesfallversicherung

Bis jetzt haben wir nur mit Auszahlung am Ende des Todesjahres gerechnet (diskrete Formeln!). Nehmen wir nun an, dass die Auszahlung direkt zum Todeszeitpunkt erfolgt, verändern sich die Formeln des Barwerts und der NEP der Todesfallversicherung zu

$$\text{Barwert:} \quad Z = c(T_x)\, v^{T_x} \tag{5}$$

$$\text{Nettoeinmalprämie:} \quad \overline{A}_x = \mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty c(t)\, v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt \tag{6}$$

2.3 Das Deckungskapital

Das Deckungskapital zum Zeitpunkt t ist versicherungsmathematisch gesehen der Wert, welcher einem Versicherungsvertrag zum Zeitpunkt t zugeordnet werden kann. Dies ist einerseits für die versicherungstechnischen Rückstellungen wichtig, andererseits bestimmt das Deckungskapital auch den Rückkaufswert in der Lebensversicherung. Für das Deckungskaptial wichtig ist der Begriff des (zukünftigen) Verlustes "L".

Definition 2.6 *${}_tL$ bezeichnet die Differenz aus künftigen Leistungen und künftigen Prämien zum Zeitpunkt t betrachtet und auf t diskontiert. ("zukünftiger Verlust zum Zeitpunkt t")*

Bemerkung 2.7 *Aufgrund des Äquivalenzprinzips gilt zum Zeitpunkt $t = 0$: $\mathbb{E}[L] = 0$.*

Definition 2.8 (Deckungskapital) *Der Erwartungswert des zukünftigen Verlustes bezogen auf den Zeitpunkt t unter der Bedingung, dass der Versicherte zum Zeitpunkt t noch am Leben ist, heißt Deckungskapital. Es gilt:*

$$ {}_tV_x := \mathbb{E}[{}_tL_x | \, T_x > t] \tag{7} $$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten das Deckungskapital darzustellen. Da wir im Folgenden die prospektive Darstellung verwenden werden, wollen wir diese hier erläutern. Bei der prospektiven Darstellung betrachten wir die Differenz der zukünftigen Leistungen und der zukünftigen Prämien.

Definition 2.9 (prospektive Darstellung) *Deckungskapital (prospektive Darstellung) für eine allgemeine Versicherung mit Ablebensleistung c_t, Erlebensleistung e_t und Prämie P_t gilt:*

$$ {}_tV_x = \sum_{k=0}^{\infty} c_{t+k+1} \, v^{k+1} \, {}_kp_{x+t} \, q_{x+k+t} - \sum_{k=0}^{\infty} (P_{k+t} - e_{k+t}) \, v^k \, {}_kp_{x+k} \tag{8} $$

2.4 Die klassische Thielesche Differentialgleichung

Satz 2.10 (Thielesche Differentialgleichung) *Die Nettoeinmalprämie einer lebenslangen stetigen Todesfallversicherung $\overline{A}_x$ genügt der folgenden Differentialgleichung*

$$ \frac{\partial \overline{A}_x}{\partial x} = \overline{A}_x \, (\delta + \mu_x) - \mu_x \tag{9} $$

Die Thiel'sche Differentialgleichung beschreibt also die Entwicklung der Nettoeinmalprämie einer stetigen Todesfallversicherung abhängig von der Zeit t. Der Ausdruck "$\overline{A}_x \, (\delta + \mu_x)$" der rechten Seite der Gleichung steht hier für den Zins und die Todesfallleistung und der Term "$-\mu_x$" bezeichnet den Sterblichkeitsgewinn, welcher auch "Anerbe" genannt wird.

3 (pure) Unit Linked-Produkte

Zu Beginn unserer Betrachtung fondsgebundener Lebensversicherungen wollen wir Produkte betrachten, die nur von einer Wertschrift oder einem Fonds abhängen ohne zusätzliche Garantien anzubieten. Bei Eintritt des versicherten Ereignisses versprechen einem diese sogenannten „Unit Linked“ Produkte eine bestimmte Anzahl von Anteilen eines Fonds. Wir definieren:

N(t)	Anzahl der Leistungsanteile zur Zeit t
S(t)	Wert eines Anteils zur Zeit t

Im Folgenden nehmen wir an, dass N(t) deterministisch ist.

Dies ergibt für eine reine Todesfallversicherung folgende Gegenüberstellung

	Traditionell	(pure) Unit Linked
Auszahlung	$C(t) = 1$	$C(t) = S(t)$
Wert(Zeit 0)	$\pi_0(t) = exp(-\delta t)$	$\pi_0(t) = S(0)$
Einmalprämie	$\mathbb{E}[\int_0^T \pi_0(t) d(\mathcal{X} T_x \leq t)]$	$\mathbb{E}[\int_0^T \pi_0(t) d(\mathcal{X} T_x \leq t)]$
	$= \int_0^T exp(-\delta t)_t p_x \mu_{x+t} dt$	$= S(0) \int_0^T tp_x \mu_{x+t} dt$
		$= (1 - {}_T p_x) S(0)$

Bemerkung 3.1 *Hier ist schön zu sehen, dass für den Versicherer bei Unit-Linked Produkten das finanzielle Risiko geringer ist als bei dem traditionellen Produkt, welches ja eine Zinsgarantie beinhaltet.*
Desweiteren ist anzumerken, dass bei der Berechnung der Einmalprämie implizit angenommen wurde, dass der auf die Zeit 0 diskontierte Wert des Fonds zur Zeit t, dessen Wert zur Zeit 0 entspricht. Hieraus wird ersichtlich, dass wir uns für die Berechnung einer Prämie zuerst Gedanken über den Wert bzw. Preis einer Wertschrift machen müssen.

Da wir im Folgenden auch Produkte mit Garantien betrachten werden, nun auch noch zwei Beispiele, wie diese aussehen können.

Wird dem Versicherten zumindest die Anzahl der einbezahlten Prämien als payoff garantiert (sog. Rückgewähr der einbezahlten Prämien) so könnte man die Garantie wie folgt notieren

$$G(t) = \int_0^t \bar{p}(s)ds \tag{10}$$

wobei $\bar{p}$ die Prämiendichte zur Zeit s bezeichnet.

Allgemeiner kann man auch eine Garantie betrachten, welche der Höhe der mit einem fixen Zinssatz verzinsten Prämien entspricht:

$$G(t) = \int_0^t \exp(r(t-s))\bar{p}(s)ds \tag{11}$$

In beiden Fällen hat die Auszahlungsfunktion die Form

$$C(t) = \max(S(t), G(t)) \tag{12}$$

Entwickelt sich der Fonds gemäß eines stochastischen Prozesses mit Wahrscheinlichkeitsmaß P, könnte man geneigt sein den diskontierten Wert von C(t) so anzuschreiben:

$$\pi_0(C(t)) = \mathbb{E}^P[\max(S(t), G(t))]$$

Wir werden später aber sehen, dass dies nicht so einfach ist und in einem fairen Markt gelten muss:

$$\pi_0(C(t)) = \mathbb{E}^Q[\max(S(t), G(t))]$$

wobei Q ein zu P äquivalentes Martingalmaß ist.

Finanzmathematisch handelt es sich bei $C(t)$ um eine Option. Um diese zu bepreisen benötigen wir einige Ergebnisse aus der Finanzmathematik.

4 Grundbegriffe der Finanzmathematik

In diesem Abschnitt wollen wir einen Einblick in die moderne Finanzmarkttheorie gewinnen. Wir werden uns im Folgenden einerseits der Modellierung von Aktienkursen widmen und hierfür die Brownsche Bewegung einführen, andererseits werden wir sowohl Preissysteme in diskreter als auch stetiger Zeit betrachten und diese über die "arbitrage free pricing"-Theorie bepreisen.

4.1 Modellierung von Aktienkursen

Es gibt viele Möglichkeiten Aktienkurse mithilfe stochastischer Prozesse zu modellieren. Wir wollen im Folgenden die geometrische Brownsche Bewegung $(S_t(\omega))$ verwenden. Dazu müssen wir erst die Standard Brownsche Bewegung $W(t)$ definieren

Definition 4.1 (Brownsche Bewegung) *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ein stochastischer Prozess $W(t)_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung, genau dann, wenn folgendes erfüllt ist:*

- $W(0) = 0$ *fast sicher*
- *Die Pfade $t \mapsto W(t)$ sind fast sicher stetig*
- $W(t)$ *hat unabhängige, stationäre Inkremente*
- *Alle Inkremente sind normalverteilt mit:*

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0 \quad Var[W_t - W_s] = t - s \text{ für alle } 0 \leq s \leq t \tag{13}$$

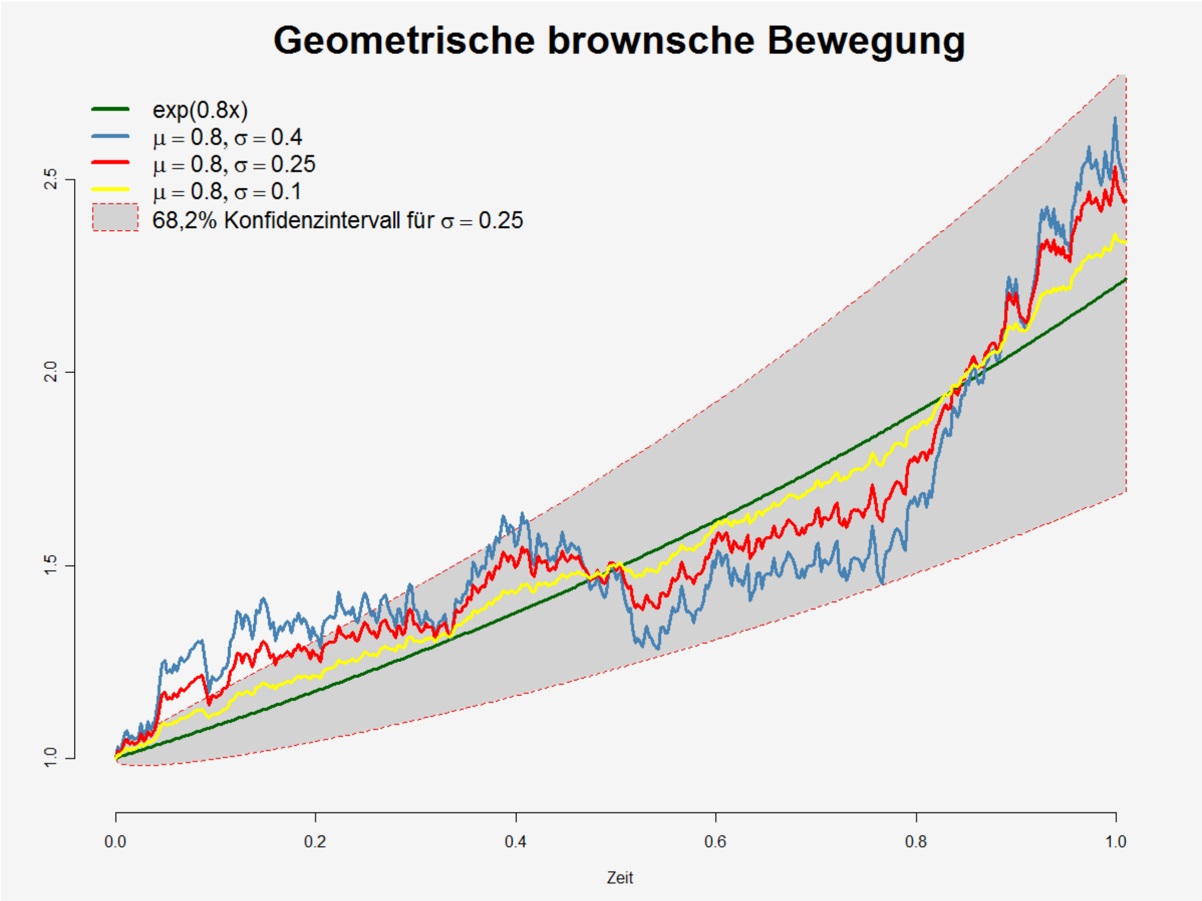
Nun können wir die geometrische Brownsche Bewegung $(S_t(\omega))$ definieren:

Definition 4.2 (geometrische Brownsche Bewegung) *Die geometrische Brownsche Bewegung $(S_t(\omega))$ setzt sich zusammen aus der Brownschen Bewegung W(t), dem Aktienkurs zu Beginn (t=0), einem Driftterm η und einer Volatilität σ:*

$$S(t) = S(0) \cdot \exp[\,(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)] \tag{14}$$

Bemerkung 4.3 *Die Volatilität σ bezeichnet in der Statistik die Schwankung von Zeitreihen, steuert also den Einfluss des Zufalls auf den Prozess $S(t)$. Der Driftterm η beschreibt die deterministische Tendenz des Prozesses. Ist $\eta > 0$, so wächst der Wert von S in Erwartung, ist er negativ, fällt S tendenziell.*

Folgend eine Grafik welche demonstriert, wie eine geometrische Brownsche Bewegung bei verschiedener Wahl der Parameter aussehen kann.



Eng verbunden mit obigen Themen ist auch der Begriff der σ-Algebra. In der Finanzmathematik stellen wir oft bestimmte Bedingungen an diese, wir definieren:

Definition 4.4 (Filtration) *Eine Familie* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\tau}$ *wobei* $\tau \subset \overline{\mathbb{N}}_0$ *heißt Filtration auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *falls*

- $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *ist* σ*-Algebra*
- $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *für* $s \leq t$

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\tau}, \mathbb{P})$ *heißt dann gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum*

Dazu verwandt sind folgende Begriffe:

Definition 4.5 *Ein stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\in\tau}$ *heißt*

- *adaptiert, falls* X_t *ist* $\mathcal{F}_t$*-messbar*
- *previsibel, fallls* X_t *ist* $\mathcal{F}_{t-1}$*-messbar*

Zuletzt wollen wir uns noch dem Begriff des Martingals widmen und diesen gemäß der Finanzmathematik definieren

Definition 4.6 (Martingal) *Ein stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\in\tau}$ *auf einem gefiltertem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\tau}, Q)$ *heißt (Q-) Martingal genau dann, wenn*
1. $\mathbb{E}^Q[\mid X_t| \,] < \infty \quad \forall t \in \tau$
2. $X_s = \mathbb{E}^Q[X_t| \, \mathcal{F}_s] \quad 0 \leq s \leq t \leq T$

Definition 4.7 *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf* $(\Omega, \mathcal{F})$ *heißt Martingalmaß, falls der diskontierte Preisprozess* $(X_t)_{t\in\tau}$ *ein (Q-) Martingal ist.*

4.2 Optionen

Neben dem Aktienkurs selbst, ist für uns auch die Entwicklung der Werte bzw Preise von Optionen von Interesse. Optionen sind Wertschriften mit denen man das Recht, aber nicht die Pflicht erhält, ein Wertpapier oder ein anderes Produkt zu einem späteren Zeitpunkt zu einem vereinbarten Preis zu kaufen bzw. zu verkaufen.
Folgend zwei Beispiele europäischer Optionen

- Europäische Call-Option $H = \max(S_T - c, 0)$
- Europäische Put-Option $H = \max(c - S_T, 0)$

Wie wir bereits gesehen haben, wird besonders die Bepreisung solcher Optionen für uns von Interesse sein. Dieser widmen wir uns in den folgenden (Unter-) Kapiteln, wobei wir zuerst den diskreten Fall betrachten werden, um danach über das Black-Scholes Marktmodell auch zur Bepreisung von Optionen in stetigen Märkten zu kommen.

4.3 Preissysteme

4.3.1 Preissysteme in diskreter Zeit

Für dieses Kapitel werden folgende wichtige Annahmen getroffen, welche den Grundrahmen unseres Finanzmodells bilden

- Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Ω endlich
- $P(\omega) > 0 \;\; \forall\, \omega \in \Omega$
- Es sei ein endlicher Zeithorizont T fixiert, an dem alle Handelsgeschäfte aufhören.
- Die Filtration $\mathcal{F}_t$ sei die σ-Algebra der zur Zeit t beobachteten Ereignisse

Den Verlauf von k $< \infty$ Wertschriften modellieren wir jeweils mittels eines stochastischen Prozesses $S^k \;\; \forall k$. Der Vektor S enthält den Verlauf der einzelnen Wertschriften zu den diskreten Zeitpunkten $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$.

$$S = \{S_t,\; t = 0, 1, 2, \ldots, T\} \, \text{mit Komponenten } \, S^0, S^1, \ldots, S^k \tag{15}$$

Es ist vernünftig zu verlangen, dass wir zum Zeitpunkt t den Verlauf von S in der Vergangenheit kennen. Darum gilt die Grundannahme

- jedes S^j ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$

Die nullte Wertschrift nimmt einer Sonderstellung ein, sie wird mit

- $S_t^0 = (1 + r)^t$

definiert und entspricht damit einem „Bankkonto", auf welchem risikofrei zu einem fixierten Zinssatz r angelegt werden kann.

Der risikofreie Diskontierungsfakter β_t ist dann definiert als

$$\beta_t = \frac{1}{S_t^0} = (1 + r)^{-t} \tag{16}$$

Nachdem diese Grundlagen für unseren Markt festgelegt sind, möchten wir den Begriff einer Handelsstrategie definieren

Definition 4.8 (Handelsstrategie) *Eine Handelsstrategie (engl. trading strategy) ist ein previsibler* $(\phi_t \in \mathcal{F}_{t-1})$ *Prozess* $\Phi = \{\phi_t,\; t = 1, 2, \ldots, T\}$ *mit Komponenten* ϕ_t^k.

ϕ_t^k *interpretieren wir als die Anzahl der Wertschriften k, welche wir zwischen* $[t-1, t[$ *besitzen.*
ϕ_t *nennt man daher auch Portfolio zur Zeit t.*

Betrachtet man das Intervall $[t-1, t[$, so beträgt der Gewinn $\phi_t \cdot \Delta S_t$, wobei $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$. Führen wir diesen Gedankengang fort, lässt sich der totale Gewinn im Intervall $[0, t]$ darstellen als:

$$G_t(\phi) = \sum_{\tau=1}^{t} \phi_\tau \cdot \Delta S_\tau \tag{17}$$

Wir setzen $G_0(\phi) = 0$ und nennen $(G_t)_{t \geq 0}$ Gewinn zu t.

Definition 4.9 *Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzierend, falls*

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t \qquad \forall t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{18}$$

Diese Definition ist wichtig für die folgende Festlegung, welche beschreibt welche Arten von Handelsstrategien für uns von Bedeutung sind.

Definition 4.10 *Eine Handelsstrategie ist zulässig, falls sie einerseits selbstfinanzierend ist, und andererseits*

$$V_t(\phi) := \begin{cases} \phi_t \cdot S_t, & \text{falls } t = 1, 2, \ldots, T \\ \phi_1 \cdot S_0, & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

nicht negativ ist. Φ *ist die Menge der zulässigen Handelsstrategien.*

Bemerkung 4.11 *Wir betrachten also nur Handelsstrategien, welche nicht zum Konkurs führen und welchen kein Geld zu- oder abgeführt wird.*

Definition 4.12 *Unter einer Bezugsvariablen wollen wir eine positive Zufallsvariable X verstehen.* $\mathcal{X}$ *bezeichne die Menge aller Bezugsvariablen.*

Die Zufallsvariable X ist erreichbar, falls es eine zulässige Handelsstrategie $\phi \in \Phi$ *gibt, welche diese erzeugt, d.h.*

$$V_T(\phi) = X \tag{19}$$

In diesem Fall sagt man "ϕ *erzeugt X".*

Definition 4.13 *Für eine erreichbare Bezugsvariable X, die durch* ϕ *erzeugt wird, bezeichnen wir mit*

$$\pi = V_0(\phi) \tag{20}$$

ihren Preis.

Bemerkung 4.14 *Dieser Preis muss nicht unbedingt eindeutig sein, wie wir später sehen werden und entspricht dem Startwert des Portfeuilles.*

4.3.2 Arbitrage

Nun kommen wir zu einem zentralen Thema der Finanzmathematik. Eine Arbitragemöglichkeit bedeutet vereinfacht ausgedrückt die Möglichkeit, Gewinn ohne Risiko zu erwirtschaften. Solche Möglichkeiten sollten natürlich in einem vernünftigen Marktmodell nicht bestehen, weswegen wir versuchen werden Märkte zu definieren, in welchen es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.
Dafür müssen wir den Begriff Arbitrage aber erst im mathematischen Sinne definieren:

Definition 4.15 (Arbitrage) *Unter einer Arbitragemöglichkeit verstehen wir ein* $\phi \in \Phi$ *mit*

- $V_0(\phi) = 0$
- $V_T(\phi) \geq 0$
- $P[V_T(\phi) > 0] > 0$

Als nächstes müssen wir definieren, was wir unter einem Preissystem verstehen:

Definition 4.16 (Preissystem) *Eine Abbildung*

$$\pi : \ \mathcal{X} \to [0, \infty[, \qquad X \to \pi(X) \tag{21}$$

heisst genau dann Preissystem, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\pi(X) = 0 <=> X = 0$
- π *ist linear.*
Ein Preissystem nennt man konsistent, falls

$$\pi(V_T(\phi)) = V_0(\phi) \qquad \textit{für alle } \phi \in \Phi \tag{22}$$

Mit Π *bezeichnen wir die Menge der konsistenten Preissysteme.*

Definition 4.17 *Mit* $\mathbb{P}$ *bezeichnen wir die Menge*

$$\mathbb{P} = \{Q \textit{ Maß äquivalent zu } P\textit{, unter welchem } \beta \times S \textit{ ein Martingal ist}\} \tag{23}$$

wobei β *den Diskontierungsfaktor von Zeit* t *nach Zeit 0 bezeichnet. Die Maße* $\mu \in \mathbb{P}$ *heissen* ***äquivalente Martingalmaße***

Folgender Satz zeigt uns nun in welchem Zusammenhang die oben eingeführten Begriffe stehen.

Satz 4.18 *Zwischen den Mengen der konsistenten Preissysteme* $\pi \in \Pi$ *und den Maßen* $Q \in \mathbb{P}$ *existiert eine Bijektion, definiert durch*

1.$\pi(X) = \mathbb{E}^Q[\beta_T X]$

2.$Q(A) = \pi(S_T^0 \mathcal{X}_A)$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

Bevor wir den obigen Satz beweisen, noch zur Erinnerung die Kolmogorovschen Axiome für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P

Definition 4.19 (Kolmogorov Axiome) *Sei* $(\Omega, \mathcal{A})$ *ein Ereignisraum. Eine Funktion* P *heißt Wahrscheinlichkeitsmaß über* $\mathcal{A}$*, wenn gilt:*

(K1) $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$
(K2) $0 \leq P(A) \leq 1 \forall A \in \mathcal{A}$
(K3) $P(\Omega) = 1$ *(Normierungsbedingung)*
(K4) $P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, *wenn* (A_k) *paarweise disjunkt ist.*

Beweis (vlg. [KO]) Wir definieren $\pi(X) = \mathbb{E}^Q[\beta_T X]$ für $Q \in \mathbb{P}$. π ist ein Preissystem, weil P auf Ω strikt positiv und Q zu P äquivalent ist. Zu zeigen bleibt also, dass π konsistent ist. Hierzu sei $\phi \in \Phi$. Dann gilt:
$\beta_T V_T(\phi) =$

$$= \beta_T \phi_T S_T + \sum_{i=1}^{T-1} (\phi_i - \phi_{i+1}) \beta_i S_i$$

$$= \beta_1 \phi_1 S_1 + \sum_{i=1}^{T} \phi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1}),$$

wobei wir verwendet haben, dass ϕ selbstfinanzierend ist. Damit gilt

$\pi(V_T(\phi)) =$

$$= \mathbb{E}^Q[\beta_T V_T(\phi)]$$

$$= \mathbb{E}^Q[\beta_1 \phi_1 S_1] + \mathbb{E}^Q[\sum_{i=2}^{T} \phi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})]$$

$$= \mathbb{E}^Q[\beta_1 \phi_1 S_1] + \sum_{i=2}^{T} \mathbb{E}^Q[\phi_i \mathbb{E}^Q[(\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1}) | \mathcal{F}_{i-1}]]$$

$$= \phi_1 \mathbb{E}^Q[\beta_1 S_1]$$

$$= \phi_1 \beta_0 S_0,$$

Hier haben wir verwendet, dass ϕ previsibel ist, und dass β S unter Q ein Martingal ist. Somit haben wir bewiesen, dass π ein konsistentes Preissystem ist.

Sei nun $\pi \in \Pi$ ein konsistentes Preissystem und Q definiert wie oben. Dann ist $Q(\omega) = \pi(S_t^0 \mathcal{X}(\omega)) > 0$, für alle $\omega \in \Omega$, da $S_t^0 \mathcal{X}(\omega) \neq 0$. Weiterhin ist $\pi(X) = 0 <=> X = 0$ und somit ist Q absolut stetig bezüglich P.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass es sich bei Q um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt. Wir definieren hierzu:

$$\phi^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \phi^k = 0 \ \ \forall k \neq 0.$$

Da ϕ konsistent ist gilt

$1 = V_0(\phi)$
$= \pi((V_T(\phi))$
$= \pi(S_T^0 \cdot 1)$
$= Q(\Omega)$.

Da die Preise auf positiven Bezugsvariablen positiv sind, und da Ω additiv ist, folgen die Kolmogorovschen Axiome, da Ω endlich ist. Per Definition gilt $Q(\omega) = \pi(S_T^0 \cdot \mathcal{X}\{\omega\})$ und somit auch

$$\mathbb{E}[f] = \sum_\omega \pi(S_T^0 \cdot \mathcal{X}(\omega) \cdot f(\omega) = \pi(S_T^0 \cdot \sum_\omega f(\omega)).$$

Für $f = \beta_T X$ gilt also

$$\mathbb{E}^Q[\beta_T X] = \pi(S_T^0 \cdot \beta_T \cdot X) = \pi(X).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\beta_T S_T^k$ für alle k ein Martingal ist. Sei k eine Koordinate und τ eine Stoppzeit. Wir definieren

$\phi_t^0 = \mathcal{X}_{t \leq \tau}$,
$\phi_t^0 = (\frac{S_\tau^k}{S_{tau}^0}) \mathcal{X}_{t > \tau}$.

(Man hält bis zur Zeit τ die Wertschrift k und investiert dann den Erlös in eine risikofreie Anlage.) Es ist einfach zu zeigen, dass die Strategie ϕ sowohl vorhersehbar als auch selbstfinanzierend ist. Es gelten die folgenden Gleichungen

$V_0(\phi) = S_0^k$,
$V_T(\phi) = (\frac{S_\tau^k}{S_\tau^0}) S_T^0$

und weiterhin

$S_0^k = \pi(S_T^0 \cdot \beta_\tau \cdot S_\tau^k)$
$= \mathbb{E}^Q[\beta_\tau \cdot S_\tau^k]$.

Da die obigen Gleichung für eine beliebige Stoppzeit τ gilt, ist $\beta_T S_T^k$ ein Martingal bezüglich Q. $\square$

Nachdem wir diesen zentralen Satz der Finanzmathematik bewiesen haben, wollen wir noch einige wichtige Aussagen ohne Beweise anführen, diese finden sich in der zuständigen Fachliteratur (vgl. zum Beispiel [FS]).

Satz 4.20 *Folgende drei Aussagen sind äquivalent:*

1. *Das Marktmodell lässt keine Arbitrage zu*
2. $\mathbb{P} \neq \emptyset$
3. $\Pi \neq \emptyset$

Bemerkung 4.21 *Obiger Satz bedeudet, dass die Existenz zumindest eines Martingalmaßes bzw. eines konsistenten Preissystems äquivalent dazu ist, dass unser Marktmodell keine Arbitrage zulässt.*

Lemma 4.22 *Falls es eine selbstfinanzierende Strategie $\phi \in \Phi$ mit*

$$V_0(\phi) = 0,\ V_T(\phi) \geq 0,\ \mathbb{E}[V_T(\phi)] > 0 \tag{24}$$

gibt, lässt das Marktmodell Arbitrage zu.

4.3.3 Preissysteme in stetiger Zeit

Für Modelle in stetiger Zeit sind viele Notationen analog zur ihrem diskreten Pendant. Ein großer Unterschied zum diskreten Fall ist aber, dass wir annehmen, dass $\mathbb{P} \neq 0$. Folgend wollen wir einige Definitionen vornehmen.

Definition 4.23

- *Eine Handelsstrategie ϕ bezeichnet einen lokal beschränkten, previsiblen Prozess.*
- *Unter dem der Handelsstrategie ϕ zugeordneten Wertschöpfungsprozess V verstehen wir:*

$$V : \Pi \to \mathbb{R},\ \phi \to V(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{k} \phi_t^i \cdot S_t^i. \tag{25}$$

- *Unter dem Gewinnprozess G verstehen wir:*

$$G : \Pi \to \mathbb{R},\ \phi \to G(\phi) = \int_0^\tau \phi \, dS = \int_0^\tau \sum_{i=0}^{k} \phi^i dS^i \tag{26}$$

- *ϕ ist selbstfinanzierend, falls $V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)$.*

Für die Definition der zulässigen Handelsstrategie verwenden wir folgende Notation:

$Z_t^i = \beta_t \cdot S_t^i,$ Diskontierter Wert von Aktie i
$G^*(\phi) = \int \sum_{i=1}^k \phi^i dZ^i,$ Diskontierter Gewinn
$V^*(\phi) = \beta V(\phi) = \phi^0 + \sum_{i=1}^k \phi^i Z^i.$

Definition 4.24 (zulässige Handelsstrategie) *Wir nennen eine Handelsstrategie zulässig, wenn folgendes erfüllt ist:*

1. $V^*(\phi) \geq 0,$
2. $V^*(\phi) = V^*(\phi)_0 + G^*(\phi)$
3. $V^*(\phi)$ *ist ein Martingal unter Q.*

Satz 4.25 *Es gilt*
1. Der Preis einer Bezugsgröße X ist gegeben durch $\pi(X) = \mathbb{E}[\beta_T X]$
2. Die Bezugsgröße ist erreichbar $<=>$ $V^* = V_o^* + \int HdZ \ \ \forall H.$

Nun können wir einen vollständigen Markt definieren.

Definition 4.26 *Der Markt ist vollständig, falls jede integrierbare Bezugsgröße erreichbar ist.*

5 Das ökonomische Modell

In diesem Kapitel werden wir nun die bisher zusammengetragenen Ergebnisse benutzen, um ein ökonomisches Modell für unseren Markt zu konstruieren. Für die Modellierung der Aktienkurse werden wir, wie oben besprochen, die geometrische Brownsche Bewegung verwenden. Zusätzlich betrachten wir für fondsgebundene Lebensversicherungen noch die zukünftige Lebensdauer T_x.

5.1 Allgemeine Konventionen

- T_x bezeichnet die zukünftige Lebensdauer eines x-Jährigen.

- Mit $\mathcal{H}_t = \sigma(T > s, 0 \leq s \leq t)$ bezeichnen wir die von T_x erzeugten σ-Algebren

- Für die Wertschriften nehmen wir für den Rest dieses Kapitels an, dass sich das Referenzportfolio gemäß einer standardisierten Brownschen Bewegung $W(t)$ entwickelt.

- Mit $\mathcal{G}_t$ bezeichnen wir die von W erzeugten σ-Algebren, erweitert um die P-Nullmengen.

- Wir nehmen an, dass $\mathcal{G}_t$ und $\mathcal{H}_t$ stochastisch unabhängig sind. Dies bedeutet, dass die Finanzvariablen unabhängig von der zukünftigen Lebensdauer sind (oft als "Unabhängigkeit der Finanzvariablen" bezeichnet).

- Mit $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t)$ bezeichnen wir die von $\mathcal{G}_t$ und $\mathcal{H}_t$ erzeugte σ-Algebra.

5.2 Black-Scholes-Marktmodell

Als nächstes wollen wir nun unser Modell einführen. Das sogenannte Black-Scholes Marktmodell besteht aus einem risikofreien Bonds und einer Risikoanlage, modelliert durch eine geometrische Brown'sche Bewegung und ist folgender Form.

Definition 5.1 (Black-Scholes-Marktmodell) *In diesem Marktmodell gibt es zwei Anlagemöglichkeiten:*

$$B(t) = \exp(\delta t) \qquad \textit{Risikofreie Anleihe} \tag{27}$$

$$S(t) = S(0)\exp[(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)] \qquad \textit{Fonds} \tag{28}$$

Als nächesten Schritt betrachten wir die diskontierten Werte von $B(t)$ und $S(t)$.

$$B^*(t) = \frac{B(t)}{B(t)} = 1 \tag{29}$$

$$S^*(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = S(0)\exp[(\eta - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)] \tag{30}$$

Für die Berechnung der Optionspreise ist es nun notwendig ein äquivalentes Martingalmaß Q zu bestimmen, unter dem S^* ein Martingal ist. Wir suchen also ein Maß Q, sodass S^* ein Martingal unter Q ist.
Hierzu definieren wir folgende Radon-Nikodym-Dichte:

$$\xi_t = \exp\Big(-\frac{1}{2}(\frac{\eta-\delta}{\sigma})^2 t - \frac{\eta-\delta}{\sigma} W(t)\Big) \tag{31}$$

für welche folgende 3 Eigenschaften gelten:
1. $\mathbb{E}\left[\xi_t\right] = 1$
2. $\mathbb{V}\left[\xi_t\right] = exp((\frac{\eta-\delta}{\sigma})^2\ t) - 1$
3. $\xi_t > 0$

Bemerkung 5.2 *Obige Eigenschaften der Dichte folgen aus der Definition der Brown'schen Bewegung $W(t)$, genauer aus $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$.*

Folgenden Satz wollen wir ohne Beweis angeben, er folgt aus einem Folgesatz des Girsanov-Theorems aus der Theorie der stochastischen Integration.

Satz 5.3

$$\hat{W}_t = W(t) + \frac{\eta-\delta}{\sigma} t \tag{32}$$

ist unter $Q = \xi \cdot P$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, wobei ξ_t wie oben definiert.

Mithilfe dieser Transformation haben wir nun ein gesuchtes Martingalmaß Q für S^* gefunden.

Satz 5.4

$$S^*(t) = S(0)\exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\,\hat{W}(t)\Big) \tag{33}$$

ist ein Martingal unter Q.

Beweis Für $t, u \in \mathbb{R}, u > t$ ist folgende Gleichheit zu beweisen:

$$\mathbb{E}^Q[S^*(u)|\,\mathcal{F}_t] = S^*(t) \tag{34}$$

Hierzu verwenden wir die folgende Notation: $u = t + \Delta t, W_u = W_t + \Delta W$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}^Q[S^*(u)|\,\mathcal{F}_t]$

$= \mathbb{E}^Q[S(0)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t) + (-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma\Delta W))|\,\mathcal{F}_t]$

$= S^*(0)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t))\mathbb{E}^Q[\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z|\,\mathcal{F}_t]$

$= S^*(t)$.

Somit ist Q ein zu P äquivalentes Maß, unter dem S^* ein Martingal ist. □

Satz 5.5 *In der oben definierten Ökonomie, gegeben durch* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$*, S und B, folgt für den Preis einer Todesfallsumme C(T) zur Zeit t nun:*

$$\pi_t(T) = \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta(T-t)C(T))|\,\mathcal{F}_t] \tag{35}$$

Bemerkung 5.6 *Hier ist schön ersichtlich, dass im Gegensatz zum diskreten der Erwartungswert hier über das äquivalente Martingalmaß Q genommen wird und nicht über P.*

Konkret folgt nun für die Einmaleinlagen im obigen Modell:

Erlebensfallversicherung:

$$V(0) = \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta T)C(T)]\,{}_Tp_x \tag{36}$$

Temporäre Todesfallversicherung:

$$V(0) = \int_0^T \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta t)C(t)]\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt \tag{37}$$

6 Die Berechnung der nötigen Einmaleinlagen

Bisher haben wir nur „unit-linked“ Produkte betrachtet, nun erweitern wir unser Modell und berechnen die Einmalanlagen für Polizzen, welche noch zusätzliche Garantien beinhalten. Zur Erinnerung:

$C(\tau)$	Versicherungssumme zur Zeit τ
$N(\tau)$	Anzahl Fondsanteile zur Zeit τ
$S(\tau)$	Kurs der Wertschriften zur Zeit τ
$G(\tau)$	Garantierte Leistung zur Zeit τ

es gilt: $C(\tau) = \max\{N(\tau)S(\tau), G(\tau)\}$

6.1 Erlebensfallversicherung

Satz 6.1 *Gegeben ist das Black-Scholes-Modell. Dann ist die Nettoeinmalprämie für eine reine Erlebensversicherung in der Höhe von*

$$C(T) = \max\{N(T)S(T), G(T)\} \tag{38}$$

gegeben durch

$${}_TG_x = {}_Tp_x \left[G(T)\exp(-\delta T)\Phi(-d_2^0(T)) + S(0)N(T)\Phi(d_1^0(T))\right] \tag{39}$$

wobei

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \exp(-\frac{x^2}{2})dx, \tag{40}$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}} \ , (s > t) \tag{41}$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}} \ , (s > t) \tag{42}$$

Beweis (vgl [KO]) Im Folgenden bezeichnen wir mit J* stets den diskontierten Wert der Zufallsvariablen J. Der Wert der Erlebensleistung zur Zeit Null beträgt $\mathbb{E}^Q[C^*(T)]$. Wir bezeichnen mit $Z = S^*(T)$. Dann gilt:

$$_TG_x = \, _Tp_x \, \mathbb{E}^Q[\max\{N(T)Z, G^*(T)\}]$$

und

$$Z = S(0)\exp\big(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \hat{\mathrm{W}}(\mathrm{T})\big) \qquad \text{mit} \qquad \hat{\mathrm{W}}(\mathrm{T}) \sim \mathcal{N}(0, T)$$

Somit erhalten wir:

$$_TG_x = \, _Tp_x \int_{-\infty}^{\infty} \max[N(T)S(0)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\zeta), G^*(T)]\, f(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\text{mit } f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\big(-\frac{1}{2T}\zeta^2\big).$$

Als Nächstes setzen wir $\bar{\zeta} = \frac{1}{\sigma}[\ln[\frac{G^*(T)}{N(T)S(0)}] + \frac{1}{2}\sigma^2 T]$ und bemerken, dass falls $\zeta > \bar{\zeta}$ auch $N(T)Z > G^*(T)$. Dies bedeutet, dass sich die Einmaleinlage wie folgt berechnen lässt:

$$\begin{aligned} _TG_x = \, & _Tp_x \Big(G^*(T) \int_{-\infty}^{\bar{\zeta}} f(\zeta)\, d\zeta \\ & + N(T)S(0) \int_{\bar{\zeta}}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \Big) \\ = \, & _Tp_x \Big(G^*(T) \int_{-\infty}^{\bar{\zeta}} f(\zeta)\, d\zeta \\ & + N(T)S(0) \int_{\bar{\zeta}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{1}{2T}(\zeta - \sigma T)^2\, f(\zeta)\, d\zeta \Big). \end{aligned}$$

Aus der obigen Gleichung folgt durch Vereinfachung der Terme das gewünschte Resultat.

□

6.2 Todesfallversicherung

Satz 6.2 *Gegeben ist das Black-Scholes-Modell. Dann ist die Nettoeinmalprämie für eine temporäre Todesfallversicherung in der Höhe von*

$$C(T) = \max\{N(T)S(T), G(T)\} \tag{43}$$

gegeben durch

$$G^1_{x:T} = \int_0^T (G(t)\exp(-\delta t)\Phi(-d_2^0(t)) + S(0)N(t)\Phi(d_1^0(t))\, _tp_x\, \mu_{x+t}\,)\, dt \tag{44}$$

wobei $\Phi(y)$, $d_1^t(s)$, $d_2^t(s)$ gleich wie oben definiert sind.

Bemerkung 6.3 *Der Beweis erfolgt analog zur Erlebensfallversicherung.*

7 Die Thielesche Differentialgleichung

Wir haben die klassische Thielesche Differentialgleichung schon in Kapitel (2.4) den Grundbegriffen der Finanzmathematik kennengelernt. Nun wollen wir sie auch für die fondsgebundene Lebensversicherung herleiten. Hierzu müssen wir aber zuerst den Begriff der Prämie und des Deckungskapitals für diesen Versicherungstyp definieren.Im Folgenden bezeichne $\bar{p}(t)$ wieder die Prämiendichte zur Zeit t. Aufgrund des Äquivalenzprinzips muss nun folgende Gleichung gelten:

$$ {}_TG_x = \int_0^T \bar{p}(t)\exp(-\delta t)\,{}_tp_x\,dt \tag{45}$$

Mithilfe der Prämien können wir uns nun das Deckungskapital fondsgebundener Versicherungen ansehen. Wir betrachten dabei wieder getrennt Erlebensfallversicherung und temporäre Todesfallversicherung:

Erlebensfallversicherung:

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t}\,\pi_t(T) - \int_t^T (\bar{p}(\zeta)\exp(-\delta(\zeta-t))\,{}_{\zeta-t}p_{x+t}\,d\zeta \tag{46}$$

temporäre Todesfallversicherung:

$$V(t) = \int_t^T \pi_t(\zeta)\,\mu_{x+\zeta}\;{}_{\zeta-t}p_{x+t}\,(\zeta-t) - \bar{p}(\zeta)\exp(-\delta(\zeta-t))_{\zeta-t}p_{x+t}\,d\zeta \tag{47}$$

wobei:

$$\pi_t(s) = G(s)\exp(-\delta(s-t))\Phi(-d_2^t(s)) + N(s)S(t)\Phi(d_1^t(s)) \tag{48}$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\;,(s>t) \tag{49}$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\;,(s>t) \tag{50}$$

Bemerkung 7.1 *Anzumerken ist, dass die Reserven nicht wie im klassischen Fall deterministisch sind, sondern vom Wert der zugrunde liegenden Wertschrift abhängen. Aus diesem Grund werden wir nun das Gebiet der deterministischen Differentialgleichungen verlassen und stattdessen die Itô-Formel verwenden. Im stetigen Fall lautet diese:*

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt \tag{51}$$

wobei $W(t)$ eine standartisierte Brown'sche Bewegung ist.

Für die bisher behandelten Versicherungstypen gilt dann folgender Satz:

Satz 7.2 (Thielesche Differentialgleichung) *1.Die Differentialgleichung für den Marktwert einer reinen Erlebensfallversicherung lautet:*

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)\, V(t) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S} \tag{52}$$

2. Die Differentialgleichung für den Marktwert einer temporären Todesfallversicherung lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t)\; +\; (\mu_{x+t} + \delta)\, V(t) - C(t)\,\mu_{x+t} - \frac{1}{2}\,\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S} \tag{53}$$

Bemerkung 7.3 *Bevor wir diesen Satz beweisen noch 2 Bemerkungen zu obigen Formeln.*

- *Setzen wir $\mu_{x+t} = \bar{p}(t) = 0 \quad \forall t$ und formen um, so erhalten wir*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \delta\, V(t) \tag{54}$$

  Dies ist aber genau die klassische Black-Scholes Formel, wobei hier dann $V(t)$ den Wert einer Option zum Zeitpunkt t ausdrückt.

- *Die ersten Terme der Gleichung beschreiben die Abhängigkeit des Deckungkapitals von den Prämien, der Sterblichkeit und dem Zins und entsprechen somit dem klassischen Fall. Bedingt durch den Fonds kommt bei diesem Versicherungstyp der Term $-\frac{1}{2}\,\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$ hinzu, welcher die Fluktuationen der zugrundeliegenden Wertschrift beschreibt.*

Beweis (vgl. [KO])

$$\text{Da} \qquad \pi_t^*(T) = \exp(-\delta t)\pi_t(T),$$

folgt aus der Definition von V die folgende Gleichung:

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t}\, \pi_t^*(T) \exp(\delta t) - \int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, d\zeta$$

und somit

$$\pi_t(T) = \phi(t) \left[V(t) + \int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, d\zeta \right],$$

wobei

$$\phi(t) = \frac{\exp(-\delta t)}{{}_{T-t}p_{x+t}}$$

Da π_t^* eine Funktion von S und t ist, können wir die Itô-Formel auf die Funktion $\pi_t^*(t, S)$ anwenden:

$$\begin{aligned} dY_t &= U_t\, dt + U_x\, dX_t + \frac{1}{2} U_{xx} b^2\, dt \\ &= U_t\, dt + \frac{1}{2} U_{xx} b^2\, dt + U_x b\, dB_t \end{aligned}$$

und erhalten:

$$d\pi^* = \Big(\frac{\partial \pi^*}{\partial t} + \frac{\partial \pi^*}{\partial S}\, a + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial S^2}\, b^2\Big)\, dt + \frac{\partial \pi^*}{\partial S}\, b\, d\hat{\mathrm{W}},$$

wobei wir wissen, dass

$$dS = \delta S(t)\, dt + \sigma S(t) d\,\hat{\mathrm{W}}.$$

Somit ist $a = \delta S(t)$ und $b = \sigma S(t)$. Als Nächstes wollen wir die verschiedenen Terme für die obige Formel bestimmen:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial S} = \phi(t)\frac{\partial V}{\partial S}$$
$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial S^2} = \phi(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Um $\frac{\partial \pi^*}{\partial t}$ herzuleiten, berechnen wir zuerst:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, {}_{\zeta-t}p_{x+t} = \mu_{x+t}\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) &= \frac{-\delta \exp(-\delta t)\, {}_{T-t}p_{x+t} - \exp(-\delta t)\, {}_{T-t}p_{x+t}\, \mu_{x+t}}{({}_{T-t}p_{x+t})^2} \\ &= -(\mu_{x+t} + \delta) \cdot \frac{\exp(-\delta t)}{{}_{T-t}p_{x+t}} \\ &= -(\mu_{x+t} + \delta) \cdot \phi(t).\end{aligned}$$

Setzt man nun die obigen Terme ein, erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi^*}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big(V(t) + \int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, dt\Big) \\ &+\phi(t)\Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, dt\Big) \\ &= \phi(t)\Big(\frac{\partial V}{\partial t} - (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - \bar{p}(t)\Big),\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Kettenregel auf den Term

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, dt$$

Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}\pi_s^*(T) &= \pi_t^*(T) + \int_t^s \phi(\zeta)\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, d\hat{\mathrm{W}}(\zeta) \\ &+ \int_t^s \phi(\zeta)\Big[\frac{\partial V}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} - (\mu_{x+t} + \delta)V(\zeta) + \frac{\partial V}{\partial t}(\zeta) - \bar{p}(\zeta)\Big]\, d\zeta\end{aligned}$$

Da $\pi^*_{\cdot}(T)$ ein Martingal ist, muss der Driftterm verschwinden. Wir erhalten das gewünschte Resultat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} - \delta S(t)\frac{\partial V}{\partial S}$$

□

Literatur

[FS] Hans Föllmer und Alexander Schied: *Stochastic Finance*, WdeG,New York / Berlin 2002

[G] Hans U. Gerber: *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Third Edition

[KA] Rainhold Kainhofer: *VO Lebensversicherungsmathematik und VO Personenversicherungsmathematik*, gehalten im Wintersemester 2008/2009 bzw. 2009/2010

[KO] Michael Koller: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*, Springer-Verlag, Berlin 2000

[W] Wikipedia: *Black-Scholes-Modell*