

Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

Maria Kadan
e0727076

TU Wien
WS 2009/2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Thematik	2
1.1	Schadenabwicklung und Spätschadenreserve	2
1.2	Das Abwicklungsdreieck	3
1.3	Einträge des Abwicklungsdreiecks	5
1.4	Bedeutung der Schätzgenauigkeit	6
2	Das Chain-Ladder Verfahren	7
2.1	Überblick	7
2.2	Sensitivität des Chain-Ladder Verfahrens	10
2.3	Genauigkeit des Chain-Ladder Verfahrens	11
3	Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren	14
3.1	Einleitung	14
3.2	Ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren	15
3.3	Weitere kreuzklassifizierte parametrische Verfahren	16
4	Modifikationen der bisher behandelten Verfahren	17
4.1	Separation von Kalenderjahreffekten	17
4.2	Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden	18
5	Fazit	22
6	Anhang	23

1 Einführung in die Thematik

In diesem Kapitel wird der Verlauf der Schadenabwicklung und die daraus resultierende Spätschadenreservierung beschrieben. Weiters wird das später benötigte Abwicklungsdreieck vorgestellt und schließlich die Bedeutung und Berechnung der Schätzgenauigkeit erläutert.

1.1 Schadenabwicklung und Spätschadenreserve

Die Schadenabwicklung erfolgt in mehreren Schritten: Tritt ein Schadenfall ein, so muss dieser zunächst vom Versicherungsnehmer dem Versicherer gemeldet werden. Daraufhin hat der Versicherer zu prüfen, ob der Schaden von der bestehenden Polizza gedeckt ist. Erst danach können der Schaden reguliert und die vereinbarte Leistung ausbezahlt bzw. die anfallenden Reparaturen durchgeführt werden. Dadurch entsteht eine zeitliche Differenz zwischen dem Schadeneintritt und der endgültigen Regulierung. In den meisten Versicherungsbranchen ist diese Zeitspanne relativ kurz und beträgt nur ein bis zwei Monate. In der Haftpflichtversicherung jedoch kann die Schadenabwicklung mehrere Jahre in Anspruch nehmen. Dafür gibt es zwei wesentliche Gründe:

1. **Späte Manifestation:** Der Schaden wird erst lange Zeit nach der Verursachung bemerkt. Zum Beispiel stellt sich der Fehler eines Notars erst bei der Eröffnung eines Testaments heraus oder der Fehler eines Architekten wirkt sich erst bei besonderer Belastung eines Bauwerks schwerwiegend aus.
2. **Lange Regulierungsdauer:** Die endgültige Schadenhöhe ist lange Zeit unbekannt, etwa bei Abhängigkeit von den Kosten einer längeren ärztlichen Behandlung oder vom Ausgang eines Gerichtsprozesses.

Dies führt zu den sogenannten Spätschäden. Das sind Schäden, deren Höhe zum Ende jeder Abrechnungsperiode noch nicht endgültig bekannt ist. Es wird unterschieden zwischen:

1. **IBNR-Schäden:** Die Abkürzung IBNR steht für „*incurred but not reported*“. Diese Schäden sind entweder bereits eingetreten, aber noch nicht gemeldet oder schon verursacht, aber noch nicht bemerkt worden. Ist aus Erfahrung mit solchen Schäden zu rechnen, hat der Versicherer eine angemessene IBNR-Schadenreserve zu bilden.
2. **IBNER-Schäden:** IBNER bedeutet „*incurred (and reported) but not enough reserved*“. Derartige Schäden wurden bereits gemeldet, aber noch nicht endgültig reguliert. Für diese Fälle muss eine Einzelfallreserve festgesetzt werden. Die Differenz zwischen den später tatsächlich anfallenden Kosten und der Einzelfallreserve wird Abwicklungsergebnis genannt. Zu Abwicklungsverlusten kommt es u.a. durch Inflation. Ist aus Erfahrung mit einem negativen Abwicklungsergebnis für den ganzen Bestand zu rechnen, wird eine IBNER-Schadenreserve gebildet.

Im Folgenden werden die beiden Reservearten unter dem Begriff *Spätschadenreserve* zusammengefasst.

Die IBNR-Reserve ist bedeutend für die externe Rechnungslegung und für die Prämienkalkulation. Dagegen hat die IBNER-Reserve Einfluss auf die interne Rechnungslegung und ebenfalls auf die Prämienkalkulation. Daher ist eine möglichst genaue Schätzung der Spätschadenreserve erforderlich. In immer mehr Ländern wird von den Aufsichtsbehörden verlangt, dass die Höhe der Spätschadenreserve, ähnlich wie die der Deckungsrückstellung in der Lebensversicherung, von einem Aktuar bestätigt wird.

Auch der Rückversicherer ist von der Problematik der Spätschadenreservierung betroffen. Insbesondere die Schadenexzedenten-Rückversicherung kommt in der Haftpflichtversicherung häufig vor. Hierbei übernimmt der Rückversicherer von jedem Schaden den einen vereinbarten Betrag, die Priorität, übersteigenden Teil. Doch ist bei Meldung eines Schadens für den Erstversicherer oft noch nicht absehbar, ob der Schaden die Priorität überstiegen wird. Somit verstärkt sich für den Rückversicherer die IBNR-Problematik erheblich, da für ihn auch anfänglich unterschätzte Schäden wie IBNR-Schäden wirken.

Bei der Einzelfallreservierung werden nahezu keine mathematischen Verfahren eingesetzt. Sie beruht auf der Erfahrung und den verfügbaren Informationen über die Umstände des Einzelfalls des zuständigen Schadensachbearbeiters.

Aufgrund der entscheidenden Bedeutung der IBNR- und IBNER-Reserve in den Branchen mit langer Abwicklungsdauer, sind für deren Schätzung in den letzten Jahren hingegen viele mathematische Verfahren entwickelt worden. Hinter allen steht der Versuch, die Erfahrungen früherer Anfalljahre, d.h. Schadeneintrittsjahre, auf spätere Anfalljahre zu übertragen. Es ist offensichtlich, dass sämtliche Verfahren versagen, wenn im Verlauf der betrachteten Jahre Trend- oder Strukturbrüche stattfinden. Hierbei kann es sich z.B. um Änderungen bei der Schadenregulierung, Einzelfallreservierung oder bei der Rechtsprechung handeln.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Jahre keine Trend- oder Strukturbrüche enthalten.

1.2 Das Abwicklungsdreieck

Die meisten mathematischen Verfahren zur Berechnung der Spätschadenreserve benützen das sogenannte Abwicklungsdreieck, dem folgende Struktur zu Grunde liegt:

Sei S_{ik} $1 \leq i \leq I, k = 1, 2, \dots$ der im Abwicklungsjahr k aufgewendete Betrag für die im Anfalljahr i eingetretenen Schäden. Das *Anfall- bzw. Schadenjahr* ist, wie bereits erwähnt, jenes Jahr, in dem der Schaden eingetreten ist oder dem er buchhalterisch zuzuweisen ist. Als *Abwicklungs- bzw. Abrechnungsjahr* wird jenes Jahr bezeichnet, in dem eine Aufwendung für den Schaden getätigt wurde. Somit stimmt das erste Abwicklungsjahr $k = 1$ mit dem Anfalljahr überein. Insgesamt werden I Anfall- und Abwicklungsjahre betrachtet und das Jahr I ist das dem aktuellen Kaldenderjahr vorangehende Jahr. Klarerweise sind in einem Abwicklungsdreieck (siehe TABELLE 1) nur die Beträge bis inklusive der Nebendiagonale, also die Beträge S_{ik} mit $i + k \leq I + 1$ bekannt.

		Abwicklungsjahr k								
Anfalljahr i		S_{11}	S_{12}	\dots	S_{1k}	\dots	$S_{1,I+1-i}$	\dots	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
		S_{21}	S_{22}	\dots	S_{2k}	\dots	$S_{2,I+1-i}$	\dots	$S_{2,I-1}$	
		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		
		S_{i1}	S_{i2}	\dots	S_{ik}	\dots	$S_{i,I+1-i}$			
		\dots	\dots	\dots	\dots					
		$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	\dots	$S_{I+1-k,k}$					
		\dots	\dots							
		$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
		S_{I1}								

Tabelle 1: Abwicklungsdreieck

Vom jüngsten Anfalljahr $i = I$ sind nur jene Schäden bekannt, die in eben diesem Jahr eingetreten sind und gemeldet wurden. Dagegen sind vom am längsten zurückliegenden Anfalljahr $i = 1$ schon $k = I$ Abwicklungsjahre bekannt. Dieses Jahr sollte so gewählt werden, dass die in diesem Jahr eingetretenen Schäden so gut wie vollständig abgewickelt sind. Man vermutet also, dass die Beträge $S_{i,I+1}, S_{1,I+2}, \dots$ der künftigen Abwicklungsjahre alle gleich Null sind.

Die Parallelen zur Hypotenuse des Dreieckes entsprechen den einzelnen *Kalenderjahren*. Das Kalenderjahr I wird also von den Werten $S_{I1}, S_{I-1,2}, \dots, S_{2,I-1}, S_{1I}$ der Nebendiagonale beschrieben.

Meist steigen die Beträge S_{ik} für jedes Anfallsjahr i zu Beginn etwas an, nehmen allerdings im Laufe der Zeit immer weiter ab, bis sie schließlich gleich Null sind. Das ist datauf zurückzuführen, dass es mit zunehmender Abwicklungsdauer immer unwahrscheinlicher wird, dass sich Änderungen im Schadenstand ergeben.

Von nun an wird vorausgesetzt, dass nach I Abwicklungsjahren alle Schäden des Anfallsjahres bekannt und vollständig abgewickelt sind. Der für das Anfalljahr i aufzuwendende Gesamtschaden lässt sich als

$$S_{i+} = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{iI}$$

darstellen. Bis jetzt, also bis zum Kalenderjahr I , ist von S_{i+} nur

$$S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{i,I+1-i}$$

bekannt. Der erforderliche Betrag an Spätschadenreserve für das Anfallsjahr i

$$R_i = S_{i,I+2-i} + S_{i,I+3-i} + \dots + S_{iI}$$

ist noch unbekannt. Das Ziel der verschiedenen mathematischen Verfahren ist es, R_i so gut wie möglich zu schätzen.

1.3 Einträge des Abwicklungsdreiecks

Eine weitere Möglichkeit, um die Werte des Abwicklungsdreieckes darzustellen, ist die kumulierte Form. An Stelle des Zuwachses S_{ik} steht nun der kumulierte Schadenstand

$$C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{ik}.$$

Die Zuwächse erhält man daraus durch die Rechnung

$$S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}, \quad \text{wobei } C_{i0} = 0.$$

Darüber hinaus gilt es zu unterscheiden, welche Arten von Daten im vorliegenden Abwicklungsdreieck abgebildet werden. Es gibt zwei unterschiedliche Varianten:

1. **Bezahlter Schadenbetrag:** Die C_{ik} stellen den Schadenbetrag dar, der bis zum Abwicklungsjahr k bezahlt wurde. Es sind also keine Einzelfallreserven enthalten. Der Vorteil dieser Art besteht darin, dass Schätzungen ausgeschlossen werden, wodurch die Daten zuverlässiger erscheinen. Auch um zu ermitteln, in welcher zeitlichen Staffelung die Spätschadenreserve voraussichtlich ausbezahlt werden muss, ist diese Variante unabdingbar. Ein Nachteil davon ist jedoch, dass die endgültige Regulierung bestimmter Schäden über 20 Jahre dauern kann. Darum werden sehr große Abwicklungsdreiecke mit vielen Anfalljahren benötigt, um beispielsweise den Endschadenstand zu schätzen.
2. **Angefallener Schadenbetrag:** Die C_{ik} zeigen den bezahlten Schadenbetrag zuzüglich der bestehenden Einzelfallreserven. Hier ist der Vorteil, dass die Größenordnung des Endschadens C_{iI} pro Anfalljahr durch die Einbeziehung der Einzelfallreserven viel früher erkennbar ist. Weiters reichen meist weniger Anfalljahre als bei der obigen Variante für diverse Berechnungen aus.

Zur Veranschaulichung folgt auf der nächsten Seite zur jeder Datenart je ein Beispiel.

Im Allgemeinen beziehen sich die Beträge S_{ik} auf die Schäden eines Bestandes von Risiken. Um eine möglichst zuverlässige Schätzung der Spätschadenreserve zu garantieren, ist es in der Schadenreservierung wichtig, möglichst *große* und *homogene* Teilbestände zu bilden. Einerseits werden Informationen, wenn sie auf mehr Schäden beruhen, nach dem Prinzip vom Ausgleich im Kollektiv immer zuverlässiger, weil die Abwicklung eines einzelnen Schadenfalles wenig über andere Schadenabwicklungen aussagt. Andererseits sollten Teilbestände mit einem ähnlichen Abwicklungsverhalten zusammengefasst werden, um den Informationsverlust zu verringern. Die Schätzung der Spätschadenreserve ist daher keine rein mathematische Aufgabe, sondern wird stark von der Wahl der Teilbestände beeinflusst.

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	Prämie
1	45	1968	4442	4831	5199	6302	13085
2	30	260	480	865	1111		14258
3	81	500	969	1621			16114
4	0	1281	2415				15142
5	20	131					16905
6	14						20224

Tabelle 2: Kumuliertes Abwicklungsdreieck *bezahlter* Schäden

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	Prämie
1	4370	6293	10292	12460	13660	14307	13085
2	2701	5291	7162	8945	9338		14258
3	4483	6729	10074	11142			16114
4	3254	5804	8351				15142
5	8010	12118					16905
6	5582						20224

Tabelle 3: Kumuliertes Abwicklungsdreieck *angefallener* Schäden

1.4 Bedeutung der Schätzgenauigkeit

Es ist wichtig zu bemerken, dass es sich bei der zu schätzenden Spätschadenreserve um eine Zufallsvariable handelt. Von dieser Zufallsvariablen ist vor allem der Erwartungswert von Bedeutung. In der Schadenreservierung ist die Abweichung des Gesamtschadens vom Erwartungswert, anders als bei der Prämienkalkulation, relativ hoch, was daran liegt, dass die Schäden mit langer Abwicklungsdauer nur einen kleinen Teil der Gesamtzahl aller Schäden ausmachen. Da also die Schätzung des Erwartungswertes mit großen Unsicherheiten verbunden ist, spielt außer der Punktschätzung für den Erwartungswert der Spätschadenreserve eine Angabe über die Genauigkeit dieser Schätzung eine entscheidende Rolle: Einerseits stellt die Reserveschätzung, wieder im Gegensatz zur Prämienkalkulation, eine Prognose über mehrere Jahre dar, was natürlich nochmals zu höherer Unsicherheit führt. Weiters ist mit ihr auch direkt die Bindung entsprechender Geldmittel verbunden, welche später nicht aus den Prämien des damaligen Portefeuilles aufgestockt werden können, falls die Reserve zu nieder angesetzt wurde. Andererseits können zwei verschiedene Schätzverfahren nur dann verglichen werden, wenn zumindest von einem die Genauigkeit der Punktschätzung bekannt ist.

Im Weiteren werden einige Schätzverfahren vorgestellt, wobei insbesondere auf das Chain-Ladder Verfahren näher eingegangen wird. Hierfür wird auch eine Möglichkeit zur Schätzung und Genauigkeitsmessung der Spätschadenreserve angegeben. Ziel ist es, die Spätschadenreserve R_i für Anfalljahr i möglichst gut durch einen Schätzer \hat{R}_i zu prognostizieren, wobei als Gütekriterium die bedingte mittlere quadratische Abweichung verwendet wird.

2 Das Chain-Ladder Verfahren

In diesem Kapitel wird das Chain-Ladder Verfahren beschrieben. Es handelt sich dabei um eines der ältesten und einfachsten verteilungsfreien Verfahren zur Schätzung der Spätschadenreserve, das noch heute eine tragende Rolle einnimmt. Meistens wird das Verfahren rein deterministisch dargestellt und wurde deshalb immer wieder scharf kritisiert. Doch das ihm nun zu Grunde gelegte stochastische Modell ließ die Kritik versiegen. Es zeigt einerseits die Grenzen bzw. die erforderlichen Voraussetzungen, ermöglicht andererseits die Angabe der Genauigkeit des Reserveschätzers.

2.1 Überblick

Für jedes Anfalljahr i wird ein individueller Erwartungswert für den Endschaden zugelassen, allerdings unter der Bedingung, dass die Aufteilung des Endschadens auf die einzelnen Abwicklungsjahre im Schnitt für alle Anfalljahre gleich ist.

Der Endschaden lässt sich einerseits *additiv* beschreiben

$$C_{iI} = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{iI},$$

andererseits kann er auch, wie hier benötigt, *multiplikativ* dargestellt werden

$$C_{iI} = C_{i1} F_{i1} F_{i2} \cdot \dots \cdot F_{i,I-1}, \quad \text{wobei} \quad F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}.$$

F_{ik} ist die multiplikative Zunahme des akkumulierten Schadenstandes $C_{ik} = S_{i1} + \dots + S_{ik}$ von Abwicklungsjahr k zum darauf folgenden Abwicklungsjahr $k + 1$ in Anfalljahr i . Aufgrund der Division muss vorausgesetzt werden, dass alle Schadenstände $C_{ik} > 0$ sind. Andernfalls muss die multiplikative Darstellung statt mit C_{i1} mit dem ersten positiven C_{ik} beginnen. Um die erste Bedingung fortzuführen, wird für die Zufallsvariablen F_{ik} ein vom Anfalljahr i unabhängiger Erwartungswert

$$\mathbb{E}(F_{ik}) = f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I - 1$$

angenommen. Das bedeutet, dass die f_k die durchschnittliche Steigerung des Schadenstandes von Abwicklungsjahr k auf $k + 1$ angeben. Diese Modellparameter f_k müssen geschätzt werden, was beim Chain-Ladder Verfahren mittels des C_{ik} -gewichteten arithmetischen Mittels

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}, \quad 1 \leq k \leq I - 1 \quad (1)$$

aus den bis jetzt vorliegenden Realisierungen der C_{ik} geschieht. Der Endschaden C_{iI} wird durch

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I \quad (2)$$

geschätzt und die Reserve $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ äquivalent dazu durch

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1).$$

Wie man sieht, werden der Prognose wider erwarten nicht etwa die früheren Schadenstände $C_{iI}, \dots, C_{i,I-i}$ zu Grunde gelegt, sondern nur der aktuelle Schadenstand $C_{i,I+1-i}$ des Anfallsjahres i . Daher muss das Chain-Ladder Verfahren auf einer impliziten Modellannahme basieren, die besagt, dass der Informationsgehalt des jeweils aktuellsten Schadenstandes nicht durch die zusätzliche Ausnutzung früherer Schadenstände verbessert werden kann. Formal lautet diese Modellannahme:

(CL1) Es gibt Abwicklungsfaktoren f_1, \dots, f_{I-1} mit

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1, \quad \text{für } C_{ik} > 0$$

oder gleichwertig

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k.$$

Diese Annahme sagt aus, dass der bedingte Erwartungswert von $C_{i,k+1}$ nur von C_{ik} abhängt und nicht von früheren Schadenständen. (CL1) ist ein Spezialfall des am Anfang des Kapitel betrachteten Modells $\mathbb{E}(F_{ik}) = f_k$. Unter Verwendung des Satzes vom iterierten Erwartungswert (siehe ANHANG) folgt aus (CL1)

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right)\right) = f_k$$

Natürlich wird auch folgende Annahme benötigt:

(CL2) Die Anfalljahre C_{i1}, \dots, C_{iI} , $1 \leq i \leq I$, sind global unabhängig.

Aus der Formulierung der Modellannahme (CL1) als bedingter Erwartungswert wird auch ersichtlich, dass nicht $\mathbb{E}(C_{iI})$ bzw. $\mathbb{E}(R_i)$, sondern $\mathbb{E}(C_{iI} \mid D)$ bzw. $\mathbb{E}(R_i \mid D)$ geschätzt wird, wobei

$$D = \{C_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$$

die bisher bekannten Daten aus dem Abwicklungsdreieck sind.

Dass die Chain-Ladder-Projektion (2) wirklich auf dem Modell aus (CL1) und (CL2) aufbaut, zeigt der nachstehende Satz.

Satz. *Unter den Annahmen (CL1) und (CL2) gilt*

$$\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) = C_{i,I+1-i} f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I.$$

Beweis. Mit der Abkürzung $D_i = \{C_{i1}, \dots, C_{i, I+1-i}\}$ gilt wegen (CL2) und durch wiederholte Anwendung von (CL1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_{iI}|D) &= \mathbb{E}(C_{iI}|D_i) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{iI}|C_{i1}, \dots, C_{i, I-1})|D_i) \\
&= \mathbb{E}(C_{i, I-1}f_{I-1}|D_i) \\
&= \mathbb{E}(C_{i, I-1}|D_i) f_{I-1} \\
&= \dots \\
&= \mathbb{E}(C_{i, I+1-i}|D_i) f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1} \\
&= C_{i, I+1-i} f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}.
\end{aligned}$$

□

Der nun folgende Satz zeigt, dass die in (2) benutzten Schätzer für $f_{I,1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}$ vernünftig sind.

Satz. *Unter den Annahmen CL1 und CL2 sind die gemäß (1) berechneten Schätzer \hat{f}_k erwartungstreu (siehe ANHANG) und unkorreliert mit*

$$\mathbb{E}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}.$$

Beweis. Es wird zunächst die Erwartungstreue von \hat{f}_k gezeigt. Dazu sei

$$B_k = \{C_{ij} | j \leq k, i + j \leq I + 1\}, \quad 1 \leq k \leq I.$$

Dann ist wegen CL1 und CL2

$$\mathbb{E}(C_{i, k+1}|B_k) = C_{ik}f_k, \quad 1 \leq i \leq I - k,$$

und daher

$$\mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k) = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} \mathbb{E}(C_{i, k+1}|B_k)}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = f_k.$$

Das liefert

$$\mathbb{E}(\hat{f}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k)) = f_k.$$

Weiters gilt für $j < k$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k|B_k)) \\
&= \mathbb{E}(\hat{f}_j \mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k)) \\
&= \mathbb{E}(\hat{f}_j) f_k \\
&= f_j f_k
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die \hat{f}_k unkorreliert sind.

□

Da \hat{f}_k und \hat{f}_{k-1} von denselben Daten $C_{1k} + \dots + C_{I-k,k}$ abhängen, ist die Unkorreliertheit der \hat{f}_k überraschend. Ferner gilt für jedes feste Anfalljahr i die Unkorreliertheit auch für die Faktoren F_{ik} . Insbesondere sind auch aufeinander folgende Einzelabwicklungsfaktoren $F_{i,k-1}, F_{ik}$ unkorreliert. Darum sollte das Chain-Ladder-Verfahren nicht bei Portefeuilles angewendet werden, bei welchen in der Regel auf einen eher hohen Abwicklungsfaktor ein niedriger folgt und umgekehrt.

Es dürfen im Übrigen nur Paare $(C_{ik}, C_{i,k+1})$ mit $C_{ik} > 0$ für die Berechnung von \hat{f}_k verwendet werden, da sonst F_{ik} undefiniert ist. Alternativ kann \hat{f}_k neu als

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \quad \text{mit } F_{ik} := 0, \quad \text{falls } C_{ik} = 0$$

definiert werden.

2.2 Sensitivität des Chain-Ladder Verfahrens

Es gibt zwei problematische Stellen im Abwicklungsdreieck, welchen beim Chain-Ladder-Verfahren besondere Aufmerksamkeit zu schenken ist.

1. **Die rechte obere Ecke:** Der Schätzer des letzten Abwicklungsfaktors f_{I-1} basiert nur auf dem einen Beobachtungswert S_{1I} . Diese im ältesten Anfalljahr beobachtete Veränderung $\hat{f}_{I-1} = \frac{C_{1,I-1} + S_{1I}}{C_{1,I-1}}$ wird durch das Verfahren auf alle folgenden Anfalljahre $i = 2, \dots, I$ übertragen, selbst wenn deren Wert untypisch ist.
2. **Die linke untere Ecke:** Der Faktor C_{I1} für das jüngste Anfalljahr beruht nur auf den Daten S_{I1} aus dem einen Beobachtungsjahr. In manchen Versicherungssparten mit langer Abwicklungsdauer, vor allem in der Schadenexzedenten-Rückversicherung, sagt der Zahlungsstand C_{I1} selbst am Ende des Anfalljahres noch wenig aus. Nun hängt allerdings der Reserveschätzer $\hat{R}_I = C_{I1}(\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$ für das aktuellste Anfalljahr von diesem unsicheren Wert ab. Im Extremfall $C_{I1} = 0$ wird die ganze Reserve R_I zu $\hat{R}_I = 0$ geschätzt, was natürlich nicht stimmen kann.

Es ist möglich ein unplausibles C_{I1} zu korrigieren. Hierbei wird es durch den Durchschnitt aller bisher beobachteten Anfalljahre

$$C_{I1} := \frac{v_I \sum_{i=1}^I C_{iI}}{\sum_{i=1}^I v_i}$$

ersetzt. v_i stellt das Volumen des Anfalljahres i dar, das kann z.B. die Anzahl der Risiken bzw. deren Gesamtversicherungssumme oder das Prämienvolumen sein.

Sind auch Erstjahresstände C_{i1} der anderen Anfalljahre unplausibel, können durch die Rückwärtsprojektion

$$\hat{C}_{i1} = \frac{C_{i,I+1-i}}{\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-i}}$$

aus den aktuellen Schadenständen realistischere C_{i1} geschätzt werden. Man kann nun C_{I1} im Chain-Ladder-Reserveschätzer \hat{R}_I durch $v_I \hat{q}_1$ ersetzen, wobei \hat{q}_1 der Schätzer für die mittlere Erstjahresschadenquote

$$\hat{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^I C_{i,I+1-i}}{\sum_{i=1}^I \hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-i} v_i}$$

ist. Diese Methode wird als Cape-Cod-Verfahren bezeichnet, mit dem natürlich auch die anderen aktuellen Schadenstände $C_{I-1,2}, C_{I-2,3}, \dots$ angepasst werden können.

Eine weitere einfache Methode besteht darin, zunächst die gesamte Nettoprämieneinnahme des Anfalljahrs I abzüglich C_{I1} zu reservieren, bis nach dem folgenden Jahr zuverlässigere Daten vorliegen.

2.3 Genauigkeit des Chain-Ladder Verfahrens

Angesichts dieser Sensitivitäten ist es wichtig die Genauigkeit des Reserveschätzers \hat{R}_i anzugeben. Hierfür soll nun die entsprechende Formel hergeleitet werden. Gesucht ist also der bedingte mittlere quadratische Fehler (*mean squared error*)

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D),$$

wobei wieder durch die bisher bekannten Schadenstände $D = \{C_{ik} | i+k \leq I+1\}$ bedingt wird. Dies ist notwendig, da einerseits wegen (CL1) die Unabhängigkeit der Abwicklungsjahre nicht vorausgesetzt werden kann, andererseits nur die Größe des Fehlers auf Grund der zukünftigen Variabilität von Bedeutung ist. Der unbedingte mittlere quadratische Fehler $\mathbb{E}(R_i - \hat{R}_i)^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D))$ würde zusätzlich über alle möglichen Datenkonstellationen D mitteln.

Wegen $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ und $\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$ sind die mittleren quadratischen Fehler $mse(\hat{R}_i)$ von \hat{R}_i und $mse(\hat{C}_{iI})$ von \hat{C}_{iI} identisch.

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D) = \mathbb{E}((C_{iI} - \hat{C}_{iI})^2 | D) = mse(\hat{C}_{iI})$$

Die Verallgemeinerung des Steiner'schen Verschiebungssatzes auf bedingte Erwartungswerte $\mathbb{E}((X - h(Y))^2 | Y) = \mathbb{V}(X|Y) + (\mathbb{E}(X|Y) - h(Y))^2$ und die Tatsache, dass der Reserveschätzer \hat{R}_i aus den Daten D berechnet wird und deshalb eine Funktion von D ist, also $\hat{R}_i = h_i(D)$, liefern die Zerlegung

$$mse(\hat{R}_i) = \underbrace{\mathbb{V}(R_i | D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(R_i | D) - \hat{R}_i)^2}_{\text{Schätzfehler}} \quad (3)$$

des mittleren quadratischen Fehlers in Zufallsfehler und Schätzfehler. Diese Darstellung zeigt, dass $\mathbb{E}(R_i | D)$ die beste Prognose von R_i im Quadratmittel ist, da $\hat{R}_i = \mathbb{E}(R_i | D)$ den quadratischen Fehler minimiert.

Damit diese Komponenten weiter geschätzt werden können, wird das Chain-Ladder-Modell um eine Annahme über die Varianz der $C_{i,k}$ erweitert.

(CL3) Es gibt Proportionalitätskonstanten $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{I-1}^2$ mit

$$\mathbb{V}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1, \quad \text{für } C_{ik} > 0$$

oder gleichwertig

$$\mathbb{V}(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \sigma_k^2.$$

Zur konkreten Berechnung werden noch Schätzer für die unbekannt Parameter σ_k^2 benötigt. Dazu wähle man den erwartungstreuen Schätzer

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-2.$$

Nun fehlt nur noch ein Schätzer für σ_{I-1}^2 . Wenn davon ausgegangen werden kann, dass $f_{I-1} = 1$ und dass alle Schäden nach $I-1$ Abwicklungsjahren erledigt sind, kann $\sigma_{I-1} = 0$ gesetzt werden. Ansonsten muss die Folge $\sigma_1, \dots, \sigma_{I-3}, \sigma_{I-2}$ um einen weiteren Term extrapoliert werden. Dies kann entweder mittels loglinearer Regression, da $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ meist annähernd linear in k abnehmen, oder mittels der Forderung

$$\frac{\hat{\sigma}_{I-3}}{\hat{\sigma}_{I-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{I-2}}{\hat{\sigma}_{I-1}} \quad \text{für } \hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$$

umgesetzt werden. Somit ist $\hat{\sigma}_{I-1}^2$ als

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \hat{\sigma}_{I-3}^2\right)$$

definiert.

Nun kann der Schätzer für $mse(\hat{R}_i)$ hergeleitet werden.

Satz. *Unter den Annahmen (CL1), (CL2) und (CL3) kann der mittlere quadratische Fehler des Reserveschätzers \hat{R}_i des Chain-Ladder Verfahrens durch*

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

geschätzt werden.

Beweis. Siehe [M], Kapitel 3.2.5. □

Der Standardfehler $s.e.(\hat{R}_i)$ ist die Quadratwurzel des Schätzers für den mittleren quadratischen Fehler $mse(\hat{R}_i)$. Somit sind \hat{R}_i und $s.e.(\hat{R}_i)$ Schätzer für den Erwartungswert und den Standardfehler der Schadenreserve R_i von Anfalljahr i .

Die Gesamtreserve $R = R_2 + \dots + R_I$ wird durch $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$ geschätzt. Allerdings dürfen zur Berechnung des Standardfehlers von \hat{R} trotz der Unabhängigkeit der Anfalljahre nicht einfach die quadrierten Standardfehler der einzelnen Anfalljahreserven \hat{R}_i addiert werden, da die \hat{R}_i selbst nicht unabhängig, sondern über die überall enthaltenen Schätzer $\hat{f}_k, \hat{\sigma}_k$ positiv korreliert sind.

Satz. *Unter denselben Annahmen und Bezeichnungen wie im vorigen Satz erhält man für den mittleren quadratischen Fehler der Gesamtreserve $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$ den Schätzer*

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^I \left((s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{iI} \left(\sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{jI} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right).$$

Beweis. Siehe [M], Kapitel 3.2.5. □

3 Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

In diesem Kapitel werden weitere Methoden zur Berechnung der Spätschadenreserve beschrieben, die neben dem Chain-Ladder Verfahren noch gebräuchlich sind. Sie gehören zur Klasse der kreuzklassifizierten parametrischen Verfahren. Insbesondere wird auf eine Variante eingegangen, die auf der Gammaverteilung beruht.

3.1 Einleitung

Bei dem Chain-Ladder Verfahren handelt es sich um einen Spezialfall einer Modellklasse, für die

$$(A) \quad \mathbb{E}(C_{i,k+1}) = \mathbb{E}(C_{ik}) \cdot f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I - 1$$

mit unbekanntem positiven Parametern f_1, \dots, f_{I-1}

gilt. Dies lässt sich zeigen, indem man auf die Annahme (CL1) des Chain-Ladder Verfahrens den Erwartungswertoperator anwendet und die Regel über iterierte Erwartungswerte (siehe ANHANG) benutzt. Die oben erwähnte Modellklasse hat eine weitere Charakterisierung:

Satz. *Jedes Modell, für das (A) gilt, erfüllt auch*

$$(B) \quad \mathbb{E}(S_{i,k}) = x_i \cdot y_k, \quad 1 \leq i, \quad k \leq I$$

mit unbekanntem Parametern $x_i, y_k > 0$ und $y_1 + \dots + y_I = 1$.

Umgekehrt ist auch jedes Modell der Art (B) zugleich ein Modell der Art (A).

Beweis. Siehe [M], Kapitel 3.3.1. □

Modelle, die nun (A) bzw. (B) erfüllen, werden als *kreuzklassifiziert* bezeichnet.

Das Chain-Ladder Modell (CL1) und die Modellklassen (A) bzw. (B) unterscheiden sich grundlegend. Angenommen man kenne die Modellparameter f_1, \dots, f_I von (CL1) bzw. x_i, y_k von (B). Dann wäre im letzteren Fall der Reserveschätzer, unter der zusätzlichen Annahme der Unabhängigkeit der Abwicklungsjahre, $\hat{R}_{i,0} = x_i \cdot (y_{I+2-i} + \dots + y_I)$ unabhängig von den beobachteten Daten D . Das bedeutet, dass $\hat{R}_{i,0}$ unverändert bliebe, auch wenn verschiedene Daten D aus der zu Grunde liegenden Verteilung simuliert werden. Im ersteren Fall hingegen würde der Wert der Chain-Ladder-Reserve $\hat{R}_{i,I} =$

$C_{i,I+1-i} \cdot (f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1} - 1)$ zusammen mit dem Wert von $C_{i,I+1-i}$ von Simulation zu Simulation Veränderungen aufweisen.

Ziel ist es, die unbekannt Parameter x_i, y_k zu schätzen, um mittels \hat{x}_i, \hat{y}_k auch die noch unbekannt Werte $\mathbb{E}(S_{ik}), i+k > I+1$, der zukünftigen Schadenabwicklung hochrechnen zu können.

Dass x_i, y_k trotz fehlender Beobachtungen von $S_{ik}, i+k > I+1$, geschätzt werden können, wird im folgenden Abschnitt gezeigt. Dazu muss die Unabhängigkeit und Positivität aller S_{ik} vorausgesetzt werden. Diese Annahmen sind im Vergleich zum Chain-Ladder Verfahren deutlich strenger, da dort nur die Unabhängigkeit der Anfalljahre vorausgesetzt wird und negative Zuwächse S_{ik} nicht ausgeschlossen sind.

3.2 Ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren

Die Zufallsvariable S_{ik} stellt die Änderung des Schadenstands von Anfalljahr i in Abwicklungsjahr k dar. Bisher wurde für S_{ik} das *Kollektive Modell* benutzt, in diesem Abschnitt allerdings wird nun das *Individuelle Modell*

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{v_i} R_{ikn}$$

verwendet. Dabei ist das Volumenmaß v_i von Anfalljahr i die Polizzenzahl.

R_{ikn} steht also für den von der n -ten Polizza stammenden Änderungsbetrag, der für die meisten Polizzen gleich Null ist. Darum wird für die Modellierung von R_{ikn} eine Gammaverteilung (siehe ANHANG) mit Formparameter < 1 angesetzt. Der allgemeine Ansatz lautet

$$\mathbb{E}(R_{ikn}) = x_i y_k, \quad 1 \leq n \leq v_i,$$

unter der Einschränkung, dass die Gammaverteilung von R_{ikn} in allen Jahren i und k und für alle Polizzen $n = 1, \dots, v_i$ denselben Formparameter α hat. Schließlich soll die Parameterzahl nicht allzu groß werden. Daraus folgt

$$\mathbb{V}(R_{ikn}) = \frac{(x_i y_k)^2}{\alpha}.$$

Für die S_{ik} ergibt sich also folgendes Modell: S_{ik} ist gammaverteilt mit

- Erwartungswert $\mathbb{E}(S_{ik}) = v_i x_i y_k$,
- Formparameter $v_i \alpha$
- und Varianz $\mathbb{V}(S_{ik}) = \frac{v_i (x_i y_k)^2}{\alpha}$.

Wie bei allen kreuzklassifizierten parametrischen Modellen muss angenommen werden, dass die S_{ik} global unabhängig sind. Um nun Schätzer für x_i und y_k zu erhalten, muss zunächst die Likelihoodfunktion (siehe ANHANG) aufgestellt werden.

$$L = \prod_{i,k} \exp\left(-\frac{\alpha S_{ik}}{x_i y_k}\right) \left(\frac{\alpha S_{ik}}{x_i y_k}\right)^{\alpha v_{ik}} / (S_{ik} \Gamma(\alpha v_{ik}))$$

Die Likelihoodschätzer sind jene Werte x_i, y_k , die L maximieren. Nullsetzen der partiellen Ableitungen von L nach x_i, y_k liefert

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^{I+1-i} \frac{S_{ik}}{y_k}}{v_i(I+1-i)}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$y_k = \frac{\sum_{i=1}^{I+1-k} \frac{S_{ik}}{x_i}}{\sum_{i=1}^{I+1-k} v_i}, \quad 1 \leq k \leq I,$$

woraus sich die Schätzer iterativ durch abwechselndes Berechnen von x_i und y_k ergeben. Die Startwerte sind dabei $y_1 = \dots = y_I = 1$.

Nun kann der Endschaten

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i$$

mit dem Reserveschätzer

$$\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^I v_i \hat{x}_i \hat{y}_k$$

berechnet werden.

3.3 Weitere kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

Es gibt noch eine Vielzahl von weiteren kreuzklassifizierten parametrischen Verfahren, hier ein paar kurze Beispiele:

Ein Verfahren mittels der Methode der kleinsten Quadrate

Diese Methode beruht auf der Lognormalverteilung mit den Parametern $\theta_{i,k} = a_i + b_k$ und $\frac{\sigma^2}{v_i}$. Weiters dient sie als Basismodell für eine verbreitete Schadenreservierungs-Software (ICRFS von Ben Zehnirith).

Ein auf der Inversen Gaußverteilung beruhendes Verfahren

Hier kann die Varianzstruktur durch einen zusätzlichen Parameter verbessert werden.

Ein Modell mit der modifizierten Poissonverteilung

Aus dieser Methode kann das Chain-Ladder Verfahren hergeleitet werden.

4 Modifikationen der bisher behandelten Verfahren

In diesem Kapitel werden zwei Modifikationen der bisherigen Modelle beschrieben. Einerseits wird auf die sogenannten Kalenderjahreffekte und den Einsatz von Separationsverfahren eingegangen. Andererseits wird die sachgerechte Modellierung von IBNR- und IBNER-Schäden behandelt.

4.1 Separation von Kalenderjahreffekten

Man nehme an, dass die Beträge S_{ik} des Abwicklungsdreiecks bereits um die *monetäre Inflation* bereinigt sind. Dennoch ist das Inflationsproblem damit bei Weitem nicht gelöst, da in der Haftpflichtversicherung häufig noch eine sogenannte „*superimposed inflation*“ wirkt. Das heißt, dass oft auch nach der üblichen Inflationsbereinigung noch ein trendmäßiger Anstieg der jährlichen Schadenlast zu beobachten ist, auf Grund von Veränderungen in der Rechtsprechung, steigendem Anspruchdenken der Geschädigten und weiteren ähnlichen Faktoren.

Die bisherige Annahme der *Unabhängigkeit der Anfalljahre* stellt nun ein Problem dar, weil jeder kalenderjahrweise wirkende Einfluss im Allgemeinen mehrere Anfalljahre zugleich betrifft. Dies gilt außer für deutliche Änderungen der Inflationsrate insbesondere für Änderungen in der Reservierungs- und Regulierungspraxis sowie in der Rechtsprechung. Darum sollte das Abwicklungsdreieck zu Beginn der Spätschadenreserve-Schätzung auch auf das Vorhandensein solcher *Kalenderjahreffekte* überprüft und die Auswirkung des Effekts auf die Höhe der Schadenreserve gegebenenfalls durch Weglassen oder Glätten einzelner Daten eliminiert werden. Im Folgenden werden hierfür einige Vorgangsweisen gezeigt.

Wie der Name schon sagt, manifestieren sich Kalenderjahreffekte innerhalb eines speziellen Kalenderjahres, also entlang einer dritten Richtung im Abwicklungsdreieck, nämlich entlang der Parallelen zur Hypotenuse. Somit wirkt jeder Kalenderjahreffekt zugleich auf Anfall- und Abwicklungsjahre.

Konstante Kalenderjahreffekte

Man betrachte das kreuzklassifizierte Modell

$$\mathbb{E}(S_{ik}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i, \quad k \leq I,$$

und lasse nun einen konstanten jährlichen Inflationsfaktor $u > 1$ darauf wirken

$$\mathbb{E}(S_{ik}) = x_i y_k u^{i+k-2}.$$

Dies kann wieder in der kreuzklassifizierten Form geschrieben werden

$$\mathbb{E}(S_{ik}) = (x_i u^{i-1})(y_k u^{k-1}).$$

Wie man sieht, überträgt sich die Inflation erwartungsgemäß sowohl auf die Anfall- als auch auf die Abwicklungsjahrparameter. Daraus können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Mit Hilfe eines kreuzklassifizierten Modells ist es nicht möglich zu erkennen, ob in den Daten ein konstanter Kalenderjahreffekt enthalten ist.
2. Ein bereits in den Daten enthaltener, konstanter Kalenderjahreffekt wird von den kreuzklassifizierten Modellen auf die prognostizierten Werte $S_{ik}, i + k > I + 1$, extrapoliert.

Allerdings stellt sich dies nicht als störend dar, da angenommen werden muss, dass dieselbe konstante Inflation auch in den nächsten Jahren weiterwirkt.

Nichtkonstante Kalenderjahreffekte

Nichtkonstante Kalenderjahreffekte $u_j, 2 \leq j \leq I + 1$, hingegen können normalerweise nicht multiplikativ aus Zeilen- und Spalteneffekten zusammengesetzt werden. Es handelt sich zum Beispiel um Sprünge in der Inflationsrate und Änderungen in der Rechtsprechung oder der Schadenregulierung. Sind nur einzelne Kalenderjahre von solchen besonderen Effekten betroffen, so können sie bei allen bisher behandelten Schadenreservierungsverfahren mittel Plots der standardisierten Residuen gegen die Kalenderjahre erkannt werden. Da nicht angenommen werden kann, dass sich die Effekte in der Zukunft wiederholen bzw. dass sie vom Reservierungsverfahren richtig in die Zukunft extrapoliert werden, sollten sie auf jeden Fall quantifiziert und eliminiert werden.

Einen Spezialfall stellt eine unbekannte nichtkonstante jährliche Inflation dar. Um diese zu quantifizieren, müssen die Daten S_{ik} so transformiert werden, dass ohne Inflation entweder keine systematischen Anfalljahrunterschiede oder keine systematischen Abwicklungsjahrunterschiede vorkommen. Denn dann können doch vorhandene Anfalljahr- bzw. Abwicklungsjahrunterschiede direkt auf die Inflation zurückgeführt werden.

4.2 Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden

Bisher wurde auf den Unterschied zwischen IBNR- und IBNER-Schäden nicht näher eingegangen. Allerdings wäre eine Trennung durchaus sinnvoll, wie im Weiteren zu sehen ist. Dazu zerlege man den Änderungsbetrag des Schadenstands von Anfalljahr i aus dem Verlauf des Abwicklungsjahres k

$$S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$$

in die Bestandteile

$$S_{ik} = T_{ik} + U_{ik}.$$

Der Betrag U_{ik} bezieht sich auf neue Schäden, die vor dem Abwicklungsjahr k noch nicht gemeldet waren, also auf die IBNR-Schäden. Der Betrag T_{ik} hingegen bezieht sich auf Änderungen bei offenen Schäden, die vor dem Abwicklungsjahr k bereits gemeldet waren, d.h. auf die IBNER-Schäden. Klarerweise gilt $T_{i1} = 0$, woraus $C_{i1} = S_{i1} = U_{i1}$ folgt.

Modellierung der IBNR-Schäden

Unter der Annahme, dass U_{ik} unabhängig von $U_{i1}, \dots, U_{i,k-1}$ und $T_{i1}, \dots, T_{i,k-1}$ ist, kann zur Modellierung der IBNR-Schäden unmittelbar der unbedingte Erwartungswert von U_{ik} herangezogen werden, der nur vom Abwicklungsjahr k und dem bekannten Volumen v_i des Portfeuillees im Anfalljahr i abhängt. Somit erhält man das Modell

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_{ik}) &= v_i m_k, & 1 \leq i, k \leq I, \\ \mathbb{V}(U_{ik}) &= v_i s_k^2, & 1 \leq i, k \leq I,\end{aligned}$$

mit unbekanntem Parametern m_k, s_k . Es handelt sich dabei um das Modell der anfalljahr-unabhängigen Schadenquotenzuwächsen, dessen nähere Beschreibung aus Gründen des Umfangs ausgelassen wird.

Modellierung der IBNER-Schäden

Hier wird davon ausgegangen, dass T_{ik} unabhängig von U_{ik} ist, jedoch nicht von der bisherigen Schadenabwicklung. Vielmehr wird der Erwartungswert von T_{ik} als abhängig von der Gesamthöhe aller zum Ende von Abwicklungsjahr $k - 1$ offenen Schäden angenommen, da die Einzelschäden, aus welchen sich T_{ik} zusammensetzt, im Abwicklungsjahr $k - 1$ schon bekannt waren. Es ergibt sich das Modell

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{ik}|D_{i,k-1}) &= C_{i,k-1} h_{k-1}, \\ \mathbb{V}(T_{ik}|D_{i,k-1}) &= C_{i,k-1} t_{k-1}^2,\end{aligned}$$

mit unbekanntem Parametern h_k, t_k , wobei h_{k-1} für die vom Abwicklungsjahr abhängige Änderungsrate steht. $D_{i,k-1}$ stellt die Gesamtheit aller Daten von Anfalljahr i bis inklusive Abwicklungsjahr $k - 1$ dar. Dies ist eine vereinfachte Darstellung, der Anteil b_k der Einzelfallreserven am Gesamtschaden C_{ik} wird bezüglich aller Anfalljahre i als konstant vorausgesetzt und mit h_k bzw. t_k zusammengefasst.

Gesamtes Modell

Insgesamt erhält man für die C_{ik} das Modell

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{ik}|D_{i,k-1}) &= \mathbb{E}(C_{i,k-1} + T_{ik} + U_{ik}|D_{i,k-1}) \\ &= C_{i,k-1}(1 + h_{k-1}) + v_i m_k,\end{aligned}$$

also eine Kombination des Chain-Ladder Modells mit dem Modell der anfalljahr-unabhängigen Schadenquotenzuwächsen (siehe MODELLIERUNG DER IBNR-SCHÄDEN). Schließlich ergeben sich für die unbekanntem Parameter folgende erwartungstreuen (siehe

ANHANG) Schätzer:

$$\begin{aligned}\hat{m}_k &= \frac{\sum_{i=1}^{I+1-k} U_{ik}}{\sum_{i=1}^{I+1-k} v_i}, \quad 1 \leq k \leq I \\ \hat{s}_k^2 &= \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i \left(\frac{U_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-1 \\ \hat{h}_k &= \frac{\sum_{i=1}^{I-k} T_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}, \quad 1 \leq k \leq I-1 \\ \hat{t}_k^2 &= \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \left(\frac{T_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{h}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-2 \\ \hat{s}_I^2 &= \min\{\hat{s}_k^2 | 1 \leq k \leq I-1\} \\ \hat{t}_I^2 &= \min\left\{ \frac{\hat{t}_{I-2}^4}{\hat{t}_{I-3}^2}, \hat{t}_{I-3}^2 \right\}\end{aligned}$$

Natürlich sind \hat{m}_k und \hat{h}_{k-1} voneinander unabhängig, da ja auch U_{ik} und T_{ik} voneinander unabhängig sind. Schreibt man für die bekannten Daten

$$\begin{aligned}D &= \{U_{ik}, T_{ik} | i+k \leq I+1\}, \\ D_i &= \{U_{ik}, T_{ik} | 1 \leq k \leq I+1-i\},\end{aligned}$$

so gilt für $k > I+1-i$ unter der Annahme der Unabhängigkeit der Daten verschiedener Anfalljahre

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{ik}|D) &= \mathbb{E}(C_{ik}|D_i) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{ik}|D_{i,k-1})|D_i) \\ &= v_i \cdot m_k + \mathbb{E}(C_{i,k-1}|D_i)(1 + h_{k-1}).\end{aligned}$$

Wird dies nun sukzessiv angewandt und die Abkürzung $g_k = 1 + h_k$ benutzt, erhält man

$$\mathbb{E}(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i} g_{I+1-i} \cdot \dots \cdot g_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i m_k g_k \cdot \dots \cdot g_{I-1}.$$

Also ergibt sich der mittlere Endschaten, indem der aktuelle Schadenstand $C_{i,I+1-i}$ und die erwarteten Spätschäden $v_i m_k$, $I+2-i \leq k \leq I$, mit den Faktoren g_j weiterentwickelt werden. Somit wird der Endschaten C_{iI} mit der Abkürzung $\hat{g}_k = 1 + \hat{h}_k$ durch

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \hat{g}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{g}_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i \hat{m}_k \hat{g}_k \cdot \dots \cdot \hat{g}_{I-1}$$

und die Reserve R_i durch

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$$

geschätzt.

Ob eine Trennung der IBNR- und IBNER-Schäden sinnvoll ist, hängt von den entsprechenden Datengegebenheiten ab. Beruhen die Daten auf wenigen Schäden, so kann die Trennung von IBNR- und INBER-Schäden möglicherweise dazu führen, dass das Abwicklungsmuster der Daten schlechter zu erkennen ist als vorher. Sind die Daten jedoch detailliert genug, sollte dieses Verfahren auf jeden Fall in Betracht gezogen werden.

5 Fazit

Die Reservierung für Spätschäden stellt ein besonders vielschichtiges Problem der Versicherungswissenschaft dar, bei dem nicht nur mathematische, sondern vor allem auch rechtliche Aspekte zu berücksichtigen sind.

Aufgrund ihres finanziellen Gewichts bei Rechnungslegung und Prämienkalkulation ist die Berechnung der Spätschadenreserve für Versicherungsunternehmen unerlässlich. Sie wird in Zukunft noch weiter an Bedeutung gewinnen. In einer wachsenden Zahl von Ländern, wie z. B. in den USA und Kanada, muss die Höhe der Spätschadenreserve von einem Aktuar testiert werden. In Österreich ist dies bisher nur für die Deckungsrückstellung in der Lebens-, Kranken- und Unfallsversicherung verpflichtend, doch früher oder später werden die Schadenreserven wohl auch hier mit einem versicherungsmathematischen Testat versehen werden müssen.

In dieser Arbeit wurden einige mathematische Verfahren zur Berechnung der Spätschadenreserve vorgestellt, die sich in multiplikative verteilungsfreie und kreuzklassifizierte parametrische Verfahren einteilen lassen. Durch verschiedene Modifikationen und Verfeinerungen lassen sich etwaige Schwächen der Modelle ausgleichen, sodass man insgesamt ein gutes Instrumentarium zur Analyse der Daten und zur Schätzung der Schadenreserve erhält. Die Entscheidung für ein bestimmtes Verfahren sollte anhand des Standardfehlers des Reserveschätzers getroffen werden, da er unmittelbar die Genauigkeit der geschätzten Reserve angibt.

Das wichtigste Verfahren wird aufgrund der stochastischen Analysemöglichkeiten weiterhin das Chain-Ladder Verfahren bleiben. Andere Verfahren werden nur zur Anwendung kommen, wenn ihr Standardfehler deutlich unter dem des Chain-Ladder Verfahrens liegt.

6 Anhang

Erwartungstreuer Schätzer

Sei $\beta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt h erwartungstreu für β , wenn gilt

$$\mathbb{E}_\gamma h(X_1, \dots, X_n) = \beta(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Gammaverteilung

Die Gammaverteilung ist durch die Dichte

$$f(x) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x\alpha}{\mu}}, \quad x > 0,$$

gegeben. Abweichend von der üblichen Darstellung kommt hier der Erwartungswert μ direkt als Parameter vor.

Iterierter Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y, Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$$

Likelihoodfunktion

Sei (X_1, \dots, X_n) eine gegebene Stichprobe, seien $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ die beobachteten Werte und sei \mathbb{P}_γ die Verteilung von $X_i, i = 1, \dots, n$. Dann heißt die Funktion

$$\gamma \mapsto L(\gamma, x^n) := \prod_{i=1}^n f(x_i|\gamma), \quad \gamma \in \Gamma$$

Likelihoodfunktion.

Literatur

- [M] THOMAS MACK: *Schadenversicherungsmathematik*
(Schriftreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 28)
Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1997

- [S] KLAUS D. SCHMIDT: *Versicherungsmathematik*
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002

- [W] WOLFGANG WERTZ: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*
Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie (TU Wien), Wien 2008