

# **Spieltheoretische Anwendungen in der Versicherungsmathematik**

Seminararbeit aus Finanz- und  
Versicherungsmathematik

Mitterhuber Jürgen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Nash-Gleichgewichte</b>	<b>5</b>
2.1	Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien . . . . .	5
2.2	Gemischte Strategien . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Nullsummenspiele und Minmax-Wert</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Dynamische Spiele mit vollständiger Information</b>	<b>12</b>
4.1	Perfekte Information . . . . .	12
4.2	Extensive Form und imperfekte Information . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Kooperative Spiele</b>	<b>14</b>
5.1	Verhandlungsspiele . . . . .	15
5.2	Koalitionsspiele . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Empirische Aspekte</b>	<b>25</b>
6.1	Nutzenfunktionen . . . . .	25
6.2	Modellbildung . . . . .	26

# 1 Einführung

Zu Beginn möchte ich noch ein paar Worte bezüglich der verwendeten Literatur vorausschicken:

Zum größten Teil werde ich mich in meinen Ausführungen an das Buch von SIEG[S] halten. Lediglich in dem gleich folgenden Teil „Was ist Spieltheorie“ beziehungsweise bei der späteren Definition des Shapley-Werts wechsele ich zu RIECK[R] beziehungsweise WIKIPEDIA[W].

Im Kapitel 5 werden ich dann noch zwei ausgewählte Beispiele zur Anwendung in der Versicherungsmathematik bringen, welche ich LEMAIRE[L] beziehungsweise BORCH[B] entnommen habe.

## Was ist Spieltheorie

Im Spiel versucht jeder schlauer zu sein als die anderen. Die Spieltheorie untersucht was herauskommt, wenn das alle versuchen. Außerdem behandelt sie die ganze Welt so, als wäre diese ein großes Spiel.

Damit ein Spiel ein Spiel ist, braucht es erst einmal Regeln. Diese Regeln legen fest, was jeder einzelne Spieler tun kann, und was nicht. Sie besagen auch, was jeder Spieler weiß, was er mag, und was nicht. Zum Beispiel sagen die Regeln beim Schach wie sich die Figuren bewegen können, dass man sie alle immer sehen kann und dass beide Spieler es nicht mögen, wenn ihr König matt gesetzt wird.

Beim Schach ist es einfach zu sehen woher die Regeln kommen: Sie wurden einfach festgelegt.

Auch in der Spieltheorie gibt es gewisse Regeln um überhaupt einmal zu definieren, was ein *Spiel* im mathematischen Sinne ist. Doch bevor wir dazu kommen, möchte ich den wohl berühmtesten Vertreter, das *Gefangenendilemma* (prisoners' dilemma) vorstellen. Auch wenn dieses Problem nicht im Wirtschaftsleben beheimatet ist, so wird es doch für viele „Kunststücke“ die der Spieltheoretiker durchführt, auf die Bühne geholt.

### 1.1 Beispiel (*Gefangenendilemma*).

Zwei Angeklagte, denen ein schweres Verbrechen vorgeworfen wird, werden getrennt verhört. Ohne Geständnis kann man ihnen nur ein minderschweres Verbrechen nachweisen, das zu einer kurzen Haftstrafe führt. Gesteht genau ein Gefangener und belastet den anderen, so kann er von der Kronzeugenregelung Gebrauch machen und wird freigesprochen, während der andere für viele Jahre ins Gefängnis kommt. Gestehen beide, so werden auch beide bestraft, wobei ihr Geständnis strafmindernd wirkt.

In diesem Spiel müssen die beiden Gefangenen sich beim Verhör gleichzeitig und unabhängig voneinander entscheiden, ob sie „Gestehen“ oder „Schweigen“.

Trägt man die möglichen Handlungen in eine Matrix ein und berechnet die Haftstrafen, so erhält man die *Ereignismatrix* (siehe Tabelle 1). Die erste Zahl in einer Zelle steht dabei für die Dauer der Haftstrafe des Zeilenspielers. Die zweite Zahl in der Zelle beschreibt die Dauer der Haftstrafe des Spaltenspielers.

	Schweigen	Gestehen
Schweigen	4/4	15/1
Gestehen	1/15	10/10

Tabelle 1: Ereignismatrix: Haftstrafe in Jahren im Gefangenendilemma

Man kann davon ausgehen, dass die Spieler eine kürzere Haftstrafe einer längeren vorziehen. Sind die Ereignisse mit Nutzenbewertungen der Spieler verbunden, so spricht man von Auszahlungen (payoffs) an die Spieler. Diese sind dabei die Nutzenwerte, die der Spieler bei einem bestimmten Ereignis erreicht. Eine mögliche *Auszahlungsmatrix* zum Gefangenendilemma zeigt Tabelle 2.

	Schweigen	Gestehen
Schweigen	3/3	0/5
Gestehen	5/0	1/1

Tabelle 2: Auszahlungsmatrix des Gefangenendilemmas

Der Zeilenspieler steht vor der Wahl, zu gestehen oder zu schweigen. Die Auszahlungen die er erhält, sind jeweils abhängig von der Handlung des Mitgefangenen. Nimmt der Zeilenspieler an, dass der Mitgefangene gesteht, so erhält er entweder 1, wenn er auch gesteht, oder 0, falls er schweigt. Nimmt der Zeilenspieler an, dass der Mitgefangene schweigt, so erhält er entweder 5, wenn er gesteht, oder 3, falls er auch schweigt. In beiden Fällen ist es für den Zeilenspieler besser, wenn er gesteht, da er eine höhere Auszahlung erhält. Man sagt, dass die Handlung „Gestehen“ die Handlung „Schweigen“ dominiert, da sie unabhängig davon was der Gegenspieler unternimmt, die höhere Auszahlung verspricht. Der Zeilengefangene gesteht.

Wenn der Spaltenspieler dieses Verhalten antizipiert, dann geht er davon aus, dass der Zeilenspieler gesteht. Er hat die Wahl zwischen einer Auszahlung von 0 für das Schweigen und einer Auszahlung von 1 für das Gestehen. Er wird gestehen.

Die Vorhersage der Spieltheorie ist demnach, dass im Gefangenendilemma beide Spieler gestehen werden. Man spricht davon, dass die Strategie „Gestehen“ für den Zeilenspieler und „Gestehen“ für den Spaltenspieler die Lösung des Spiel bilden. Strenggenommen war bisher nur von *reinen Strategien* die Rede, d.h. von Strategien, bei denen sich jeder Spieler stets eindeutig für eine bestimmte Aktion entscheidet.

Auffällig ist bei dieser Lösung, dass sich beide Spieler besser stellen könnten, wenn sie schweigen würden. Dann erhielte jeder von ihnen eine um 2 Einheiten höhere Auszahlung. Die Lösung ist also nicht *Pareto-optimal*. Als Pareto-optimal werden Zustände beschrieben, in denen sich kein Spieler verbessern kann, ohne dass sich gleichzeitig ein anderer Spieler verschlechtert.

Im Gefangenendilemma würden selbst Absprachen vor dem Verhör nicht dazu führen, dass Kooperation mit beidseitigem Schweigen zustande kommt. Die Kronzeugenregelung ist vom Gesetzgeber gerade deshalb so konstruiert worden. Nehmen wir an, die beiden Gefangenen treffen sich beim Hofgang und versprechen, alles abzustreiten. Beim Verhör hat wieder jeder Gefangene den Anreiz, doch zu gestehen, könnte er mit dieser Strategie doch seine Auszahlung weiter erhöhen.

Das Gefangenendilemma ist ein *nicht-kooperatives* Spiel, denn verbindliche Absprachen sind nicht möglich. Jeder Spieler muss in einem nicht-kooperativen Spiel für sich alleine entscheiden und eine Handlung auswählen. Er kann nicht darauf pochen, dass eine Absprache vom Gegenspieler eingehalten wird.

Eine strategisch gleiche Situation wie im Gefangenendilemma erhält man in vielen ökonomischen Anwendungen.

**1.2 Definition.** *Ein Spiel in strategischer (oder Normal-)Form besteht aus drei Elementen:*

1. Menge der  $I$  Spieler  $\{1, \dots, I\}$
2. Menge  $S_i$  der reinen Strategien  $s_i^1, \dots, s_i^{M_i}$  für jeden Spieler  $i$ .
3. Auszahlungsfunktionen  $u_i(s)$ , die für Strategiekombinationen  $s = (s_1, \dots, s_I)$  die Auszahlung an den Spieler  $i$  angeben.

Die Aufgabe der Spieltheorie ist es zu prognostizieren, welche Strategie die Spieler in einem Spiel wählen. Diese Prognose nennt man Lösung des Spiels. Die Lösung kann eindeutig sein, aber auch unterschiedliche Strategiekombinationen können als Lösung in Frage kommen.

**1.3 Definition.** *Sei  $s_{-i} \in S_{-i}$  ein Strategietupel von Strategien aller Spieler bis auf  $i$  und sei  $\tilde{s}_i$  eine Strategie des  $i$ . Dann ist*

$$(\tilde{s}_i, s_{-i}) = (s_1, \dots, s_{i-1}, \tilde{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_I) .$$

Im Gefangenendilemma ist die Strategie „Gestehen“ dominant, da sie immer eine höhere Auszahlung liefert als die Strategie „Schweigen“ verspricht - unabhängig davon, was der Gegenspieler unternimmt. In formaler Schreibweise ergibt sich:

**1.4 Definition.** *Eine reine Strategie  $s_i$  des Spielers  $i$  ist strikt dominiert, falls  $\tilde{s}_i \in S$  existiert, so dass*

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für alle } s_{-i} \in S_{-i}$$

Die Strategie ist schwach dominiert, falls

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für alle } s_{-i} \in S_{-i}.$$

und

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für ein } s_{-i} \in S_{-i}$$

gilt.

Eine Strategie ist strikt dominiert, falls es eine andere gibt, die für alle möglichen Strategien des Gegners eine höhere Auszahlung verspricht. Entsprechend ist eine Strategie schwach dominiert, falls es eine andere gibt, die für alle möglichen Strategien des Gegners eine mindestens genauso hohe Auszahlung bewirkt und für mindestens eine Strategie eine höhere.

## 2 Nash-Gleichgewichte

### 2.1 Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

Mit dem Kriterium der wiederholten Dominanz sind viele ökonomische Spiele, wie zum Beispiel das folgende, nicht zu lösen.

#### 2.1 Beispiel (BOEING und AIRBUS).

BOEING und AIRBUS überlegen, einen neuen Flugzeugtyp zu entwickeln und damit in den Markt einzutreten oder nicht. Die Entwicklungskosten eines neuen Flugzeugtyps sind sehr hoch. Bei so hohen Entwicklungskosten ist das Projekt nicht profitabel, wenn der Konkurrent gleichzeitig einen ähnlichen Flugzeugtyp entwickelt und damit in den selben Markt eintritt. Die Situation ist in Auszahlungsmatrix 3 dargestellt. (Zeilenspieler: BOEING, Spaltenspieler: AIRBUS)

	Markteintritt	Kein Markteintritt
Markteintritt	-5/-5	100/0
Kein Markteintritt	0/100	0/0

Tabelle 3: Auszahlungsmatrix: Flugzeugmarkt

Entwickelt AIRBUS den neuen Flugzeugtyp, so ist es für BOEING besser, nicht in den Markt einzutreten (0), als in den Markt einzutreten (-5). Tritt AIRBUS nicht in den Markt ein, so ist es für BOEING besser, den Typ zu produzieren (100), als dem Markt fernzubleiben (0). Eine solche Situation nennt man *Nash-Gleichgewicht* (Nash equilibrium). Kein Unternehmen kann seine Auszahlung weiter erhöhen, solange der Konkurrent seine Strategie beibehält. Da keiner seine Auszahlung erhöhen kann, wird die eingeschlagene Strategie beibehalten. Der erreichte Zustand ist ein Gleichgewicht.

Diese Spiel besitzt ein weiteres Nash-Gleichgewicht: BOEING tritt in den Markt ein und AIRBUS nicht.

**2.2 Definition (Nash-Gleichgewicht).** Eine Strategiekombination  $s^*$  heißt Nash-Gleichgewicht, falls für alle Spieler  $i$

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ für alle } s_i \in S_i$$

Die Auszahlung an den Spieler  $i$ , wenn er seine Gleichgewichtsstrategie  $s_i^*$  wählt, ist größer oder genau so groß wie die Auszahlung an ihn, wenn er irgendeine andere Strategie aus seiner Strategiemenge  $S_i$  wählen würde. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Gegner ihre Gleichgewichtsstrategie  $s_{-i}^*$  spielen. Mit anderen Worten ist eine Kombination von Strategien ein Nash-Gleichgewicht, wenn die Gleichgewichtsstrategie eines jeden Spielers seine Auszahlung maximiert, vorausgesetzt, dass alle anderen Spieler ihre Gleichgewichtsstrategie wählen. Im Nash-Gleichgewicht kann sich kein Spieler durch einseitiges Abweichen verbessern.

Ein Nash-Gleichgewicht beruht auf folgenden Annahmen:

1. Individuelle Optimierung
2. Rationale Erwartungen
3. Bindende Absprachen sind nicht möglich

Gleichgewichte, die mit wiederholter strikter Dominanz gefunden wurden, sind Nash-Gleichgewichte. Deshalb ist im Gefangenendilemma (siehe Auszahlungsmatrix 2) beiderseitiges „Gestehen“ ein Nash-Gleichgewicht.

Mit den erworbenen Kenntnissen können wir nun folgendes Beispiel lösen:

### 2.3 Beispiel (Cournotsches Duopol).

Zwei Quellenbesitzer wählen die Angebotsmenge  $q_i$  ihres homogenen, also gleichwertigen, Mineralwassers aus der Strategiemenge  $Q_i = [0, \infty)$ . Der Marktpreis  $p$  wird durch die Gesamtliefermenge  $q = q_1 + q_2$  bestimmt und beträgt  $p(q) = 1 - q$ , falls die Gesamtanliefermenge kleiner als eins ist. Andernfalls ist der Preis gleich null. Die Produktion erfolgt ohne Fixkosten und mit konstanten Grenzkosten  $c$ , d.h.  $c_i(q_i) = c \cdot q_i$  ist die Kostenfunktion des  $i$ -ten Besitzers.

Beide Besitzer versuchen ihren Gewinn

$$u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot p(q) - c_i(q_i) ,$$

der ihre Auszahlung ist, zu maximieren. Das Nash-Gleichgewicht kann man berechnen, indem man die *Reaktionsfunktionen* (best-respond function)  $r_i$  herleitet. Die Reaktionsfunktion des Quellenbesitzers 1 beschreibt seine gewinnmaximierende Produktionsmenge  $r_1$ , wenn der Quellenbesitzer 2 irgendeine Menge  $q_2$  produziert.

Besitzer 1, so schreibt COURNOT (1838),

„kann nach der Festsetzung des Wertes  $q_2$  durch den Eigentümer 2 lediglich der Wert  $q_1$  so wählen, dass er ihm am zuträglichsten ist.“

Der zuträglichste Wert aber ist der Wert der Reaktionsfunktion,  $r_1(q_2)$ . Hat man die Reaktionsfunktionen berechnet, so ergibt sich in ihrem Schnittpunkt das Nash-Gleichgewicht. Im diesem Punkt bietet jeder Quellenbesitzer gewinnmaximierend an, und die Menge, die er als Produktionsmenge des Gegenspielers erwartet, wird auch vom Gegenspieler angeboten.

Die Reaktionsfunktion des 1 wird berechnet, indem man eine beliebige Produktionsmenge  $q_2$  des Gegenspielers annimmt und daraufhin die gewinnmaximale Reaktion bestimmt. Man löst das Problem  $\max_{q_1} u_1(q_1, q_2)$ . Ableiten der Gewinnfunktion des ersten Spielers

$$u_1 = p \cdot q_1 - c_1(q_1) = (1 - q_1 - q_2) \cdot q_1 - c \cdot q_1$$

führt zur Optimalitätsbedingung

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 1 - q_1 - q_2 - c = 0$$

Die optimale Anliefermenge des ersten Spielers beträgt also

$$(1) \quad q_1 = r_1(q_2) = \frac{1-c}{2} - \frac{q_2}{2}$$

Diese Reaktionsfunktion ist in Abbildung 1 dargestellt.

Analog berechnet man die Reaktionsfunktion des zweiten Quellenbesitzers zu

$$(2) \quad q_2 = r_2(q_1) = \frac{1-c}{2} - \frac{q_1}{2}$$

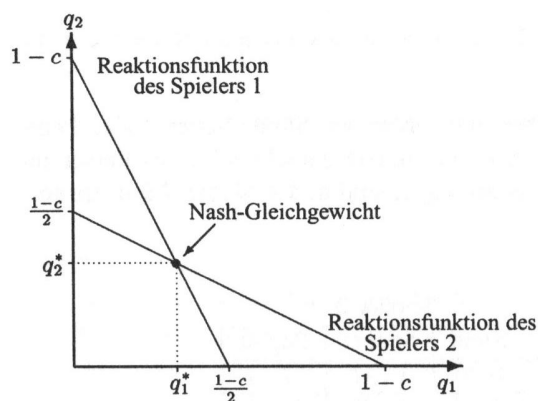


Abbildung 1: COURNOTSches Dyopol

Auch diese optimale Reaktion des Spielers 2 auf eine erwartete Anliefermenge des Gegenspielers ist in der Abbildung 1 visualisiert.

Spielen die Spieler die Nash-Gleichgewichtsstrategien  $q_i^*$ , so werden ihre Erwartungen erfüllt, d.h. der Gegenspieler verhält sich so wie vom Spieler angenommen:

$$q_2^* = r_2(q_1^*) \text{ und } q_1^* = r_1(q_2^*)$$

Jeder Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen entspricht deshalb einem Nash-Gleichgewicht. Um den Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen zu erhalten, setzt man die Reaktion  $q_1^* = r_1$  des ersten Quellenbesitzers aus Gleichung (1) in die Reaktionsfunktion des zweiten Quellenbesitzers aus Gleichung (2) ein:

$$\begin{aligned} q_2^* = r_2(q_1^*) &= \frac{1-c}{2} - \frac{q_1^*}{2} = \frac{1-c}{2} - \frac{r_1(q_2^*)}{2} = \frac{1-c}{2} - \frac{(1-c-q_2^*)/2}{2} \\ &\Rightarrow q_2^* = \frac{1-c}{4} + \frac{q_2^*}{4} \\ &\Rightarrow q_2^* = \frac{1-c}{3} \end{aligned}$$

Der Spieler 2 bietet folglich im Nash-Gleichgewicht die Menge  $q_2^* = (1-c)/3$  an und da die Quellenbesitzer identisch sind und deshalb das Spiel symmetrisch, bietet auch der Spieler 1 die Menge  $q_1^* = (1-c)/3$  an.

Um Nash-Gleichgewichte zu finden wurden zwei Methoden vorgestellt. Zum einen kann man für jede Strategiekombination überprüfen, ob die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist. Zum anderen kann man die Reaktionsfunktionen und deren Schnittpunkt berechnen.

## 2.2 Gemischte Strategien

### 2.4 Beispiel (*Stein-Schere-Papier*).

Zwei Spieler müssen gleichzeitig ziehen und entweder Stein, Schere oder Papier aufzeigen. Der Stein zerschlägt die Schere, die Schere zerschneidet das Papier und das Papier wickelt den Stein ein. Die Auszahlungen sind in der Matrix 4 dargestellt.

	Stein	Schere	Papier
Stein	0/0	1/-1	-1/1
Schere	-1/1	0/0	1/-1
Papier	1/-1	-1/1	0/0

Tabelle 4: Auszahlungsmatrix: Stein-Schere-Papier

Wenn Spieler 1 „Stein“ aufzeigt, so ist die beste Antwort des zweiten Spielers „Papier“ zu zeigen. Zeigt jedoch der zweite Spieler „Papier“, so ist die beste Antwort des 1, „Schere“ zu zeigen. Zeigt der 1 „Schere“, so ist die beste Antwort des zweiten Spielers „Stein“ zu zeigen und der Zyklus kann von neuem beginnen. Für Stein-Schere-Papier existiert kein Gleichgewicht in reinen Strategien.

In diesem Spiel kann der Gegenspieler gewinnen, falls er antizipiert ob man „Stein“, „Schere“ oder „Papier“ zeigt. Damit ihm das nicht gelingt, sollte man zufällig eine der drei Alternativen auswählen: Man würfelt, und falls 1 oder 2 fällt, nimmt man „Stein“, falls 3 oder 4 fällt, spielt man „Schere“, und falls 5 oder 6 fällt, zeigt man „Papier“. Eine Strategie, bei der die durchgeführte Handlung von einem Zufallsprozess, hier dem Würfel, abhängt, nennt man *gemischte* (mixed) *Strategie*.

Der Vorteil der gemischten Strategie für Spieler 1 ist, dass der Gegenspieler

nicht vorhersehen kann, welche Aktion Spieler 1 wählt. Der Gegenspieler kann ihn nicht durchschauen.

Auch bei einer gemischten Strategie muss man schließlich eine Aktion auswählen. Fällt der Würfel auf die 3 so nimmt man „Schere“ und erhält die Auszahlung von 1, wenn der Gegenspieler „Papier“ gespielt hat. Die Auszahlung von 1 ist ein Resultat des Zufalls, der durch die gemischte Strategie in das Spiel kam, denn hätte man eine 2 gewürfelt und deshalb „Stein“ gezeigt, so wäre die Auszahlung gleich -1. Spielt man oder der Gegner eine gemischte Strategie, so ist die Auszahlung zufallsbestimmt.

Will man die eigene Auszahlung maximieren, so wird man den Zufall prognostizieren und die erwartete Auszahlung maximieren. Zur Berechnung der erwarteten Auszahlung muss man die Wahrscheinlichkeiten  $1/3$ , mit der Spieler 1 jeweils „Stein“, „Schere“ und „Papier“ spielt, multipliziert mit den Auszahlungen aus den daraus resultierenden Ereignissen. Der Spieler 2 erhält als erwartete Auszahlung, wenn er „Stein“ spielt und der Gegenspieler die gemischte Strategie,

$$\begin{aligned} u_2(\text{Stein}) &= \frac{1}{3}u_2(\text{Stein}, \text{Stein}) + \frac{1}{3}u_2(\text{Schere}, \text{Stein}) + \frac{1}{3}u_2(\text{Papier}, \text{Stein}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

Die selbe Auszahlung von null erhält er auch, wenn er „Schere“ oder „Papier“ spielt. Das ist nicht der Fall, wenn Spieler 1 eine andere Strategie spielt. Wählt Spieler 1 häufig „Schere“, so kann Spieler 2 ihn durchschauen und sich mit häufigem Spiel von „Stein“ eine positive Auszahlung verschaffen.

Um sich vor einer Ausbeutung durch Spieler 1 zu schützen sollte auch der Spieler 2 die gemischte Strategie  $(1/3, 1/3, 1/3)$  spielen.

Wenn beide Spieler wie oben beschrieben mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Handlungen auswählen, so erhalten sie eine Auszahlung von Null. Die Auszahlung an einen Spieler ist genauso hoch wie die Auszahlung, die er erhält, wenn er irgendeine andere Strategie spielt. Es gibt also keine andere Strategie, die zu einer höheren Auszahlung führt. Die gemischten Strategien, mit den Wahrscheinlichkeiten  $(1/3, 1/3, 1/3)$  die Handlungen (Stein, Schere, Papier) durchzuführen, bilden ein Paar von besten Antworten. Sie bilden ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Gemischte Strategien lassen sich auch formal definieren:

**2.5 Definition** (*Gemischte Strategie*). Eine gemischte Strategie  $\sigma_i = (\sigma_1, \dots, \sigma_{M_i})$  für Spieler  $i$  ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der reinen Strategien  $S_i = \{s_i^1, \dots, s_i^{M_i}\}$ .  $\Sigma_i$  sei der Raum aller gemischten Strategien des Spielers  $i$ .

Die Definition von Nash-Gleichgewichten in gemischten Strategien ist die direkte Verallgemeinerung der Definition des Nash-Gleichgewichts in reinen Strategien und ergibt sich wieder aus individueller Optimierung und sich bestätigenden Erwartungen:

**2.6 Definition (Gemischtes Nash-Gleichgewicht).** Eine Kombination  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_I^*)$  von gemischten Strategien heißt Nash-Gleichgewicht, falls für alle Spieler  $i$

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \text{ für alle } \sigma_i \in \Sigma_i$$

Verfolgt der Gegenspieler im Stein-Schere-Papier-Beispiel die Gleichgewichtstrategie, mit gleicher Wahrscheinlichkeit „Stein“, „Schere“ und „Papier“ zu spielen, so kann man selbst die reine Strategie „Stein“ spielen, und erhält dabei genauso die Auszahlung von null, wie wenn man eine der beiden anderen reinen Strategien oder die Gemischte Gleichgewichtsstrategie spielen würde. In einem Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt jeder Spieler viele beste Antworten auf die Gleichgewichtsstrategie des Gegenspielers, da er mit jeder Aktion, die in seiner Gleichgewichtsstrategie mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt wird, dieselbe Auszahlung erhält.

Sind dagegen die Nash-Gleichgewichtsstrategien eindeutig beste Antworten auf die Nash-Gleichgewichtsstrategien der Gegenspieler, so spricht man von einem strikten Gleichgewicht. Im Gefangenendilemma beispielsweise ist das Nash-Gleichgewicht ein striktes.

Um gemischte Nash-Gleichgewichte auszurechnen gibt es zwei Methoden. Bei der einen nutzt man die eben beschriebene Eigenschaft des gemischten Nash-Gleichgewichts aus: Falls der Gegenspieler die Nash-Gleichgewichtstrategie spielt, dann ist der Spieler indifferent zwischen seinen reinen Strategien.

In der Regel gibt es nicht zu wenige (oder gar keine) Nash-Gleichgewichte, sondern zu viele.

Im Gefangenendilemma (siehe Auszahlungsmatrix 2) ist das Nash-Gleichgewicht nicht Pareto-Optimal. Durch eine verbindliche Absprache zu schweigen, könnten beide Spieler ihre Auszahlung von 1 auf 3 erhöhen. Nash-Gleichgewichte sind im allgemeinen nicht Pareto-Optimal.

## 3 Nullsummenspiele und Minmax-Wert

In einem *Nullsummenspiel* (zero-sum game) erhält bei jedem Ereignis ein Spieler eine Auszahlung, die der andere Spieler bezahlen muss. Damit addieren sich die Auszahlungen der Spieler immer zu null. Folgendes Nullsummenspiel ist unter dem Namen Matching-Pennies bekannt, wird aber heute mit anderen Münzen gespielt.

### 3.1 Beispiel (Matching-Euros).

Die beiden Spieler legen gleichzeitig einen Euro auf den Tisch. Stimmen die beiden Seiten überein, d.h. beide legen „Kopf“ oder beide legen „Zahl“, so erhält Spieler 1 die beiden Euros. Stimmen die beiden nicht überein, dann gewinnt Spieler 2.

	Kopf	Zahl
Kopf	1/-1	-1/1
Zahl	-1/1	1/-1

Tabelle 5: Auszahlungsmatrix: Matching Euros

In der Auszahlungsmatrix 5 addieren sich die Einträge für jedes Feld zu null und damit ist das Spiel ein Nullsummenspiel. Dieses Spiel besitzt, genauso wie das Spiel Stein-Schere-Papier, kein Gleichgewicht in reinen Strategien, sondern ein gemischtes Gleichgewicht, in dem beide Spieler „Kopf“ und „Zahl“ mit jeweils der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  spielen. Die erwartete Auszahlung ist dann gleich null.

Auch in einem Nullsummenspiel versucht ein Spieler, seine Auszahlung zu maximieren. Da die Auszahlung an einen Spieler gerade der Betrag ist, den der Gegenspieler einzahlen muss, könnte er auch die Auszahlung der Gegenspieler minimieren. Minimiert er die Auszahlung des Gegenspielers, so maximiert er in einem Nullsummenspiel seine eigene Auszahlung.

Die maximale Auszahlung an einen Spieler, falls die Gegenspieler versuchen, seine Auszahlung zu minimieren, heißt *Minmax-Wert*.

**3.2 Definition (Minmax-Wert).** Der Minmax-Wert  $m_i$  für einen Spieler  $i$  eines Spiels mit Strategieräumen  $\Sigma_i$  und Auszahlungen  $u_i$  ist

$$m_i = \min_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} \left( \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right)$$

Der Minmax-Wert für einen Spieler ist also die Auszahlung, die er maximal erreichen kann, wenn die Gegenspieler versuchen seine Auszahlung zu minimieren und er die Strategie der Gegenspieler kennt.

Spielt der Spaltenspieler „Kopf“, so kann der Zeilenspieler maximal 1 erhalten, indem er auch „Kopf“ spielt. Spielt der Spaltenspieler dagegen „Zahl“, so kann er durch die Strategie „Zahl“ wiederum 1 erhalten. Spielt dagegen der Spaltenspieler mit der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  „Kopf“ bzw. „Zahl“, so kann der Zeilenspieler maximal null erhalten.

Um den Minmax-Wert für den Zeilenspieler zu erreichen, wird der Spaltenspieler mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Seite der Münze auflegen. Der Spaltenspieler erhält dann maximal null. Als Minmax-Wert der Spieler des Matching-Euros-Spiels ergibt sich null.

In einem Nullsummenspiel sind Minmax-Strategien und Nash-Gleichgewichtsstrategien identisch. Deshalb ist der Minmax-Wert gleich den Auszahlungen im Nash-Gleichgewicht. Dieses ist auch noch der Fall, wenn man ein Spiel betrachtet, bei dem die Summe der Auszahlungen an die Spieler für alle Ereignisse dieselbe ist. Ein solches Spiel heißt *Konstantsummenspiel*.

Bei einem Nicht-Nullsummenspiel, und die meisten Spiele sind dies, gilt aber

nicht, dass Minmax-Strategie und Nash-Gleichgewichtsstrategie übereinstimmen.

Minmax-Strategien werden eingesetzt um mit ihnen einen anderen Spieler, aus welchen Gründen auch immer, maximal zu bestrafen. Zum anderen zeigt der Minmax-Wert an, wieviel ein Spieler in einem Spiel mindestens als Auszahlung erhält. Weniger als den Minmax-Wert muss nämlich kein Spieler akzeptieren.

## 4 Dynamische Spiele mit vollständiger Information

### 4.1 Perfekte Information

In dynamischen Spielen entscheiden die Spieler nicht nur einmal simultan, sondern mehrmals oder nacheinander. Von *vollständiger Information* spricht man, wenn die Spieler nicht nur ihre eigenen Auszahlungsfunktionen kennen, sondern auch die Auszahlungsfunktionen aller anderen beteiligten Spieler.

#### 4.1 Beispiel (*Ultimatum*).

Spieler A darf einen Vorschlag machen, wie 100 Euro zwischen ihm und Spieler B aufgeteilt werden. Spieler B darf dann den Vorschlag ablehnen oder annehmen. Nimmt er ihn an, so wird der Vorschlag realisiert, nimmt er ihn nicht an, so erhalten beide Spieler keine Auszahlung.

Spieler B kann damit drohen, alle Vorschläge, bei denen er weniger als 50 Euro erhält, abzulehnen. In diesem Falle ist es für A optimal, B 50 Euro anzubieten. Bietet er weniger, so lehnt Spieler B den Vorschlag ab und A erhält nichts. Genauso könnte B damit drohen, alle Vorschläge, bei denen er weniger als 99,99 Euro erhält, abzulehnen. In diesem Fall ist es für A optimal, B 99,99 Euro anzubieten. So erhält er wenigstens 1 Cent. Alle möglichen Forderungen von B können als Strategie in einem Nash-Gleichgewicht dieses Spiels auftauchen.

Zentrales Problem bei dynamischen Spielen ist die Glaubwürdigkeit von Strategien.

Versetzen wir uns in die Lage von B, der damit gedroht hat, alle Vorschläge, bei denen er weniger als 50 Euro erhält, abzulehnen. A bietet ihm aber nur 40 Euro an. Dann besitzt B die Wahl zwischen 40 Euro, wenn er das Angebot akzeptiert, und null Euro, wenn er das Angebot ablehnt. Er wird das Angebot annehmen; die Drohung war eine leere Drohung und damit unglaubwürdig.

Was passiert, wenn A ihm 1 Cent anbietet? Dann hat B die Wahl, diesen Cent anzunehmen, oder das Angebot abzulehnen und gar nichts zu erhalten. Handelt er rational, so wird er 1 Cent keiner Auszahlung vorziehen und das Angebot annehmen.

Alle Drohungen von B, positive Angebote abzulehnen, sind also unglaubwürdig.

Das Ultimatumspiel ist ein dynamisches Spiel, da Spieler B erst entscheidet, wenn A schon entschieden hat. Bei seiner Entscheidung kennt B das Angebot

von A. Deswegen spricht man von *perfekter Information*. Der Spieler, der am Zug ist, kennt alle vorherigen Züge der Mitspieler. Würde er die Züge nicht kennen, würde A beispielsweise sein Angebot in einem geschlossenen Briefumschlag machen, so spräche man von *imperfekter Information*.

## 4.2 Extensive Form und imperfekte Information

Um ein dynamisches Spiel zu beschreiben, müssen wir folgende Elemente erläutern:

- Die Menge der Spieler  $\{1, \dots, I\}$
- Die Reihenfolge, in der die Spieler am Zug sind
- Die Aktionsmöglichkeiten der Spieler bei jedem Zug
- Die Auszahlungen in Abhängigkeit der Aktionen
- Die Information der Spieler bei jedem Zug
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von exogenen Ereignissen

Zur graphischen Veranschaulichung all dieser Elemente wird ein sogenannter *Spielbaum* herangezogen. Diese Darstellung wird auch *extensive Form* genannt. Im vorherigen Kapitel haben wir dynamische Spiele kennengelernt, in denen erst Spieler 1 und dann Spieler 2 zieht. Der Spielbaum eines solchen Spiels ist in Abbildung 2 dargestellt.

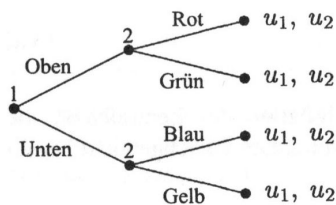


Abbildung 2: Spielbaum

Am ersten Knoten wählt Spieler 1 zwischen den Aktionen „Oben“ und „Unten“ aus. Dann erfährt Spieler 2 die Aktion und wählt am oberen Knoten zwischen „Rot“ und „Grün“ oder am unteren Knoten zwischen „Blau“ und „Gelb“. Die ausgeführten Aktionen bestimmen den Endknoten, der mit den entsprechenden Auszahlungen versehen ist. Eine Strategie für einen Spieler ist eine Auswahl von Aktionen für jeden Knoten, in denen er eine Entscheidung zu treffen hat.

Man kann dasselbe dynamische Spiel in Normalform, d.h. mit einer Auszahlungsmatrix darstellen.

Auf der anderen Seite kann man ein Spiel, in dem beide Spieler gleichzeitig ziehen, anstelle in Normalform auch als Spielbaum darstellen. Gleichzeitig ziehen ist dabei dasselbe, wie hintereinander ziehen, wenn man den vorherigen Zug nicht kennt. Man spricht dann von imperfekter Information. Ist ein Spieler am Zug, weiß aber nicht, in welchem Knoten er sich befindet, da er den

Vorgängerzug des Gegenspielers nicht kennt, so verbindet man die Knoten und sagt, beide Knoten gehören der selben Informationsmenge an. Im Spielbaum 3 ist das Gefangenendilemma in extensiver Form dargestellt.

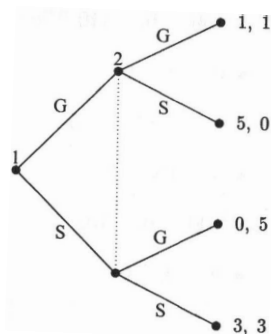


Abbildung 3: Spielbaum: Gefangenendilemma

Wenn der zweite Gefangene am Zuge ist, dann weiß er nicht, ob der erste geschwiegen hat oder nicht. Deshalb sind die beiden Knoten mit einer gestrichelten Linie verbunden.

In allen Knoten, die zur selben Informationsmenge gehören, müssen dem Spieler dieselben Aktionen zu Verfügung stehen. Andernfalls könnte er aus den ihm zur Verfügung stehenden Aktionen auf den Knoten schließen, in dem er sich befindet.

Im Gefangenendilemma kann der Spieler immer „Schweigen“ oder „Gestehen“, unabhängig davon, was der andere Spieler unternommen hat.

## 5 Kooperative Spiele

*Kooperative Spiele* sind Spiele, bei denen die Spieler verbindliche Absprachen treffen können. In einigen Spielen reicht es, dass man sich vorher abspricht, damit ein kooperatives Auskommen entsteht.

In der Regel jedoch reicht Kommunikation vor dem Spiel nicht aus, um das Kooperationsgleichgewicht zu erreichen. Auch wenn die Spieler im Gefangenendilemma auf einem Hofgang absprechen, zu schweigen, werden sie sich nicht an diese Absprache halten.

In einem kooperativen Spiel können die Spieler dagegen ihre Strategien verbindlich absprechen. Man kann sich vorstellen, dass ein Vertrag abgeschlossen wird, der bei einer Abweichung einer der Spieler von der Absprache eine so hohe Strafe androht, dass es für alle Spieler optimal ist, sich an die Absprache zu halten und den Vertrag zu erfüllen.

## 5.1 Verhandlungsspiele

**5.1 Definition** (*Verhandlungsspiel*). Ein Verhandlungsspiel zwischen zwei Spielern ist durch die Menge  $P$  aller möglichen Auszahlungsvektoren  $u = (u_1, u_2)$  und den Konfliktpunkt  $C = (c_1, c_2)$ , der realisiert wird, falls sich die Spieler nicht einigen, festgelegt. Ist  $C$  gegeben, so spricht man von einem einfachen Verhandlungsspiel, ist  $C$  endogen, so spricht man von einem allgemeinen Verhandlungsspiel.

In der Realität gibt es eine Vielzahl von Handelshemmnissen und damit eine große Anzahl von unterschiedlichen Strategien. Viele Kombinationen dieser Strategien können Pareto-optimal sein und damit als Ergebnis einer Absprache in Frage kommen.

Ist das Ergebnis nicht Pareto-optimal, so generiert die Möglichkeit der Pareto-Verbesserung das Verhandlungsproblem: Es existiert ein  $u \in P$  mit  $u_i > c_i$  für alle Spieler. Durch eine Absprache können die Auszahlungen an jeden einzelnen Spieler simultan erhöht werden. Welches Ergebnis zustande kommt, hängt von der Stärke der Verhandlungspartner ab.

Die NASH-Verhandlungslösung eines einfachen Verhandlungsspiels beruht auf vier Axiomen. Sind diese Axiome erfüllt, so kann die Lösung berechnet werden. Sei  $f$  die Funktion, die jedem Spiel  $(P, C)$  genau einen Vektor, die Lösung, zuordnet.  $f_i(P, C)$  ist dann die Auszahlung an den  $i$ -ten Spieler, die er in der NASH-Lösung erhält. Die NASH-Axiome werden im folgenden erläutert.

### Axiom 1 (Unabhängigkeit von äquivalenten Nutzentransformationen)

Für jedes Verhandlungsspiel  $(P, C)$  und für beliebige reelle Zahlen  $a_i > 0$ ,  $b_i$  ist die Lösung

$$f_i(\tilde{P}, \tilde{C}) = a_i \cdot f_i(P, C) + b_i$$

falls  $(\tilde{P}, \tilde{C})$  ein Verhandlungsspiel ist, das sich aus der linearen ordnungserhaltenden Nutzentransformation

$$\tilde{u}_i = a_i \cdot u_i + b_i ; \quad \tilde{c}_i = a_i \cdot c_i + b_i$$

ergibt.

Ändert man die Auszahlung durch eine affin-lineare Transformation, dann darf sich das Verhandlungsergebnis nicht ändern.

### Axiom 2 (Symmetrie)

Ist  $(P, C)$  ein symmetrisches Verhandlungsspiel, so gilt  $f_1(P, C) = f_2(P, C)$ .

Ist die Anfangsausstattung beider Spieler gleich und besitzen sie dieselbe Nutzenfunktion, so soll auch das Verhandlungsergebnis für beide Spieler gleich sein. Tauscht man die Namen der Spieler, Spieler 1 heiße 2 und Spieler 2 heiße 1, so darf sich das Verhandlungsergebnis nicht ändern.

### Axiom 3 (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)

Ist  $Q \subset P$  und  $f(P, C) \in Q$ , so gilt  $f(Q, C) = f(P, C)$ .

Verändert man den Auszahlungsraum durch Hinzufügen oder Weglassen von Punkten, die nicht Lösung sind, so ändert sich die Lösung nicht.

### Axiom 4 (Pareto-Optimalität)

Es existiert kein  $x \in P, x \neq f(P, C)$  mit  $x_i \geq f_i(P, C)$  für alle  $1 \leq i \leq 2$ .

Als Lösung kommt kein Ergebnis in Frage, das nicht Pareto-optimal ist. Würde eine nicht Pareto-optimale Lösung gewählt, so könnte ein Spieler besser gestellt werden, ohne dass sich der andere Spieler verschlechtert. Über diesen Nettonutzenzuwachs könnten beide Spieler weiter verhandeln. Stetige Auszahlungsräume vorausgesetzt, besteht der Anreiz zum Verhandeln in der Möglichkeit, dass beide durch die Verteilung des Nutzenzuwachses bessergestellt werden können.

Ist der Drohpunkt nicht Pareto-Optimal, so besteht ein Spielraum für Verhandlungen, den die Spieler ausnutzen werden. Durch eine Einigung können sich meist beide Spieler verbessern.

**5.2 Satz.** Sei  $(P, C)$  ein Verhandlungsspiel. Es existiert genau eine Lösung, die die Nash-Axiome erfüllt. Diese sogenannte Nash-Verhandlungslösung ist der Vektor  $u^* \in P$ , der das Nash-Produkt

$$NP = (u_1 - c_1) \cdot (u_2 - c_2)$$

maximiert.

Das Nash-Produkt ist das Produkt der durch die Verhandlung erreichten Nutzenzuwächse. Referenzpunkt der Zuwächse ist dabei die Auszahlung bei Nichteinigung, d.h. der Drohpunkt.

Man erhält die Nash-Verhandlungslösung als Lösung des Problems

$$\max(u_1 - c_1) \cdot (u_2 - c_2)$$

unter der Nebenbedingung der Pareto-Optimalität.

Insgesamt ergibt sich:

$$\frac{du_2^*}{du_1^*} = -\frac{u_2^* - c_2}{u_1^* - c_1}$$

Die Steigung der Kontraktkurve entspricht dem Verhältnis der Nutzenzuwächse. Um zu überprüfen, ob ein Punkt  $(u_1, u_2)$  auf der Kontraktkurve die Nash-Lösung ist, geht man folgendermaßen vor: Das Verhältnis der Nutzenzuwächse ist die Steigung der Verbindungslinie durch die Punkte  $(u_1, c_2)$  und  $(c_1, u_2)$ . Diese Steigung muss der Steigung der Kontraktkurve im Punkt  $(u_1, u_2)$  entsprechen.

Diese sogenannte Tangentialeigenschaft der Nash-Verhandlungslösung (siehe Abbildung 4) besagt folgendes: Im Verhandlungsergebnis wird der Nutzen, der den Konfliktpunkt übersteigt, in dem Verhältnis zwischen den Spielern aufgeteilt, wie der Nutzen von einem Spieler zum anderen übertragen werden kann, ohne die Pareto-Optimalitätsbedingung zu verletzen. Das Verhältnis der Übertragungsmöglichkeiten wird durch die Steigung der Kontraktkurve festgelegt. Entscheidend für das Verhandlungsergebnis ist also die Steigung der Kontraktkurve  $-du_2^*/du_1^*$  im Lösungspunkt, die beschreibt, in welcher Weise der Nutzen des einen Spielers steigt, falls der Nutzen des anderen Spielers sinkt.

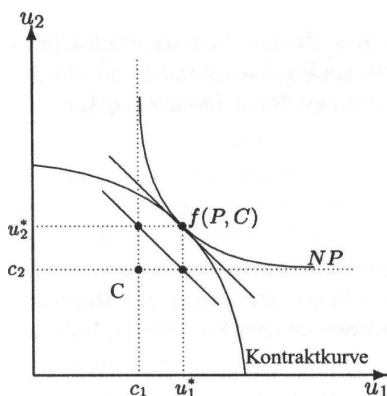


Abbildung 4: Nash-Verhandlungslösung

Man erhält durch einfaches umformen der letzten Gleichung

$$\frac{du_2^*}{u_2^* - c_2} = - \frac{du_1^* - c_1}{u_1^* - c_1}$$

Im Lösungspunkt ist also die relative Nutzenzunahme des einen Spielers genauso groß wie die relative Nutzenabnahme des anderen Spielers.

### 5.3 Beispiel (*Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern*).

Versicherungsunternehmen  $C_1$  besitzt ein Risikoportfolio mit einem mittleren Claim-Wert von 5 und einer Varianz von 4. Das Unternehmen  $C_2$  hat ein Portfolio mit Mittelwert 10 und einer Varianz von 8.

Die beiden Unternehmen ziehen die Möglichkeit eines Risikoaustausches in betracht, beschränken sich dabei aber auf einen rein linearen.  $x_1$  bzw.  $x_2$  bezeichnet den Claim-Wert vor dem Austausch und  $y_1$  bzw.  $y_2$  den Wert danach.

Dann hat der lineare Risikoaustausch in allgemeiner Form, die folgende:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - \alpha) \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + K \\ y_2 &= \alpha \cdot x_1 + (1 - \beta) \cdot x_2 - K \\ 0 &\leq \alpha, \beta \leq 1 \end{aligned}$$

Wobei  $K$  für einen fixen (positiv oder negativ) Geldwert steht. Falls  $K = 5 \cdot \alpha - 10 \cdot \beta$  ist, dann gilt für die Erwartungswerte:  $\mathbb{E}(y_1) = \mathbb{E}(x_1) = 5$  und

$\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(x_2) = 10$ . Also verändert der Risikoaustausch die Erwartungswerte nicht und wir können uns bei der Analyse auf die Varianzen beschränken.

Unabhängigkeit vorausgesetzt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(y_1) &= 4 \cdot (1 - \alpha)^2 + 8 \cdot \beta^2 \\ \mathbb{V}(y_2) &= 4 \cdot \alpha^2 + 8 \cdot (1 - \beta)^2 \end{aligned}$$

Wählt man beispielsweise  $\alpha = 0.2$  und  $\beta = 0.3$  ergibt sich  $\mathbb{V}(y_1) = 3.28 < 4$  und  $\mathbb{V}(y_2) = 4.08 < 8$ . Folglich ist es möglich die Situation beider Unternehmen zu verbessern, falls, wie in diesem einfachen Beispiel vorausgesetzt, die Unternehmen nur Wert auf die reduzierte Varianz legen.

Bleibt die Frage ob wir einen „optimalen“ Wert für  $\alpha$  und  $\beta$  definieren können?

Das Risikoaustauschabkommen mit  $\alpha = 0.2$  und  $\beta = 0.3$  wird durch Punkt 1 in Abbildung 5 dargestellt.

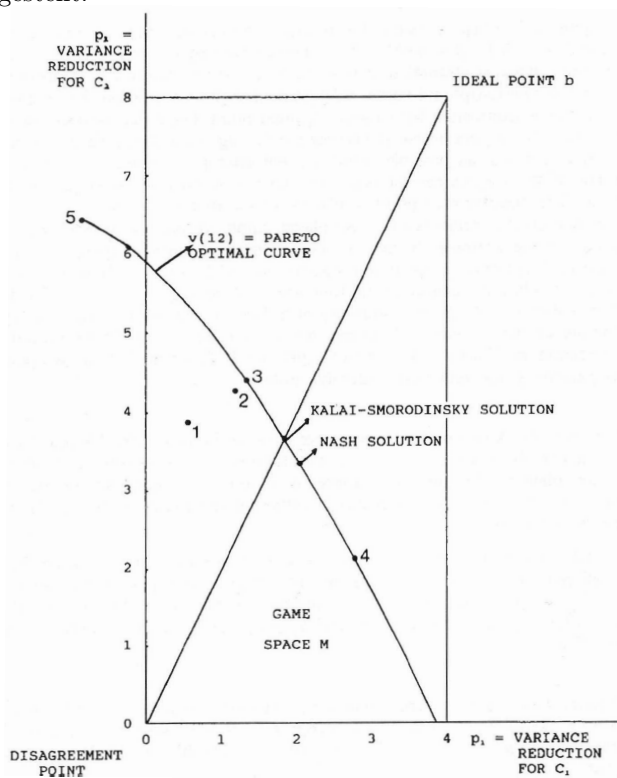


Abbildung 5: Risikoaustausch zwischen zwei Versicherern

In dieser Abbildung messen die Achsen die jeweilige Varianzreduktion  $p_1$  und  $p_2$ .

Punkt 2 entspricht den Werten  $\alpha = \beta = 0.4$ . Er dominiert Punkt 1, da er zu einer noch größeren Reduktion der Varianz für beide Unternehmen führt.

Punkt 3 steht für  $\alpha = 0.53$  und  $\beta = 0.47$ . Dieser dominiert Punkt 1 sowie 2. Man kann zeigen, dass kein anderer Punkt den dritten dominiert und dass alle

Abkommen mit  $\alpha + \beta = 1$  weder Punkt 3 dominieren, noch von ihm dominiert werden.

Beispielsweise würde  $C_1$  Punkt 4 ( $\alpha = 0.7, \beta = 0.3$ ) dem Punkt 3 vorziehen, für  $C_2$  verhält es sich genau umgekehrt. Daher dominiert kein Punkt den anderen. Die Menge aller Abkommen mit  $\alpha + \beta = 1$  bildet die Kurve  $v(12)$ , die Pareto-optimale Kurve.

Die konvexe Menge aller erreichbaren Punkte inklusive der Begrenzung durch  $v(12)$ , wird als Spielbereich  $M$  bezeichnet. Dieser Bereich wird durch die Pareto-optimale Kurve und die beiden Achsen begrenzt. Die Achsen repräsentieren die beiden individuellen Rationalitätsbedingungen: kein Unternehmen wird einem Abkommen zustimmen, das mit einem Varianzanstieg endet. (Siehe Punkt 5)

Es liegt also im Interesse beider Unternehmen die Pareto-optimale Kurve zu erreichen. Dort kommt es dann zum einem Interessenskonflikt. Können sich beide nicht einigen, wird es zu keinem Risikoaustausch kommen, was zu keiner Reduktion der Varianzen führt.

Die Varianzreduktion wird repräsentiert durch:

$$\begin{aligned} p_1 &= 4 - 4 \cdot (1 - \alpha)^2 + 8 \cdot \beta^2 \\ p_2 &= 8 - 4 \cdot \alpha^2 + 8 \cdot (1 - \beta)^2 \end{aligned}$$

Maximiert man das Produkt  $p_1 \cdot p_2$ , unter der Bedingung  $\alpha + \beta = 1$ , führt dies zur Nash-Lösung:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.613, \beta = 0.387 \\ p_1 &= 2.203, p_2 = 3.491 \end{aligned}$$

Eine weitere Variante der Lösung ergibt sich mit Hilfe der Methode nach KALAI und SMORODINSKY(1975). Sie ergibt sich im Schnittpunkt der Pareto-optimalen Kurve mit der direkten Verbindung von Konfliktpunkt und dem idealen Punkt. Hiermit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5858, \beta = 0.4142 \\ p_1 &= 1.9413, p_2 = 3.8821 \end{aligned}$$

Hier wird der Spieler 2 gegenüber der Nash-Lösung leicht bevorzugt.

## 5.2 Koalitionsspiele

Bisher wurden nur Spiele mit zwei Spielern betrachtet. Hat man mehr als zwei Spieler, so wird ein kooperatives Spiel komplizierter. Da nicht nur alle Spieler sich absprechen können, sondern sich auch einige gegen die anderen verbünden können, muss man *Koalitionen* betrachten.

**5.4 Definition (Koalition).** Sei  $G = \{1, 2, \dots, I\}$  die Menge aller Spieler. Jede nichtleere, nicht einelementige Teilmenge ungleich  $G$  heißt *Koalition* (im eigentlichen Sinne).

Ein Spieler alleine ist eine *Einerkoalition*, alle Spieler zusammen bilden die *große Koalition*, und alle Zusammenschlüsse mit mehr als einem und weniger als allen Spielern heißen *Koalition im eigentlichen Sinne*.

Jede Koalition  $K$  kann sich die Auszahlung garantieren, die die Koalition  $K$  als Minmaxwert bei einem Zweipersonenspiel gegen die Koalition der Gegenspieler erhalten würde. Dieser Minmaxwert heißt  $v(K)$ . Ist die Auszahlung von einem Spieler auf den anderen übertragbar, so sind alle Aufteilungen des Minmaxwertes  $v(K)$  untereinander denkbar, bei denen die Summe der Auszahlungen an die Mitglieder der Koalition (kleiner oder) gleich der Auszahlung ist, die sie zusammen erhalten.

**5.5 Definition** (*Charakteristische Funktion*). Eine Funktion  $v$ , die jeder Koalition  $K \subset G$  den Minmaxwert des Spiels von  $K$  gegen die Koalition aller Gegenspieler zuordnet, heißt charakteristische Funktion.

Der Wert  $v$  der charakteristischen Funktion ist der Nutzen, den die Mitglieder der Koalition  $K$  zusammen erhalten können, unabhängig von den Spielern außerhalb der Koalition. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Gegenkoalition versucht, die Auszahlung an die Koalitionsmitglieder zu minimieren. Das muss aber nicht der Fall sein, außer Koalition und Gegenkoalition spielen ein Nullsummenspiel.

Für kooperative Spiele gibt es nun eine Reihe von Lösungskonzepten, die bestimmte Kombinationen von Koalitionen und damit verbundene Auszahlungsvektoren als unrealistisch ausschließen.

Die *Imputationsmenge* schließt Lösungen aus, die nicht *individuell rational* oder nicht Pareto-optimal sind. Im Beispiel Tauschökonomie besagt individuelle Rationalität, dass der Nutzen des Konsumvektors eines Spielers nicht den Nutzen seiner Erstausrüstung unterschreiten darf. Allgemein gilt eine Auszahlung als individuell rational, wenn sie mindestens so hoch ist wie die Auszahlung, die ein Spieler  $i$  erhält, wenn er allein gegen alle anderen spielt. Diese Auszahlung ist der Wert der charakteristischen Funktion  $v(\{i\})$ .

Im Beispiel der Tauschökonomie besagt Pareto-Optimalität, dass es keinen Tausch geben darf, der den Nutzen des einen Spielers erhöht, ohne den Nutzen des anderen Spielers zu senken. Die Imputationsmenge ist Teilmenge der Kontraktkurve. Allgemein ist ein Lösungsvorschlag  $u$  des Koalitionsspiels Pareto-optimal (effizient), falls es zu  $u$  keinen anderen Auszahlungsvektor  $\hat{u}$  gibt, in dem alle Einträge mindestens genauso und ein Eintrag echt größer ist. Gäbe es ein solches  $\hat{u}$ , so würden die Spieler  $u$  als Lösung nicht akzeptieren, sondern  $\hat{u}$  vorziehen.

**5.6 Definition** (*Imputationsmenge*). Die Imputationsmenge ist die Menge der Auszahlungsvektoren, die die folgenden zwei Eigenschaften besitzen.

1. *Individuelle Rationalität*: Der Auszahlungsvektor  $u$  ist für die Spieler *individuell rational*, falls gilt:

$$u_i \geq v(\{i\}) \text{ für alle } 1 \leq i \leq N$$

2. *Effizienz*:  $u$  ist effizient, falls es keinen anderen Auszahlungsvektor  $\hat{u} \neq u$  gibt der mit  $\hat{u}_i \geq u_i$  für alle  $i$ .

**5.7 Definition** (*Kern*). Der Kern besteht aus allen Auszahlungsvektoren, die durch keine Koalition verworfen werden können und die zur Imputationsmenge gehören.

Pareto-Optimalität heißt, dass  $u$  nicht durch alle Spieler gemeinsam verworfen werden kann. Individuelle Rationalität heißt, dass  $u$  nicht durch einen Spieler  $\{i\}$  verworfen werden kann. Die Imputationsmenge beschreibt also die Auszahlungsvektoren, die nicht durch die große Koalition oder durch eine Einzelkoalition verworfen werden können. Alle anderen Kombinationen von Spielern sind Koalitionen im eigentlichen Sinne. Im Kern sind deshalb alle Vektoren, die weder von einem Spieler, einer Koalition, oder allen Spielern verworfen werden können.

**5.8 Definition** (*von-Neumann-Morgenstern-Lösung*). Die intern und extern stabilen Mengen  $S$  sind die Menge von Lösungsvorschlägen  $u$  aus der Imputationsmenge, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. *interne Stabilität*: Für alle Lösungsvorschläge  $u \in S$  existiert keine Koalition  $K$  und kein  $\hat{u} \in S$  mit  $\hat{u}_i > u_i$  für alle  $i \in K$ .
2. *externe Stabilität*: Für alle erreichbaren Lösungsvorschläge  $u$ ,  $u \notin S$ , existiert ein  $\hat{u} \in S$  und eine Koalition  $K$  mit  $\hat{u}_i > u_i$  für alle  $i \in K$ .

Die internen und externen stabilen Mengen sind eine Verallgemeinerung des Kerns, denn sie enthalten ihn.

**5.9 Beispiel** (*Verbesserung der Risikoprämie*).

Wir betrachten eine Gruppe von  $n_1 = 100$  Personen, von denen jeder mit der Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0.1$  einen möglichen Verlust von 1 erleiden kann. Wir nehmen nun an, dass diese Personen beschließen ein Versicherungsunternehmen zu bilden um sich vor dem Risiko zu schützen. Aufgrund von Regierungsbestimmungen muss die Wahrscheinlichkeit des Ruins kleiner als 0.001 sein.

Wenn so ein Unternehmen gebildet wird, beträgt die erwartete Claim-Einzahlung

$$m = n_1 \cdot p_1 = 10$$

mit einer Standardabweichung des Claims von

$$\sigma = \sqrt{n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)} = 3$$

Unter der Annahme dass der Claim normalverteilt ist und unter Einhaltung der Regierungsbestimmungen, muss das Unternehmen Gelder in der Höhe von

$$m + 3 \cdot \sigma = 10 + 9 = 19$$

erwirtschaften. Also kommen zu den 10 Geldeinheiten für die Nettoprämie noch 9 Einheiten als Sicherheitszuschlag hinzu.

Somit hat jedes Mitglied der Gruppe 1 eine Prämie von 0.19 zu zahlen.

Betrachten wir nun Gruppe 2, mit ebenfalls  $n_2 = 100$  Personen aber einer Verlustwahrscheinlichkeit  $p_2 = 0.2$ . Bilden auch diese ein Versicherungsunternehmen, ergibt sich eine totale Prämie von  $20+12=32$ .

Wenn wir nun annehmen, dass beide Gruppen sich zu einer großen vereinigen, erhalten wir einen Geldbedarf von:

$$n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + 3\sqrt{n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) + n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2)} = 10 + 20 + 15 = 45$$

Folglich ist es für beide Gruppen besser sich zusammenzuschließen, da sie alleine Prämien in der Höhe von  $19+32=51$  zu zahlen hätten.

Die Frage ist nun, wie die daraus resultierenden Gewinne aufzuteilen sind. Eine Methode wäre die Sicherheitsgewinne anteilmäßig aufzuteilen, d.h. Gruppe 1 zahlt nur mehr 15 und Gruppe 2 30. Über die „fairness“ dieser Methode lässt sich streiten, da sie den größten Teil der Gewinne Gruppe 1 zuspricht. Abgesehen davon: diese Regel ist vollkommen willkürlich.

Definieren wir  $P_1$  und  $P_2$  als die zu zahlenden Prämien der beiden Gruppen, dann erhalten wir, wenn wir rationales Handeln der beiden sich zusammenschließenden Gruppen, voraussetzen:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 45, \text{ mit} \\ 13 &\leq P_1 \leq 19 \\ 26 &\leq P_2 \leq 32 \end{aligned}$$

Jedes Paar  $(P_1, P_2)$ , dass diese Bedingungen erfüllt, kommt als Lösung in Frage.

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass eine weitere Gruppe zum Spiel hinzukommt mit  $n_3 = 120$  und  $p_3 = 0.3$ . Gruppe 3 hätte alleine eine Prämie von  $36+15=51$  aufzubringen.

Bilden alle Gruppen eine große, so ergibt sich für die Prämie:  $10+20+36+21=87$ .

Spinnen wir unser vorheriges Konstrukt weiter, erhalten wir:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= 87, \text{ mit} \\ 4 &\leq P_1 \leq 19 \\ 17 &\leq P_2 \leq 32 \\ 36 &\leq P_3 \leq 51 \end{aligned}$$

Die unteren Schranken für die Prämie ändern sich aber noch, wenn man auch die Möglichkeit der Bildung von Zweierkoalitionen in betracht zieht.

Bilden also Gruppe 2 und 3 eine Koalition, bedeutet das für ihre neue Prämie:

$$\begin{aligned} n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 + 3\sqrt{n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) + n_3 \cdot p_3 \cdot (1 - p_3)} &= \\ 20 + 36 + 19.2 &= 75.2 \end{aligned}$$

Da nun  $P_2 + P_3 < 75.2$  gilt, muss Gruppe 1 folgende neue untere Schranke  $P_1 > 11.8$  akzeptieren, falls sie zu den beiden anderen dazu stoßen möchte.

Durchspielen dieses Prinzips für die zwei verbleibenden Koalitionen führt zu:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &< 45 \\ P_1 + P_3 &< 63.4 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= 87, \text{ mit} \\ 11.8 &\leq P_1 \leq 19 \\ 23.6 &\leq P_2 \leq 32 \\ 42 &\leq P_3 \leq 51 \end{aligned}$$

Als Verallgemeinerung wollen wir nun  $m$  Gruppen betrachten. Gruppe  $i$ ,  $i \in (1, \dots, m)$  besteht aus  $n_i$  Personen und hat eine Verlustwahrscheinlichkeit von  $p_i$ . Die Menge aller Gruppen bezeichnen wir mit  $M$ .  $S$  sei eine beliebige Teilmenge von  $M$ .

Falls die Gruppen aus  $S$  ein Versicherungsunternehmen bilden, beläuft sich die Prämie auf:

$$v(S) = \sum_S n_i \cdot p_i + 3 \cdot \sqrt{(\sum_S n_i \cdot p_i \cdot (1 - p_i))}$$

Nehmen wir an  $S$  besteht aus  $s$  Gruppen, in  $\hat{S}$  sind dann die restlichen  $m - s$  Gruppen. Es ist leicht einzusehen, dass

$$v(S) + v(\hat{S}) > v(M)$$

Die Prämie ist logischerweise in der großen Koalition am geringsten, darum ist sie auch die erwartete Koalition.

Wie erhalten also als direkte Verallgemeinerung des vorangegangenen Teils:

$$(*) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i &= v(M), \text{ mit} \\ P_i &\leq v(i) \end{aligned}$$

Jede Menge  $(P_1, \dots, P_m)$ , welche diese Bedingungen erfüllt, kommt nach VON NEUMANN und MORGENSTERN als Lösung in Frage.

Diese Lösung ist aber nicht eindeutig, da sie lediglich ein Intervall in dem die Prämie für die einzelnen Gruppen liegen muss, zurück gibt.

Das erkennt man leicht mit folgender Schreibweise:

$$P_i = v(i) - t_i$$

wobei  $t_i$  nicht-negativ ist und folgende Bedingung erfüllt

$$\sum_{i=1}^m t_i = \sum_{i=1}^m v(i) - v(M)$$

$\sum_{i=1}^m t_i$  steht dabei für den Gewinn den die große Koalition durch den Zusammenschluss erzielt.

Um auch hier die Lösungsintervalle weiter zu verkleinern, treffen wir die Selbe Annahme wie zuvor:

Keine Gruppe akzeptiert eine Prämie die höher ist als die, die sie selbst in einer Einerkoalition erzielen kann. Also:

$$(**) \sum_S P_j \leq v(S)$$

Wenn wir mit  $M - i$  die Menge aller Gruppen ohne die  $i$ -te bezeichnen, können wir unser Intervall schreiben als

$$v(M) - v(M - i) \leq P_i \leq v(i)$$

Um nun schlussendlich eine bestimmte Lösung zu bekommen, wollen wir folgendermaßen vorgehen:

Nehmen wir an Gruppe 1 bildet ihr eigenes Unternehmen, d.h.

$$P_1 = v(1)$$

Gruppe 2 tritt dem Unternehmen unter der Kondition bei, sämtliche daraus resultierenden Gewinne für sich einzustreichen. Also

$$P_2 = v(1, 2) - v(1)$$

Für Gruppe 3 wiederholen wir das ganze Spiel von Neuem.

$$P_3 = v(1, 2, 3) - v(1, 2)$$

Wenn Gruppe  $m$  als letzte ins Unternehmen eintritt, heißt das für sie

$$P_m = v(M) - v(M - (m - 1))$$

Die eben bestimmten Prämien erfüllen die obigen Bedingungen (\*) sowie (\*\*) und kommen daher als Lösung in Frage. Wir können sie aber nicht als die finale Lösung akzeptieren, da sie von dem Zeitpunkt des Eintritts abhängt. Die Gruppen könne ja auf  $m!$ -Weisen der großen Koalition beitreten. Betrachten wir also all diese Varianten des Beitretens und bilden das Mittel, führt uns dies zu folgender

**5.10 Definition (Shapley-Wert).** *Der Shapley-Wert ist ein punktwertiges Lösungskonzept der Spieltheorie. Er gibt an, welche Auszahlung die Spieler in Abhängigkeit von einer Koalitionsfunktion erwarten können.*

*Sei  $M$  die Menge der Spieler,  $m = |M|$  und  $v$  die charakteristische Funktion des Spiels ( $v(S)$  ist der Wert der Koalition, also die Höhe der Kosteneinsparung durch Koalitionsbildung). Dann ist der Shapley-Wert (Auszahlung) für Spieler  $i$  definiert als:*

$$\alpha_i = \frac{1}{m!} \sum_{S \subseteq M} (s-1)! \cdot (m-s)! \cdot [v(S) - v(S-i)] \quad i = 1, \dots, m$$

Er ist die einzige Auszahlungsfunktion, welche die folgenden drei Axiome erfüllt:

1. Symmetrie-Axiom: Spieler mit gleichen Beiträgen erhalten das gleiche.
2. Null-Spieler-Axiom: Ein Spieler mit Beitrag null zu jeder Koalition erhält null.
3. Additivitäts-Axiom: Wenn das Spiel in zwei unabhängige Spiele zerlegt werden kann, mit den charakteristischen Funktionen  $v$  und  $w$ , dann soll die Auszahlung jedes Spielers im zusammengesetzten Spiel der Summe der Auszahlungen in den aufgeteilten Spielen entsprechen.

In einem Zwei-Personen Spiel, ergibt sich für den Shapley-Wert:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1/2) \cdot [v(12) + v(1) - v(2)] \\ \alpha_2 &= (1/2) \cdot [v(12) + v(2) - v(1)]\end{aligned}$$

Wenden wir also die Shapley-Lösung auf das Beispiel mit nur zwei Gruppen an, erhalten wir:

$$P_1 = 16 \text{ und } P_2 = 29$$

und für die Variante mit drei Gruppen:

$$P_1 = 14.5, P_2 = 26.9 \text{ und } P_3 = 45.6$$

## 6 Empirische Aspekte

Aufgabe der Spieltheorie ist es, reales Verhalten von Wirtschaftssubjekten zu beschreiben, zu erklären und zu prognostizieren um einem Spieler eine Handlungsanweisung zu geben. In der experimentellen Spieltheorie werden einfache Spiele von Probanden im Labor gespielt. Die Auszahlungen sind dabei Geldauszahlungen. Die im Labor beobachteten Verhaltensweisen der Probanden werden dann mit den Aktionen verglichen, die die Spieltheorie als Gleichgewicht prognostiziert. Etwaige Abweichungen zwischen Theorie und Realität führen dazu, die Unvollkommenheit der Theorie aufzudecken und zu beheben.

### 6.1 Nutzenfunktionen

In der Spieltheorie wird der Erwartungsnutzen maximiert.

Spielt man das Gefangenendilemma mit Auszahlungsmatrix 2 zu Beginn der Vorlesung im Hörsaal, so ist festzustellen, dass ein großer Teil der Studenten schweigt und die kooperative Strategie bevorzugt. Der Grund dafür mag darin liegen, dass die versprochene Auszahlung von 5 Punkten ein abstrakter Wert ohne Nutzen ist, die Offenbarung des eigenen unkooperativen Verhaltens aber mit psychologischen Nutzenverlusten verbunden ist. Zum einen sinkt das Ansehen eines Gruppenmitglieds, das den Eigennutzen über den Gruppennutzen stellt, in der Gruppe und es kann leicht zum Außenseiter werden. Zum anderen sind

viele Menschen bestrebt, ihr positives Selbstbild zu verfestigen, und Kooperationsbereitschaft ist eine Eigenschaft, die positiv zu diesem Selbstbild beiträgt. Die Vorhersage, dass im Gefangenendilemma die Strategie „Gestehen“ gespielt wird, tritt in der Realität dann nicht ein, wenn die Auszahlungen an die Spieler in der Realität des Hörsaals nicht den Punkten in der Auszahlungsmatrix 2 entsprechen.

Im Ultimatumspiel (4.1) wird oftmals das Angebot des Gegenspielers unter dem Aspekt der Fairneß betrachtet. Bietet mir der Gegenspieler von den 100 Euro nur 10 Euro an, so kann ich das als unfair empfinden, denn er will das meiste für sich behalten. In Experimenten (CAMERER/THALER 1995) werden Angebote unter 20 Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 50% abgelehnt. Die Ablehnungswahrscheinlichkeit steigt an, wenn die Angebote sinken. Um eine Ablehnung zu vermeiden, bieten die Wirtschaftssubjekte in der Regel 40 bis 50 Euro an.

Um solches Verhalten, auch *Reziprozität* genannt, in eine allgemeine Theorie einzubauen, existieren mehrere Ansätze. Man unterscheidet dabei Ansätze, in denen die Spieler „soziale Präferenzen“ so besitzen, dass zusätzlich zur eigenen Auszahlung auch die Auszahlung an die Gegenspieler Auswirkungen auf das eigene Nutzenniveau besitzen, und Ansätze, die die Intentionen der Gegenspieler einbeziehen.

BOLTON/OCKENFELS (2000) gehen in einem auszahlungsbasierten Ansatz davon aus, dass die Motivation der Spieler sowohl in der Erzielung von absolute hohen Auszahlungen  $u$  liegt, darüber hinaus die Spieler aber auch Wert auf ihre relative Auszahlung  $\sigma_i = u_i / \sum_{j=1}^I u_j$  und damit ihren Status legen: Sie maximieren den Wert der sie „motivierenden“ Funktion  $\nu_i = \nu_i(u_i, \sigma_i)$ . Eine solche motivierende Funktion könnte bei zwei Spielern die Form

$$\nu_i(u_i, \sigma_i) = a_i \cdot u_i - \frac{b_i}{2} \cdot (\sigma_i - \frac{1}{2})^2$$

mit  $a_i \geq 0$  und  $b_i > 0$  besitzen. Der erste Summand spiegelt die Selbstsucht des Spielers wieder, der zweite Term steht für das Ziel der Gleichheit, denn er ist minimal, falls beide Spieler jeweils dieselbe Auszahlung erhalten und deshalb die relative Auszahlung  $\sigma_i$  gleich einhalb ist. Jeder Spieler ist jetzt charakterisiert durch den Bruch  $a/b$ . Ist  $a/b = 0$ , dann ist  $a = 0$  und nur die relative Auszahlung zählt. Geht dagegen  $a/b$  gegen unendlich, dann verfolgt der Spieler vollständig seine eigenen Interessen und man erhält die Ergebnisse der traditionellen Spieltheorie.

## 6.2 Modellbildung

In Experimenten zeigt sich, dass nicht nur das mathematische Spiel, sondern auch die Beschreibung, durch die das Spiel in die Realität transformiert wird, Auswirkungen auf das Verhalten der Spieler besitzt. TVERSKY/KAHNEMAN (1992) betrachten folgendes Spiel:

Der Spieler erhält 10 Euro und hat dann die Entscheidung zwischen einem Verlust von 5 Euro oder einer Lotterie, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit zum

Verlust von 10 Euro oder zum Verlust von gar keinem Euro führt.

Spieler, denen eine solche Darstellung vorgelegt wurde, waren eher dazu bereit, die Lotterie zu spielen, als Spieler, denen folgendes angeboten wurde:

Der Spieler erhält entweder 5 Euro, oder er spielt die Lotterie, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit nichts oder 10 Euro bedeutet.

Beide Darstellungen beschreiben aus Sicht der Spieltheorie dieselbe Entscheidungssituation. Dennoch zeigt sich, dass Spieler risikobereiter sind, wenn es um Verluste geht.

## Literatur

- [S] DR. GERNOT SIEG: *Spieltheorie*, R.Oldenbourg-Verlag, München Wien 2005.
- [L] JEAN LEMAIRE: *Cooperative Game Theory And Its Insurance Applications*, University of Pennsylvania , USA.
- [B] KARL BORCH: *Application Of Game Theory To Some Problems in Automobile Insurance*, Bergen.
- [R] CHRISTIAN RIECK: [http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie\\_Grundlagen/was-ist-spieltheorie.htm](http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/was-ist-spieltheorie.htm)
- [W] WIKIPEDIA: <http://de.wikipedia.org/wiki/Shapley-Wert>

## Index

- Auszahlungsfunktion, 4
- Auszahlungsmatrix, 3
- Beispiele
  - BOEING und AIRBUS, 5
  - Cournotsches Dyopol, 6
  - Gefangenendilemma, 2
  - Matching-Euros, 10
  - Risikoaustausch, 17
  - Risikoprämie, 21
  - Stein-Schere-Papier, 8
  - Ultimatum, 12
- charakteristische Funktion, 20
- Ereignismatrix, 3
- extensive Form, 13
- Imputationsmenge, 20
- individuell rational, 20
- Information
  - imperfekte, 13
  - perfekte, 13
  - vollständige, 12
- Kern, 20
- Koalition, 19
  - Einer-, 19
  - große-, 19
  - im eigentlichen Sinne, 19
- Konstantsummenspiel, 11
- Kooperative Spiele, 14
- Minmax-Wert, 11
- Nash-Gleichgewicht, 5
  - gemischtes, 10
- Nash-Produkt, 16
- Nash-Verhandlungslösung, 16
- nicht-kooperativ, 4
- Nullsummenspiel, 10
- Pareto-optimal, 3
- Reaktionsfunktion, 6
- Reziprozität, 26
- schwach dominiert, 5
- Shapley-Wert, 24
- Spielbaum, 13
- Stabilität
  - externe, 21
  - interne, 21
- Strategie
  - gemischte, 8
  - reine, 3
- strikt dominiert, 4
- Verhandlungsspiel, 15
  - allgemeines, 15
  - einfaches, 15