Seminararbeit aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Martingaltheorie

Martin Pleischl

WS 2009/10, TU-Wien

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

In meiner Seminararbeit möchte ich die Grundlagen der Martingaltheorie besprechen. Zuerst gehe ich auf die Theorie der diskreten Martingale ein, danach wird die Theorie auf stetige Martingale ausgedehnt. Anschließend möchte ich eines der wichtigsten Martingale, nämlich die Brownsche Bewegung, einführen und ihre Eigenschaften untersuchen. Dabei wird vor allem auf einige recht interessante Eigenschaften der Pfade der Brownschen Bewegung eingegangen, wie z.B. unendliche Variation oder nirgends Differenzierbarkeit.
Auf Grund der Vielzahl der zu führenden Beweise werden einige ausgelassen. Bei den Beweisen aus den Kapiteln zu den Grundlagen der Martingaltheorie möchte ich auf die Vorlesung "Einführung in die stochastischen Prozesse und Zeitenreihenanalyse" von Professor Hubalek verweisen, wo diese in ausführlicher Art und Weise vorgeführt wurden.

Kapitel 2

Wiederholung aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 Bedingter Erwartungswert unter einer σ-Algebra

In diesem Kapitel möchte ich kurz den Begriff der bedingten Erwartung unter einer σ-Algebra und seine Eigenschaften wiederholen, da dies eine wichtige Grundlage für das Verständnis der Martingaltheorie bildet.
Wir betrachten nun eine integrierbare Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P). Ohne es explizit zu erwähnen, stellen wir uns die Zufallsgrößen immer über diesem Raum vor. Aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, dass für jedes $A \in F$ mit $P(A) = 0$ gilt $\mathbb{E}(X|A) = \frac{E(X \cdot 1_A)}{P(A)}$, wobei wir mit 1 die Indikatorfunktion meinen. Nun stellt sich die Frage, was man unter $\mathbb{E}(X|G)$ versteht, wenn G eine Teil-σ-Algebra von F ist.

Definition 2.1.1. Ist X eine integrierbare Zufallsvariable und G eine Teil-σ-Algebra von F, dann heißt eine Zufallsvariable Y der **bedingte Erwartungswert von X gegeben G**, wenn gilt:

1. Y ist G-messbar.
2. Y ist integrierbar.
3. $\mathbb{E}(X \cdot 1_A) = \mathbb{E}(Y \cdot 1_A)\ \forall A \in G$.

Man schreibt dann $Y = \mathbb{E}(X|G)$.

Proposition 2.1.1. (Eigenschaften der bedingten Erwartung): Seien X und Y integrierbare Zufallsvariablen, a und b reelle Zahlen und H und G Teil-σ-Algebren von F. Dann gilt:

1. **Linearität:** $\mathbb{E}(aX + bY|G) = a\mathbb{E}(X|G) + b\mathbb{E}(Y|G)$
2. **Taking out what is known:**
   Wenn X G-messbar ist, dann gilt: $\mathbb{E}(X|G) = X$.
3. Wenn X und G unabhängig sind, dann gilt: $\mathbb{E}(X|G) = \mathbb{E}(X)$.
4. **Turmeigenschaft:** Ist $H \subseteq G$, dann gilt: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|G)|H) = \mathbb{E}(X|H)$.

Kapitel 3

Martingale in diskreter Zeit

3.1 Definitionen

Definition 3.1.1.
a) Unter einem **stochastischen Prozess in diskreter Zeit** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man eine Folge von Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P).
b) Eine wachsende Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teil-σ-Algebren von F nennt man **Filtration**.
c) Ein stoch. Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **adaptiert** bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass X_n messbar bzgl. F_n ist.
d) Ein stoch. Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **vorhersehbar** bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass X_n messbar bzgl. F_{n-1} ist.
e) Ist $F_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, so spricht man von der **natürlichen Filtration**.

Definition 3.1.2. (Diskretes Martingal):
Ein stoch. Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diskreter Zeit heißt **diskretes Martingal** bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

1. alle X_n integrierbar sind,
2. der Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist und
3. $\mathbb{E}(X_{n+1}|F_n) = X_n$ P-f.s. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:
Ersetzt man in der 3.Bedingung = durch $\geq$ bzw. $\leq$ so erhält man ein **Sub- bzw. Supermartingal**.

Einfache Beispiele für Martingale:
a) Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(Y_n) = 0$. Weiters sei $X_n := Y_1 + ... + Y_n$ und $F_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Sei X eine integrierbare Zufallsvariable und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\mathbb{E}(X|F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>**Beweis:**</u>
Einfaches Nachrechnen der Bedingungen aus der Definition. $\square$

Weitere Eigenschaften:
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt:
a) $\mathbb{E}(X_n|F_k) = X_k$, falls $k < n$
b) $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt:
c) $\mathbb{E}(X_n|F_k) \geq X_k$, falls $k < n$
d) $\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2) \leq ...$
Für Supermartingale entsprechend.

Beweis:
a) Wir verwenden die Turmeigenschaft (Punkt 5 aus Prop.2.1.1):

$$\mathbb{E}(X_n|F_{n-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|F_n)|F_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|F_{n-1}) = X_{n-1}.$$

Mit Induktion folgt nun die Aussage.

b) Mit Punkt 2 aus Prop.2.1.1 folgt

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|F_n)) = \mathbb{E}(X_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für Sub- bzw. Supermartingale analog. □

3.2 Glücksspiele

Der Gewinn bzw. Verlust pro Einheit des Einsatzes in der n-ten Spielrunde eines Glücksspiels sei durch eine integrierbare Zufallsvariable Y_n modelliert, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist.
Der Gesamtgewinn nach n Runden mit konstantem Einsatz 1 ist daher gegeben durch

$$X_n := Y_1 + ... + Y_n.$$

Umgekehrt kann man auch schreiben: $Y_n = X_n - X_{n-1}$.
Ist $F_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$, so erhalten wir falls

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|F_{n-1}) = X_{n-1}\text{...ein faires Spiel.}\\
&\mathbb{E}(X_n|F_{n-1}) \geq X_{n-1}\text{...ein vorteilhaftes Spiel.}\\
&\mathbb{E}(X_n|F_{n-1}) \leq X_{n-1}\text{...ein unvorteilhaftes Spiel.}
\end{aligned}$$

Lässt man nun allerdings auch variable Einsätze der Höhe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu, so ergibt sich das Gesamtergebnis nach n Runden als:

$$\begin{aligned}
X_n &= \alpha_1 \cdot Y_1 + ... + \alpha_n \cdot Y_n \\
\Leftrightarrow X_n &= \alpha_1 \cdot (X_1 - X_0) + ... + \alpha_n \cdot (X_n - X_{n-1}).
\end{aligned}$$

Konventionen: $X_0 = 0,\ F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

Nun definieren wir uns einen Prozess $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$Z_0 := 0,\ Z_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (X_k - X_{k-1}),\ n \geq 1.$$

Man kann natürlich auch $Z_n = Z_{n-1} + \alpha_n(X_n - X_{n-1})$ schreiben.

Proposition 3.2.1. (You can´t beat the system):
Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beschränkter, vorhersehbarer Prozess. Dann gilt:

1. Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal, dann ist auch $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal.
2. Sind die α_n weiters nichtnegativ und ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Sub-bzw. Supermartingal, dann ist auch $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein Sub-bzw. Supermartingal.

Beweis:
1) (i) Messbarkeit:
$Z_n := \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot (X_k - X_{k-1})$ ist F_n messbar $\forall n \in \mathbb{N}$, da X_k F_n-messbar ist $\forall 1 \leq k \leq n$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersehbar, also α_k $F_{k-1} \subseteq F_n$-messbar ist. Außerdem sind ja Summen und Produkte von messbaren Funktionen wieder messbar.
(ii) Integrierbarkeit:
Da $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beschränkter Prozess ist, existiert eine Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen mit $|\alpha_n| \leq c_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|Z_n|) &\leq \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n |\alpha_k| \cdot (|X_k| + |X_{k-1}|)) \\
&\leq \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n c_k \cdot (|X_k| + |X_{k-1}|)) \\
&= \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mathbb{E}(|X_{k-1}|) < \infty
\end{aligned}$$

(iii) Martingalbedingung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|F_n) &= \mathbb{E}(Z_n + \alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|F_n) \\
&= \mathbb{E}(Z_n|F_n) + \mathbb{E}(\alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|F_n) \\
&= Z_n + \alpha_{n+1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|F_n)}_{=0} = Z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Punkt 2 wird analog bewiesen. □

Bemerkung:
Ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, so nennt man es in diesem Zusammenhang auch **Martingaltransformation** oder **diskretes stochastisches Integral**.

3.3 Stoppzeiten in diskreter Zeit

Die Motivation dieser Begriffsbildung ist, dass eine Stoppzeit eine Art Regel für das Glücksspiel beschreibt, nach welcher Runde man aufhören soll.

Definition 3.3.1. Eine Zufallsvariable τ mit Werten in $\bar{\mathbb{N}}$ heißt **Stoppzeit** bzgl. einer Filtrierung $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle n gilt, dass $\{\tau = n\} \in F_n$.

Bemerkung: Man vergleicht Stoppzeiten auch gerne mit Weckern, bei welchen man zu jedem Zeitpunkt sagen kann, ob sie schon geläutet haben oder nicht.

Beispiel: Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein adaptierter Prozess. Dann ist die Eintrittszeit $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ X_n \in B\}$ eine Stoppzeit, da man schreiben kann:
$\{\tau = n\} = \{X_1 \notin B\} \cap ... \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\} \in F_n$.

Definition 3.3.2. Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein adaptierter Prozess und τ eine Stoppzeit, dann nennt man den Prozess

$$X_n^\tau(\omega) = X_{n\wedge\tau(\omega)}(\omega), \ n \in \mathbb{N}$$

gestoppter Prozess.

Proposition 3.3.1. Sei τ eine Stoppzeit.

1. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, dann ist auch $(X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.
2. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Sub- bzw. Supermartingal, dann ist auch $(X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Sub- bzw. Supermartingal.

Beweis:
Anwendung von Prop 3.2.1. (You can't beat the system) mit $\alpha_n = 1_{\{\tau\geq n\}}$.
$\{\tau \geq n\} = \Omega\backslash\{\tau \leq n-1\} \in F_{n-1}$, weil τ eine Stoppzeit ist. $\Rightarrow$ $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersehbar.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (X_k - X_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} 1_{\{\tau\geq k\}} \cdot (X_k - X_{k-1}) = \\
&= \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (X_k - X_{k-1}) = X_n + X_0 = X_n, & \tau \geq n \\ \sum_{k=1}^{\tau} 1 \cdot (X_k - X_{k-1}) + \sum_{k=\tau+1}^{n} 0 \cdot (X_k - X_{k-1}) = X_\tau, & \tau \leq n \end{cases} \\
&= X_n^\tau
\end{aligned}$$

Somit ist der Prozess $(X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.
Punkt 2 wird analog bewiesen. □

Satz 3.3.1. (Doob´s Optional Stopping Theorem): Sei τ eine beschränkte Stoppzeit, d.h. $\exists\ N \in \mathbb{N}:\ \tau \leq N$ P-f.s.

1. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, dann gilt $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Submartingal, dann gilt $\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_N)$.
3. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Supermartingal, dann gilt $\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_1)$.

Bemerkung: Das Optional Stopping Theorem besagt, dass man in einem fairen Spiel in Erwartung keinen Gewinn macht.

3.4 Maximalungleichungen von Doob

Proposition 3.4.1. (Maximalungleichung für nichtneg. Subm.):
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Submartingal. Dann gilt $\forall\lambda > 0$:

$$P(\max_{k=1,\dots,n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\lambda}.$$

Proposition 3.4.2. (Maximalungleichung für nichtneg. Superm.):
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Supermartingal. Dann gilt $\forall\lambda > 0$:

$$P(\max_{k=1,\dots,n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\lambda}.$$

Satz 3.4.1. (Maximalungleichung für L^2-Subm.):
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives, quadratisch integrierbares Submartingal.
Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P((\max_{k=1,\dots,n} X_k)^2) \leq 4 \cdot \mathbb{E}((X_n)^2).$$

3.5 Martingalkonvergenz

In diesem Abschnitt möchte ich mich damit beschäftigen, unter welchen Bedingungen ein Martingal (in welchem Sinne auch immer) konvergiert. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die sogenannte Up-Crossing Ungleichung.

Definition 3.5.1.
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein stoch. Prozess. Dann definiert man die **Anzahl der Upcrossings** $U_N(a,b)(\omega)$ von $n \mapsto X_n(\omega)$ bis zum Zeitpunkt N auf einem Intervall $[a,b]$ als die größte natürliche Zahl k, sodass es $2k$ natürliche Zahlen $0 \leq s_1 < t_1 < ... < s_k < t_k \leq N$ gibt, für die die Elemente der Menge $\{X_{s_i} | i = 1, ..., k\}$ kleiner als a sind und die Elemente der Menge $\{X_{t_i} | i = 1, ..., k\}$ größer als b sind.

Lemma 3.5.1. (Doob´s Upcrossing Ungleichung):
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal, $a < b$ zwei reelle Zahlen und $U_N[a,b]$ die Anzahl der Upcrossings bis zur Zeit N. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(U_N[a,b]) \leq \frac{\mathbb{E}((X_N - a)^-)}{b-a}$$

Satz 3.5.1. (Doob´s Konvergenzsatz für Sub- bzw. Supermartingale):
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein in L^1 beschränktes Sub- bzw. Supermartingal, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Dann gibt es eine integrierbare Zufallsvariable X, sodass

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \ f.s.$$

<u>**Beweis:**</u>
Mit Hilfe der Upcrossing-Ungleichung. □

Bemerkung:
Es muss allerdings nicht gelten, dass $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ in L^1, also $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$.

3.6 L^1-Konvergenz von Martingalen

Um L^1-Konvergenz von Martingalen erhalten zu können, brauchen wir zunächst den Begriff der gleichmäßigen Integrierbarkeit.

Definition 3.6.1. Eine stoch. Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **gleichmäßig integrierbar**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $M > 0$ gibt mit

$$\mathbb{E}(|X_n| \cdot 1_{\{|X_n|>M\}}) < \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 3.6.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar. Dann gilt:

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in L^1, also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$.
2. Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit, d.h. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$, dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in L^1.

Satz 3.6.1. (Konvergenzsatz für glm. integrierbare Sub- bzw. Supermartingale): Jedes gleichmäßig integrierbare Sub- bzw. Supermartingal konvergiert fast sicher und im Mittel (also in L^1).

Beweis:
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. int. $\Rightarrow$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in L^1 nach Punkt 1 von Lemma 3.6.1.
Nach Doob´s Konvergenzsatz für Sub- bzw. Supermartingale (Satz 3.5.1) gilt daher $\lim_{n\to\infty} X_n = X \ f.s.$ und $X \in L^1$.
Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass aus der fast sicheren Konvergenz die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt, womit alle Voraussetzungen für Punkt 2 von Lemma 3.6.1. erfüllt sind. Also konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in L^1. $\square$

Satz 3.6.2. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nur f.s. und in L^1 gegen eine int. Zufallsvariable X, sondern es gilt auch

$$X_n = \mathbb{E}(X|F_n) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kapitel 4

Martingale in stetiger Zeit

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass für stetige Martingale viele dem diskreten Fall recht ähnliche Aussagen gelten.

4.1 Definitionen

Definition 4.1.1.

1. Ein **stochastischer Prozess in stetiger Zeit** ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_t\}_{t\in T}$, deren Indexmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, meist $T = [0, \infty)$.

2. Eine **Filtration in stetiger Zeit** ist eine wachsende Familie $\{F_t\}_{t\in T}$ von Teil-σ-Algebren von F, d.h. $s, t \in T,\ s \leq t \ \Rightarrow\ F_s \subseteq F_t \subseteq F$.

Definition 4.1.2. (Stetiges Martingal):
Ein stoch. Prozess $\{X_t\}_{t\in T}$ heißt **stetiges Martingal** bzgl. $\{F_t\}_{t\in T}$, wenn

1. alle X_t integrierbar sind,

2. der Prozess $\{X_t\}_{t\in T}$ adaptiert ist und

3. $\mathbb{E}(X_t|F_s) = X_s$ P-f.s. $\forall s, t \in T,\ s \leq t$.

Bemerkung:
Ersetzt man in der 3.Bedingung $=$ durch $\geq$ bzw. $\leq$, so erhält man ein **stetiges Sub- bzw. Supermartingal**.

4.2 Stoppzeiten

Definition 4.2.1. (Stetige Stoppzeiten):
Eine Zufallsvariable $\tau :\ \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **stetige Stoppzeit** bzgl. einer Filtrierung $\{F_t\}_{t\geq 0}$, falls

$$\{\tau \leq t\} \in F_t,\ \forall t \geq 0.$$

Satz 4.2.1. (Doob´s Optional Stopping Theorem):
Ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein stetiges Martingal bzgl. einer Filtrierung $\{F_t\}_{t\geq 0}$ und τ eine stetige Stoppzeit bzgl. $\{F_t\}_{t\geq 0}$, dann ist der gestoppte Prozess

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega),\ t \geq 0$$

auch ein Martingal bzgl. $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

4.3 Doobsche Ungleichungen

Satz 4.3.1. (Doobsche Ungleichungen für stetige Submartingale):
Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein stetiges Submartingal, $p \in [1, \infty)$ und $T, \lambda > 0$ fest. Dann gilt

1. $P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(||X_T||^p)}{\lambda^p}$
2. $\mathbb{E}((\sup_{t\in[0,T]} |X_t|)^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}(X_T^p)$

Kapitel 5

Einführung in die Brownsche Bewegung

Die Brownsche Bewegung ist wohl einer der wichtigsten stochastischen Prozesse und wie wir später sehen werden auch ein Martingal. Ihren Namen hat sie von dem schottischen Botaniker Robert Brown, der damit die Wärme-bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten bezeichnete. Die math. Brownsche Bewegung dient als Modell für diese Bewegung. In der Literatur ist allerdings auch der Name Wiener Prozess gebräuchlich, benannt nach dem Mathematiker Norbert Wiener, der erstmals einen mathematischen Existenzbeweis dafür lieferte.

5.1 Definitionen und wichtige Eigenschaften

Definition 5.1.1. (Brownsche Bewegung):
Eine **eindimensionale standardisierte Brownsche Bewegung** ist ein reellwertiger, stochastischer Prozess in stetiger Zeit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ mit folgenden drei Eigenschaften:
(a) $B_0 = 0$ P-f.s.
(b) Die Pfade $t \mapsto B_t$ sind P-f.s. stetig.
(c) Für alle endlichen Folgen von Zeitpunkten $0 < t_1 < ... < t_n$ und Borelmengen $A_1, ..., A_n$ gilt:
$P(B_{t_1} \in A_1, ..., B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} ... \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) \cdot p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdot ... \cdot p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 ... dx_n$,
wobei $p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ mit $x, y \in \mathbb{R}, t \geq 0$ Übergangsdichte heißt.

Bemerkungen:

- Eigentlich muss man erst zeigen, dass so ein Prozess überhaupt existiert. Hierfür gibt es mehrere recht komplexe Beweise, auf die ich nur verweisen möchte.

- $\{B_t\}_{t\geq 0}$ ist ein Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $C(s, t) := Cov(B_s, B_t) = \min(s, t)$ $\forall\ s, t \in [0, \infty)$. Dies bedeutet, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < \infty$ der endlichdimensionale Zufallsvektor $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$ eine multivariate Normalverteilung hat.

Definition 5.1.2.
Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger stochastischer Prozess in stetiger Zeit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ heißt **n-dim. standardisierte Brownsche Bewegung**, wenn $B_t = (B_t^1, ..., B_t^n)$ und $B^1, ..., B^n$ unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegungen sind.

Nun kommen wir zu einer weiteren, wohl gebräuchlicheren Definition der Brownschen Bewegung, die die obige Bedingung (c) durch 3 andere sehr charakteristische Eigenschaften ersetzt:

Definition 5.1.3. (Brownsche Bewegung):
Ein adaptierter $\mathbb{R}^n$-wertiger stochastischer Prozess in stetiger Zeit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ heißt **n-dim. Brownsche Bewegung**, wenn gilt:
(a) $B_0 = 0$ P-f.s.
(b) Die Pfade $t \mapsto B_t$ sind P-f.s. stetig.
(c) Unabhängigkeit der Zuwächse: $\forall 0 \leq s, t < \infty$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von F_s
(d) Stationarität der Zuwächse: $\forall 0 \leq s, t < \infty$ gilt $B_{s+t} - B_s \stackrel{d}{=} B_t - B_0 \stackrel{d}{=} B_t$
(e) $\forall 0 \leq t < \infty$ gilt $B_t \sim N(0, t \cdot I_d)$

Bemerkungen:

- Die Bedingung (c) kann falls $\{F_t\}_{t\geq 0}$ die natürliche Filtration $\{\sigma(B_s : s \in [0,t])\}_{t\geq 0}$ ist durch folgende Bedingung ersetzt werden: $\forall n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ sind $B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängig.
- Für $0 \leq s < t$ gilt $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

Definition 5.1.4. (Brownsche Bewegung mit Drift):
Sei $\{B_t\}_{t\geq 0}$ eine n-dim. stand. Brownsche Bewegung.
Dann heißt für jeden Vektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ und jede Martix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Prozess

$$\tilde{B}_t := \mu t + A \cdot B_t,\ t \geq 0$$

eine n-dim. Brownsche Bewegung mit Drift μ und Kovarianzmatrix $\Sigma := A \cdot A^T$.

Bemerkung:
Dementsprechend gilt: $\tilde{B}_t \sim N(\mu t, t \cdot \Sigma)$. Hierbei können die einzelnen Komponenten also auch miteinander korreliert sein.

5.2 Selbstähnlichkeiten der Brownschen Bewegung

In diesem Abschnitt möchte ich ein paar Transformationen vorstellen, unter welchen die Brownsche Bewegung eine solche bleibt.

Proposition 5.2.1.
Sei $\{B_t\}_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. einer Filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Weiters seien $s \geq 0$ und $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) (Verschiebung der Zeitachse) $\{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0} = \{B_{s+t} - B_s\}_{t\geq 0}$ ist eine n-dim. stand. Brownsche Bewegung bzgl. $\{\tilde{F}_t\}_{t\geq 0} = \{F_{t+s}\}_{t\geq 0}$.

(b) (Streckung der Zeitachse) $\{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0} = \{\frac{1}{c} B_{c^2 t}\}_{t\geq 0}$ ist eine n-dim. stand. Brownsche Bewegung bzgl. $\{\tilde{F}_t\}_{t\geq 0} = \{F_{c^2 t}\}_{t\geq 0}$.

(c) (Inversion der Zeitachse) Der stochastische Prozess

$$\{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0} = \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & 0 < t < \infty \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

ist eine n-dim. stand. Brownsche Bewegung bzgl. einer Filtration $\{\tilde{F}_t\}_{t\geq 0}$.

(d) (Symmetrie) $\{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0} = \{-B_t\}_{t\geq 0}$ ist eine n-dim. stand. Brownsche Bewegung bzgl. $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

Beweis:
Dies zeigt man, indem man die Bedingungen von Definition 5.1.3. nachprüft:

(a)

- $\{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0}$ ist adaptiert bzgl. $\{\tilde{F}_t\}_{t\geq 0}$, da für alle $t \geq 0$ $B_{s+t} - B_s$ messbar bzgl. F_{s+t} ist.
- $\tilde{B}_0 = B_s - B_s = 0$
- Die Pfade von $\{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0}$ sind als Zusammensetzung stetiger Funktionen f.s. stetig.
- Für $0 \leq r < t < \infty$ gilt, dass
$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_r = B_{s+t} - B_s - B_{s+r} + B_s = B_{s+t} - B_{s+r}$$
unabhängig von $F_{s+r} = \tilde{F}_r$ ist.
- Für $0 \leq r < t < \infty$ gilt, dass
$$\tilde{B}_{t+r} - \tilde{B}_t = B_{s+t+r} - B_s - B_{s+t} + B_s \overset{d}{=} B_{s+r} - B_s = \tilde{B}_r$$
- $\forall\ 0 \leq t < \infty$ gilt, dass
$$\tilde{B}_t = B_{s+t} - B_s \overset{d}{=} B_t \sim N(0, t \cdot I_d)$$

Die Beweise zu (b) und (c) verlaufen recht ähnlich.
Punkt (d) ist trivial. □

5.3 Brownsche Bewegung als Martingal

Proposition 5.3.1. Sei $\{B_t\}_{t\geq 0}$ eine 1-dim Brownsche Bewegung bzgl. einer Filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$.
Weiters sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.
Dann sind folgende vier Prozesse stetige Martingale:
(a) $M_t = B_t,\ t \geq 0$
(b) $M_t = B_t^2 - t,\ t \geq 0$
(c) $M_t = B_t^3 - 3tB_t,\ t \geq 0$
(d) $M_t = \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t),\ t \geq 0$

Beweis:
Ich möchte hier nur die Punkte (c) und (d) beweisen. Die Beweise von (a) und (b) verlaufen sehr ähnlich, allerdings einfacher als (c).
(c)
1) Messbarkeit:
Da B_t F_t-messbar ist, ist auch $M_t = B_t^3 - 3tB_t$ als stetige Zusammensetzung F_t-messbarer

Funktionen F_t-messbar.
2) Integrierbarkeit:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M_t|) &\leq \mathbb{E}(|B_t^3 \cdot 1_{\{|B_t|\geq 1\}}| + |B_t^3 \cdot 1_{\{|B_t|\leq 1\}}|) + 3t \cdot \mathbb{E}(|B_t|) \leq \\ &\leq \mathbb{E}(B_t^4) + \mathbb{E}(B_t^2) + 3t \cdot \mathbb{E}(|B_t|) < \infty, \text{ da } B_t \sim N(0,t).\end{aligned}$$

3) Martingalbedingung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|F_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^3 - 3t(B_t - B_s + B_s)|F_s) = \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^3|F_s) + 3B_s\mathbb{E}((B_t - B_s)^2|F_s) \\ &\quad +3B_s^2\mathbb{E}((B_t - B_s)|F_s) + B_s^3 - 3t\mathbb{E}(B_t - B_s|F_s) - 3tB_s = \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}((B_t - B_s)^3) + 3B_s\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) \\ &\quad +3B_s^2\mathbb{E}((B_t - B_s)) + B_s^3 - 3t\mathbb{E}(B_t - B_s) - 3tB_s = \\ &\overset{(**)}{=} 0 + 3B_s(t-s) + 0 + B_s^3 - 0 - 3tB_s = \\ &= B_s^3 - 3sB_s = M_s \text{ f.s.}\end{aligned}$$

(*)$B_t - B_s$ ist unabhängig von F_s
(**)$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

(d)
1) Messbarkeit:
Da B_t F_t-messbar ist, ist auch $M_t = \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$ als stetige Zusammensetzung F_t-messbarer Funktionen F_t-messbar.
2) Integrierbarkeit:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M_t|) &= \mathbb{E}(\exp(\alpha B_t)) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha^2 t) = \\ &\overset{(*)}{=} \exp(\frac{1}{2}\alpha^2 t) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha^2 t) = 1 < \infty\end{aligned}$$

(*) $B_t \sim N(0,t)$, verwende momenterzeugende Funktion der NV:
$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}(\exp(\alpha \cdot X)) = \exp(\alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2)$
3) Martingalbedingung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|F_s) &= \mathbb{E}(M_s \cdot \exp(\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)|F_s)) = \\ &= M_s \cdot \mathbb{E}(\exp(\alpha(B_t - B_s))) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)) = \\ &\overset{(**)}{=} M_s \cdot \exp(\frac{1}{2}\alpha^2 t) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha^2 t) = M_s \text{ f.s.}\end{aligned}$$

(**) $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, verwende momenterzeugende Funktion der NV

$\square$

Lévy charakterisierte die Brownsche Bewegung unter den stochastischen Prozessen durch ihre Martingaleigenschaft wie folgt:

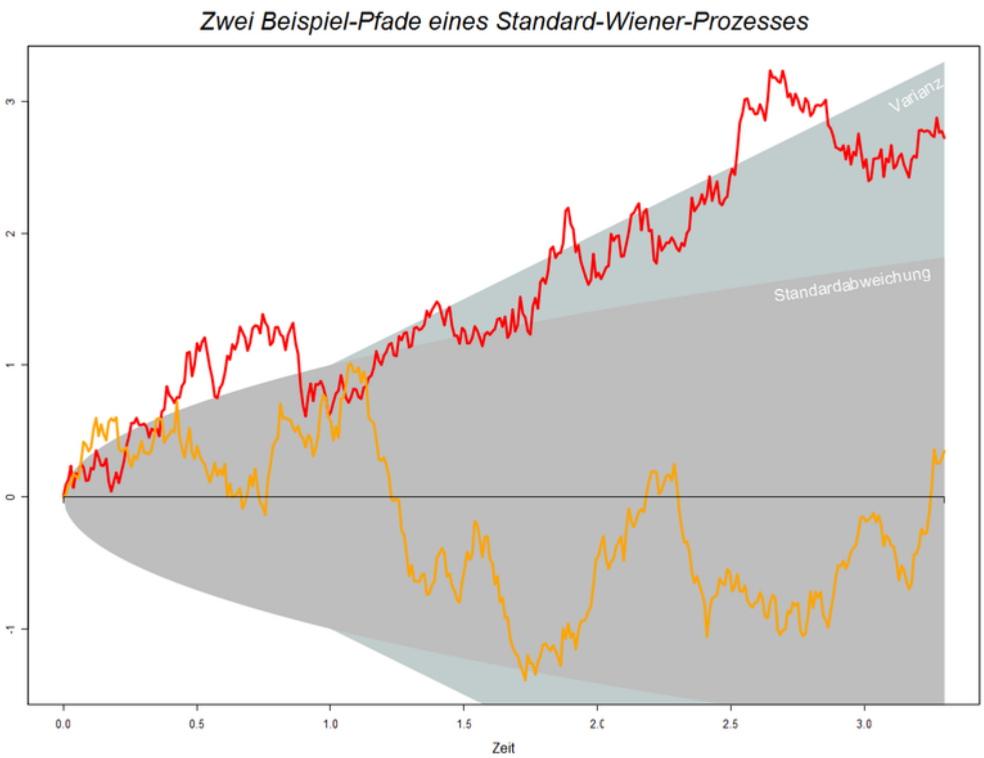
Satz 5.3.1. (Lévys Martingalcharakterisierung):
Sei $\{B_t\}_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit und $\{F_t\}_{t\geq 0}$ seine natürliche Filtration. Dann ist $\{B_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung genau dann wenn
(a) $B_0 = 0$ P-f.s.
(b) Die Pfade $t \mapsto B_t$ sind P-f.s. stetig.
(c) $\{B_t\}_{t\geq 0}$ ist ein Martingal bzgl. $\{F_t\}_{t\geq 0}$.
(d) $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ ist ein Martingal bzgl. $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

Bemerkung:
In dieser Charakterisierung kommt die Normalverteilung gar nicht vor.

Kapitel 6

Brownsche Trajektorien

Die Trajektorien (Pfade) $t \mapsto B_t(\omega),\ t \geq 0$ der Brownschen Bewegung haben einige interessante Eigenschaften auf die ich im folgenden näher eingehen möchte.



6.1 Quadratische Variation der Brownschen Pfade

Seien $T > 0$ und $t_i^n := \frac{i \cdot T}{n},\ n \in \mathbb{N},\ i = 0, ..., n$.
So erhalten wir eine Folge äquidistanter Zerlegungen von $[0, T]$:
$0 = t_0^n < ... < t_n^n = T$
Sei nun $\Delta_i^n B := B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\ \forall\ i = 0, ..., n-1,\ n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1.1. Die Quadratische Variation der Brownschen Bewegung ist T, also

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 = T \text{ in } L^2$$

bzw. äquivalent dazu:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}((\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n B)^2 - T)^2) = 0.$$

Beweis:

$\Delta_i^n B := B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n) \sim N(0, t_{i+1}^n - t_i^n) = N(0, \frac{T}{n})$.
Nun folgt mit der Formel für die Momente der Normalverteilung

$$X \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!}(\frac{\sigma^2}{2})^n,\ \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

dass

$$\mathbb{E}(\Delta_i^n B) = 0,\ \mathbb{E}((\Delta_i^n B)^2) = \frac{T}{n} \text{ und } \mathbb{E}((\Delta_i^n B)^4) = \frac{3T^2}{n^2}.$$

Diese Erkenntnisse liefern uns:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n B)^2 - T)^2) &= \sum_{i,j=0}^{n-1}\mathbb{E}((\Delta_i^n B)^2 \cdot (\Delta_j^n B)^2) - 2T\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\mathbb{E}((\Delta_i^n B)^2)}_{\frac{T}{n}} + T^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}((\Delta_i^n B)^4) + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{n-1}\mathbb{E}((\Delta_i^n B)^2)\cdot\mathbb{E}((\Delta_j^n B)^2) - T^2 = \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}((\Delta_i^n B)^4)}_{\frac{3T^2}{n}} + \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\frac{T^2}{n^2}}_{T^2-\frac{T^2}{n}} - T^2 = \frac{3T^2}{n} - \frac{T^2}{n} = \frac{2T^2}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

□

6.2 Variation der Brownschen Pfade

Definition 6.2.1. Die **Variation einer Funktion** $f: [0,T] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\limsup_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

definiert, wobei beim limsup alle Partitionen $0 = t_0 < ... < t_n \leq T$ von $[0,T]$ mit $\Delta t = \max_{i=0,\ldots,n-1}|t_{i+1} - t_i| \to 0$ betrachtet werden.

Satz 6.2.1. Die Pfade der Brownschen Bewegung haben P-f.s. unendliche Variation, also

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}|\Delta_i^n B| = \infty.$$

Beweis:

Man betrachte wieder die äquidistante Folge von Partitionen t_i^n von vorhin. Diese erfüllen $\Delta t^n = \frac{T}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Nun werden wir uns folgende Abschätzung zu Nutze machen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n B|^2 \leq \max_{i=0,\ldots,n} |\Delta_i^n B| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n B| \tag{6.1}$$

Weiters gilt, da die Pfade von $\{B_t\}_{t\geq 0}$ f.s. stetig sind, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i=0,\ldots,n} |\Delta_i^n B| = 0 \ f.s.$$

Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass eine Folge, die in L^2 konvergiert, eine f.s. konvergente Teilfolge hat.

$$\Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} : \ \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta_i^{n_k} B|^2 = T \ f.s.$$

Wegen (6.1) für n_k statt n muss gelten, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta_i^n B| = \infty.$$

Da wir nun eine Teilfolge haben, deren limes unendlich ist, gilt dass der limsup unendlich ist, also:

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n B| = \infty.$$

□

Bemerkung:
Auf Grund dieser Eigenschaft der Brownschen Pfade kann man

$$\int_0^T f(t)dB(t)$$

nicht im Sinne des Riemann-Stieltjes Integrals auffassen. Diese Erkenntnis ist der Startschuss für die Theorie der Itô-Integrale, welche sich mit der Lösung obiger Integrale beschäftigt.

6.3 Nirgends Differenzierbarkeit der Brownschen Pfade

Als nächstes möchte ich zeigen, dass die Brownschen Pfade f.s. nirgends differenzierbar sind, obwohl sie ja f.s. überall stetig sind.

Satz 6.3.1. Sei $\{B_t\}_{t\geq 0}$ eine eindimensionale, standardisierte Brownsche Bewegung. Dann sind die Pfade $t \mapsto B_t$ P-f.s. nirgends differenzierbar.

Beweis:
Sei $\omega \in \Omega$ fest und $f: \ [0,\infty) \to \mathbb{R}, t \mapsto B_t(\omega)$ der dazugehörige Pfad.
Ang. f ist bei $s \in (k-1,k], \ k \in \mathbb{N}$ differenzierbar, d.h.

$$\lim_{t\to s} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \ \exists$$

$\Rightarrow\ \exists\, l \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung U von s, sodass

$$|f(t) - f(s)| \leq l \cdot |t - s|,\ \forall t \in U \tag{6.2}$$

Für diese Umgebung U existiert außerdem ein $m \in \mathbb{N}$, sodass:

$$\left\{ \frac{\lceil n \cdot s \rceil + r}{n} | r = 0, 1, 2, 3 \right\} \subseteq U,\ \forall n \geq m$$

Weiters stellen wir fest, dass:

$$\lceil n \cdot s \rceil \in \{n(k-1)+1, n(k-1)+2, ..., nk\},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei nun $n \geq m$.
Dann gilt $\forall j \in \{\lceil n \cdot s \rceil, \lceil n \cdot s \rceil + 1, \lceil n \cdot s \rceil + 2\}$:

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| &\leq \left| f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f(s) \right| + \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(s) \right| \leq \\
&\overset{(6.2)}{\leq} l\left(\frac{j+1}{n} - s\right) + l\left(\frac{j}{n} - s\right) = \\
&= l\left(\frac{2j - 2ns}{n} + \frac{1}{n}\right) \leq \\
&\overset{j \leq \lceil n \cdot s \rceil + 2}{\leq} l\left(\frac{2\lceil n \cdot s \rceil - 2ns}{n} + \frac{5}{n}\right) \leq \frac{7l}{n}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega \in N := \bigcup_{k,l,m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=n(k-1)+1}^{nk} \bigcap_{j=i}^{i+2} \left\{ \left| f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \frac{7l}{n} \right\}$$

Als nächstes werde ich zeigen, dass N eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist:
Seien nun $k, l, n \in \mathbb{N}$ fest, $j \in \{\lceil n \cdot s \rceil, \lceil n \cdot s \rceil + 1, \lceil n \cdot s \rceil + 2\}$ und $X \sim N(0,1)$.

$$\Rightarrow P\left(|\underbrace{B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}}}_{\sim N(0,\frac{1}{n})}| \leq \frac{7l}{n} \right) = P\left(|X| \leq \frac{7l}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \int_{-\frac{7l}{\sqrt{n}}}^{\frac{7l}{\sqrt{n}}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\leq 1} dt \leq \frac{14l}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P\left(A_n^{(k,l)} := \bigcup_{i=n(k-1)+1}^{nk} \bigcap_{j=i}^{i+2} \left\{ \left| B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right| \leq \frac{7l}{n} \right\} \right) &\leq \\
\leq \sum_{i=n(k-1)+1}^{nk} P\left(\bigcap_{j=i}^{i+2} \left\{ \left| B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right| \leq \frac{7l}{n} \right\} \right) & \\
\overset{Unab.}{\leq} n\left(\frac{14l}{\sqrt{n}}\right)^3 = \frac{(14l)^3}{\sqrt{n}} =: \frac{c}{\sqrt{n}},\ mit\ c \in \mathbb{R}. &
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \forall\, m \in \mathbb{N} : P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^{(k,l)}\right) \leq P(A_p^{(k,l)}) \leq \frac{c}{\sqrt{p}} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0, \; \forall p \geq m$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^{(k,l)}\right) = 0, \; \forall m \in \mathbb{N}$$

N ist daher eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen, also selbst eine Nullmenge. Somit sind die Pfade der Brownschen Bewegung auf $(0, \infty)$ P-f.s. nirgends differenzierbar. Nun muss man noch zeigen, dass die Pfade auch bei 0 nicht differenzierbar sind. Der Beweis hierfür ist allerdings analog wie der obige zu führen.

□

6.4 Gesetz vom iterierten Logarithmus

Das folgende Gesetz soll die Oszillation der Brownschen Bewegung nahe bei $t = 0$ und für $t \to \infty$ beschreiben.

Satz 6.4.1. (Gesetz vom iterierten Logarithmus):
Für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$(1)\; \limsup_{t\searrow 0} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log(\frac{1}{t})}} = 1, \quad (2)\; \liminf_{t\searrow 0} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log(\frac{1}{t})}} = -1$$

$$(3)\; \limsup_{t\to\infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log(t)}} = 1, \quad (4)\; \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log(t)}} = -1$$

<u>Beweis:</u>
Auf Grund der Länge des Beweises möchte ich auf Kapitel 2.9.E im Buch "Brownian Motion and Stochastic Calculus" von Karatzas und Shreve verweisen. □

Bemerkung:

- Die Funktionen $\overset{+}{-}\, \sqrt{2t\log\log(t)},\; t > 0$ sind also jeweils die obere bzw. untere Einhüllende für den Brownschen Pfad bei großem t.
- Da diese Gesetze jeweils gleichzeitig gelten, bedeutet das, dass die Brownsche Bewegung f.s. in jedem noch so kleinen Intervall (a, b) unendlich oft das Vorzeichen wechselt und (da die Brownsche Bewegung ja f.s. stetig ist und somit dem Zwischenwertsatz genügt) dort unendlich viele Nullstellen hat.

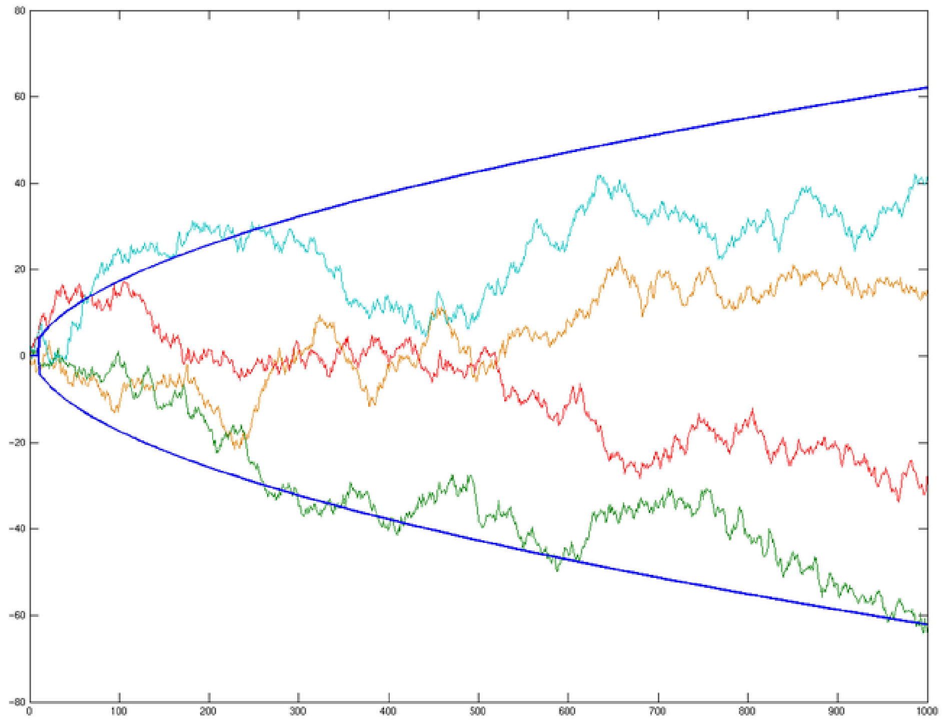


Abbildung 6.1: Brownsche Pfade mit ihren Einhüllenden

6.5 Nullstellenmenge der Brownschen Pfade

Die Nullstellenmenge eines Pfades $t \mapsto B_t(\omega)$, mit $\omega \in \Omega$ fest, einer 1-dim. stand. Brownschen Bewegung ist gegeben durch

$$N(\omega) := \{t \geq 0 : \; B_t(\omega) = 0\} \in B([0, \infty)).$$

Satz 6.5.1. Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ hat die Nullstellenmenge $N(\omega)$ P-f.s. folgende Eigenschaften:

- Lebesguemaß 0.
- abgeschlossen und in $(0, \infty)$ keine isolierten Punkte, also eine perfekte Menge (daher auch überabzählbar).
- Häufungspunkt bei 0.
- dicht in sich selbst.

Beweis:
Der Beweis kann in Kapitel 2.9.B im Buch "Brownian Motion and Stochastic Calculus" von Karatzas und Shreve nachgelesen werden. □

Literaturverzeichnis

[KS] IOANNIS KARATZAS/STEVEN SHREVE: **Brownian Motion and Stochastic Calculus,** Second Edition, Springer Verlag, 1998

[W] DAVID WILLIAMS: **Probability with Martingales,** Cambridge University Press, Cambridge, 1991