

Zinsderivate

Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Kerstin Schander

WS 2009/10
TU Wien

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Einfache Derivate	4
1.2.1	Forward- und Future-Kontrakte	4
1.2.2	Optionen	6
1.2.3	Swaps	7
2	Zinsderivate - Die Standard-Markt-Modelle	8
2.1	Das Black-Scholes-Merton-Modell und das Modell von Black	9
2.1.1	Black-Scholes-Merton-Modell	9
2.1.2	Modell von Black	11
2.2	Anleiheoptionen	13
2.2.1	Eingebettete Anleiheoptionen	13
2.2.2	Europäische Anleiheoptionen	14
2.2.3	Theoretische Begründung des Modells	15
2.3	Zinscaps und Zinsfloors	15
2.3.1	Zinscap	15
2.3.2	Zinsfloor	16
2.3.3	Collar	17
2.3.4	Bewertung von Zinscaps und Zinsfloors	17
2.3.5	Theoretische Begründung des Modells	18
2.4	Europäische Swaptions	19
2.4.1	Bewertung europäischer Swaptions	19
2.4.2	Theoretische Begründung des Modells	21
2.5	Rückblick	22
3	Zinsderivate - Die Short-Rate-Modelle	23
3.1	Einführung	23
3.2	Gleichgewichtsmodelle	24
3.2.1	Rendleman-Bartter-Modell	24
3.2.2	Vasicek-Modell	25
3.2.3	Modell von Cox, Ingersoll und Ross	25
3.2.4	Gleichgewichtsmodelle mit zwei Faktoren	26

3.3	No-Arbitrage-Modelle	26
3.3.1	Ho-Lee-Modell	27
3.3.2	Einfaktor-Modell von Hull-White	27
3.3.3	Black-Karasinski-Modell	28
3.3.4	Zweifaktoren-Modell von Hull-White	28
3.4	Zinsbäume	29
3.4.1	Verfahren zur Konstruktion von Bäumen	30
3.4.2	Erweiterung auf andere Modelle	32
3.4.3	Auswahl von $f(r)$	32
	Literaturverzeichnis	33

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Definition Ein Derivat ist ein Finanzinstrument, dessen Wert von den Werten anderer grundlegender Variablen abhängt. Diese Variablen bezeichnet man als “underlyings“ bzw. Basiswerte.

Diese können zum einen Wertpapiere, wie Aktien und Anleihen sein, aber auch marktbezogenen Referenzgrößen, wie Zinssätze und Indizes, oft werden als Basiswert auch Waren wie Schweinebäuche, Zucker, Rohöl oder Platin verwendet. Es gibt auch Wetterderivate, die dann als Basiswert nicht-ökonomische Größen, wie Niederschlagsmengen oder die Tagestemperatur verwenden!

Derivate wurden nicht erfunden, sondern sie haben sich ganz natürlich entwickelt. Der Derivatehandel kann bis in das zweite Jahrtausend vor Christus - etwa in Mesopotamien - zurückverfolgt werden. Damals versuchte man Risiken aus Handelsgeschäften (vor allem wegen der Seefahrt) in Form einfacher Futures abzusichern.

Die Bedeutung von Derivaten wurde in den letzten 30 Jahren in der Finanzwelt immer größer. Es gibt zwei verschiedene Arten von Derivatehandel, zum einen den Börsenhandel und zum anderen den außerbörslichen Handel (OTC-Handel).

Börsenhandel: Eine Derivatbörse ist ein Marktplatz, auf dem Marktteilnehmer standardisierte Kontrakte handeln, deren Bedingungen die jeweilige Börse festlegt. Eine der ersten war die Chicago Board of Trade und wurde 1848 gegründet. Heute gibt es diese Börsen auf der ganzen Welt. An diesen Terminbörsen werden Future-Kontrakte und Optionen gehandelt. Weiters wurde das open-outcry-system - also dass sich die Händler persönlich am Börsenparkett trafen und ihre Handelsabsichten mittels Zurufen und komplizierten Handzeichen übermittelten - vom elektronischen Handel ersetzt.

Over-the-Counter-Handel: Dieser stellt eine bedeutende Alternative zum Börsenhandel dar. 2007 war das Volumen des OTC-Markts über fünf Mal so groß wie das des Börsenhandels. Der OTC-Markt besteht aus einem über Telefon und Computer verbundenen Netzwerk von Händlern, welche sich nicht persönlich treffen, meist werden diese Geschäfte zwischen zwei Finanzinstituten abgeschlossen.

Der *Vorteil* von OTC-Geschäften ist, dass sie sehr individuell (entsprechend der Bedürfnisse der Vertragsparteien) gestaltet werden können und keine Börsengebühren bezahlt werden müssen.

Der *Nachteil* jedoch besteht darin, dass die Börsenaufsicht fehlt und deswegen ein gewisses Kreditrisiko besteht. Denn im Gegensatz dazu sind Börsen so organisiert, dass jegliches Kreditrisiko ausgeschlossen werden kann. Der OTC-Markt ist auch tendenziell weniger liquide.

Wichtige außerbörsliche Produkte sind neben den klassischen Termingeschäften, wie Forwards und Optionen, Forward Rate Agreements und Swaps.

1.2 Einfache Derivate

1.2.1 Forward- und Future-Kontrakte

Forward-Kontrakte

Definition Ein Forward-Kontrakt ist die Vereinbarung, ein Gut zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt zu einem bestimmten Kurs zu kaufen bzw. zu verkaufen. Der Forward-Kontrakt ist ein unbedingtes nicht börsengehandeltes Termingeschäft.

Im Gegenteil zu Kassageschäften, bei denen die Verpflichtung (Kauf/Verkauf einer Aktie) und Erfüllung (Lieferung) unmittelbar aufeinander folgen, liegt bei Termingeschäften die Erfüllung in der Zukunft (“auf Termin“).

Bei einem Forward-Kontrakt wird zwischen der *Long-Position* (Kaufposition) und der *Short-Position* (Verkaufsposition) unterschieden.

Der Wert eines Forward-Kontrakts ist zum Zeitpunkt des Abschlusses null, weil man bei Vertragsabschluss den Preis, der für den Basiswert zum Lieferzeitpunkt bezahlt wird, so berechnet, dass keiner der Vertragspartner einen Gewinn erwarten kann und Arbitrage verhindert. Später kann der Wert positiv oder negativ werden.

In folgender Tabelle sieht man die Entwicklung von Preis und Wert eines Forward-Kontrakts in der Long-Position im Laufe der Zeit

	in t_0	in t	in T
Preis	$e^{r(T-t_0)} S_{t_0}$	$e^{r(T-t)} S_t$	S_T
Wert	0	$S_t - e^{-r(T-t)} K$	$S_T - K$

S_t ist der Spotpreis, also der aktuelle Kurswert des Underlyings in t .

K bezeichnet den Basispreis ($K = e^{r(T-t_0)} S_{t_0}$).

F_t ist der Preis des Forward-Kontrakts der in t geschlossen wurde und den Ausübungszeitpunkt T hat.

r ist der risikolose Zinssatz.

f ist der Wert (einer Long-Position) eines Forward-Kontrakts.

Daraus ergeben sich für Preis und Wert des Forward-Kontrakts in der Long-Position folgende Formeln

$$F_t = S_t e^{r(T-t)} \quad f = (F_t - K) e^{-r(T-t)}$$

Wenn man nun F_t und K vertauscht so erhält man den Wert einer Short-Position.

Future-Kontrakte

Definition Wie der Forward-Kontrakt ist der Future-Kontrakt eine Übereinkunft zwischen zwei Parteien, ein Gut zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt zu einem bestimmten Preis zu kaufen bzw. zu verkaufen.

Die wesentlichen Unterschiede sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Forward	Future
privater Vertrag zweier Parteien	Handel an der Börse
nicht standardisiert	standardisiert
gewöhnlich ein spezifizierter Liefertag	Lieferzeitraum von mehreren Tagen
Abrechnung bei Kontraktende	tägliche Abrechnung
Lieferung oder bare Endabrechnung	gewöhnlich Schließung des Kontrakts vor Fälligkeit
geringes Kreditrisiko	im Prinzip kein Kreditrisiko

Das Schließen eines Kontrakts bedeutet, dass man einen zum ursprünglichen Geschäft entgegengesetzten Handel tätigt.

Das heißt, man nimmt zum Beispiel am 16. August die Long-Position in einem bestimmten Future-Kontrakt ein, der im Oktober fällig wird und am 23. September die Short-Position in demselben Future-Kontrakt. In diesem Fall wird der

Gesamtgewinn bzw. -verlust des Anlegers durch die Änderung des Future-Kurses vom 16. August bis zum 23. September bestimmt.

Einen Future-Kontrakt zu vereinbaren ist offensichtlich mit Gefahren verbunden. Es könnte zum Beispiel einer der Anleger den Handel bereuen und versuchen zurückzutreten oder einfach nicht über genug finanzielle Ressourcen verfügen.

Deshalb gibt es sogenannte Margin-Konten. Margins sind Einschüsse, die am Anfang eines Future-Kontrakts von beiden Seiten auf ein Margin-Konto einbezahlt werden müssen, das bezeichnet man als sogenanntes *initial margin* bzw. anfänglicher Einschuss. Am Ende jedes Tages wird das Margin-Konto angepasst und weist dann den Gewinn oder Verlust des Anlegers aus. Das heißt einer der beiden Anleger, entweder Short oder Long, macht immer Gewinn und der andere dann entsprechend Verlust.

Das Ganze wird mit *marking to market* (Bewertung zu Marktpreisen) bezeichnet. Wenn das Saldo des Kontos unter ein Mindestsaldo fällt, so ist der Anleger verpflichtet Nachschusszahlungen zu leisten. Im Gegensatz dazu darf der Anleger aber jeden Betrag, der den anfänglichen Einschuss übersteigt abheben.

Das heißt, der Futurepreis wird jeden Tag neu berechnet, sodass der Wert des Kontrakts immer null ist. Der wesentliche Unterschied zwischen einem Forward- und einem Future-Kontrakt besteht nun darin, dass es bei einem Forward-Kontrakt erst im Lieferzeitpunkt zu einer Zahlung kommt, bei einem Future-Kontrakt jedoch jeden Tag Zahlungen erfolgen, was sicherstellt, dass der Anleger seinen Verpflichtungen nachkommt.

Der Futurepreis konvergiert bei Heranrücken des Liefermonats gegen den Spotkurs des Underlyings und sie sind bei Erreichen des Lieferzeitraums identisch bzw. sehr nahe beieinander.

1.2.2 Optionen

Definition

Eine Option gibt dem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht etwas zu tun.

Man unterscheidet zwischen der *Kaufoption* (Call), die ihrem Besitzer das Recht gibt das Underlying bis zu einem bestimmten Zeitpunkt zu einem festgelegten Kurs zu kaufen und der *Verkaufsoption* (Put), die analog definiert ist.

Den festgelegte Kurs bezeichnet man auch als Ausübungspreis oder Basispreis. Das im Kontrakt festgelegte Datum heißt entweder Verfalldatum, wenn es sich um eine *amerikanische* Option handelt oder Fälligkeit, wenn es eine *europäische* Option ist.

Die meisten an den Börsen gehandelten Optionen sind amerikanischen Typs. Da sich aber europäische Optionen leichter analysieren lassen, versucht man die Eigenschaften einer amerikanischen Option aus ihrem europäischen Gegenstück herzuleiten.

Man wird eine Option natürlich nur dann ausüben, wenn daraus ein Vorteil erzielt werden kann.

Daraus ergibt sich:

Auszahlung einer europäischen Kaufoption in der Long-Position:

$$\max(S_T - K, 0)$$

Auszahlung einer europäischen Verkaufsoption in der Long-Position:

$$\max(K - S_T, 0)$$

Auszahlung einer europäischen Kaufoption in der Short-Position:

$$\min(K - S_T, 0) = -\max(S_T - K, 0)$$

Auszahlung einer europäischen Verkaufsoption in der Short-Position:

$$\min(S_T - K, 0) = -\max(K - S_T, 0)$$

1.2.3 Swaps

Definition Ein Swap (Tausch) ist eine Vereinbarung zwischen zwei Vertragspartnern, in der Zukunft Cash Flows (Zahlungsströme) auszutauschen. Die Vereinbarung legt die Termine fest, zu denen die Zahlungen zu leisten sind, sowie die Art und Weise, wie diese berechnet werden.

Die Berechnung der Cash Flows beinhaltet gewöhnlich die zukünftigen Werte einer oder mehrerer Marktvariablen.

Der gebräuchlichste Swap ist der *“Plain Vanilla“ - Zinsswap*. Dabei verpflichtet sich der eine Vertragspartner Cash Flows in Höhe eines vorher festgelegten Zinssatzes auf einen bestimmten Nominalbetrag für eine bestimmte Anzahl von Jahren zu leisten.

Im Gegenzug dazu erhält dieser Vertragspartner einen variablen Zinssatz, wie EURIBOR oder LIBOR, auf das gleiche Nominalkapital für denselben Zeitraum. Deshalb werden diese Standardzinsswaps auch *“Fixed-for-floating“*- Zinsswaps genannt. Mit diesem Swap kann man sich mitunter gegen das Risiko schwankender Zinsen absichern.

Ein Forward-Kontrakt kann als einfaches Beispiel für einen Swap angesehen werden, während der Forward-Kontrakt zum Austausch von Cash Flows an nur einem zukünftigen Termin führt, kommt es bei Swaps meist zu einem Austausch von Cash Flows an mehreren zukünftigen Terminen.

Kapitel 2

Zinsderivate - Die Standard-Markt-Modelle

Definition Zinsderivate sind Finanzinstrumente, deren Auszahlung in irgendeiner Weise von Zinssätzen abhängt.

Der Handel mit Zinsderivaten ist gegen Ende des letzten Jahrhunderts stark gestiegen und immer mehr neue Produkte wurden entwickelt. Deshalb wurde es immer wichtiger robuste Verfahren zur Bewertung und Absicherung solcher Produkte zu entwickeln.

Zinsderivate sind jedoch schwieriger zu bewerten als Aktien- und Währungsderivate und dafür gibt es folgende Gründe:

- Das Verhalten eines einzelnen Zinssatzes ist komplexer als das eines Wechsel- oder Aktienkurses.
- Zur Bewertung vieler Produkte ist es notwendig, ein Modell zu entwickeln, das das Verhalten der gesamten Spot-Rate-Strukturkurve (Zusammenhang zwischen der Laufzeit und dem Zinssatz, den man auf eine Nullkupon-Anleihe erhalten würde) beschreibt.
- Die Volatilitäten an verschiedenen Punkten der Renditekurve sind unterschiedlich.
- Zinssätze werden nicht nur für die Diskontierung verwendet, sondern auch für die Bestimmung der Auszahlung des Derivats.

2.1 Das Black-Scholes-Merton-Modell und das Modell von Black

2.1.1 Black-Scholes-Merton-Modell

1973 wurde das Black-Scholes-Merton-Modell veröffentlicht. Dieses Modell wurde dann so erweitert, dass es für die Bewertung von Optionen auf Währungen, Aktienindizes und Future-Kontrakte verwendet werden kann.

Die Black-Scholes-Formeln für c - die Preise einer europäischen Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie - und p - eine europäische Verkaufsoption auf eine dividendenlose Aktie sind:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$
$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S_0 ist der Aktienkurs zum Zeitpunkt null, K bezeichnet den Basispreis, r ist der risikolose Zinssatz bei stetiger Verzinsung, σ die Volatilität des Aktienkurses, T die Restlaufzeit der Option und $N(x)$ ist die kumulative Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung.

Herleitung der Black-Scholes-Formel für c :

Eine Möglichkeit der Herleitung der Black-Scholes-Formeln besteht in der Lösung folgender Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

in Abhängigkeit der Randbedingung $f = \max(S - K, 0)$, falls $t = T$ gilt.

Ein anderer Ansatz ist die Verwendung der risikoneutralen Bewertung

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

\hat{E} ist der Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt, das heißt die Anleger fordern keine zusätzliche Rendite für die Übernahme von Risiken. Der Preis c der europäischen Kaufoption ist nun dieser Erwartungswert, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz.

$$c = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

Um nun auf die bekannte Bewertungsformel des Preises zu kommen, muss man zuerst folgende allgemeine Gleichung beweisen:

$$E[\max(V - K, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \quad (2.1)$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln \left[\frac{E(V)}{K} \right] \pm \frac{w^2}{2}}{w}$$

V ist der logarithmisch normalverteilte Wert eines Underlyings, K bezeichnet den Basispreis und w ist die Standardabweichung von $\ln V$. Weiters wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von V mit $g(V)$ bezeichnet und daraus folgt:

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_K^\infty (V - K)g(V) dV$$

$\ln V$ ist normalverteilt mit der Standardabweichung w und der Erwartungswert $E(\ln V)$ wird mit m bezeichnet.

$$m = \ln[E(V)] - \frac{w^2}{2}$$

Nun definiert man eine neue Variable Q die standardnormalverteilt und ihre Dichtefunktion $h(Q)$ ist

$$Q = \frac{\ln V - m}{w} \quad h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

Nun stellt man das Integral über V einfach als Integral über Q dar

$$\begin{aligned} E[\max(V - K, 0)] &= \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^\infty (e^{Qw+m} - K)h(Q) dQ \\ &= \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^\infty e^{Qw+m} h(Q) dQ - K \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^\infty h(Q) dQ \end{aligned}$$

Durch Umformung gilt nun folgende Gleichung $e^{Qw+m} h(Q) = e^{m+\frac{w^2}{2}} h(Q-w)$

Durch Einsetzen in den Erwartungswert $E[\max(V - K, 0)]$ ergibt sich

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+\frac{w^2}{2}} \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^\infty h(Q-w) dQ - K \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^\infty h(Q) dQ$$

Definiert man $N(x)$ nun als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Variable mit Mittelwert null und Standardabweichung eins kleiner als x ist, so ergibt das erste Integral

$$1 - N\left(\frac{\ln K - m}{w} - w\right) = N\left(\frac{-\ln K + m}{w} + w\right) = N\left(\frac{\ln\left[\frac{E(V)}{K}\right] + \frac{w^2}{2}}{w}\right) = N(d_1)$$

Das zweite Integral ist dann analog $N(d_2)$ und so ergibt sich

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m + \frac{w^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2)$$

und aus dieser Gleichung erhält man durch das Einsetzen von m die allgemeine Gleichung (2.1). \square

Wenn man nun eine Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie mit Verfalldatum T , Basispreis K , risikolosem Zinssatz r , aktuellem Aktienkurs S_0 und Volatilität σ betrachtet, so wird der Call-Preis folgendermaßen bestimmt

$$c = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

In dem vorausgesetzten stochastischen Prozess ist der Aktienkurs zum Zeitpunkt T logarithmisch normalverteilt. $\sigma\sqrt{T}$ ist die Standardabweichung von $\ln S_T$ und $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$

Somit folgt aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$c = e^{-rT} [S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)] = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{E}(S_T)}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

2.1.2 Modell von Black

Nachdem man die Annahme der logarithmischen Normalverteilung und das Volatilitätsmaß zur Beschreibung der Unsicherheit akzeptiert hatte, versuchte man das Modell auf Zinsderivate zu erweitern.

Das in diesem Kapitel verwendete Modell wird als Black-Modell bezeichnet, da die Formeln von Fisher Black zur Bewertung von Rohstoff-Futures stammen.

Wenn in dem Modell von Black das Fälligkeitsdatum des Future-Kontrakts und

der Option dasselbe ist, so sind Future-Preis und Spotkurs am Ende der Optionslaufzeit gleich.

Also bekommt man mit diesem Modell sowohl den Wert einer Option auf das *Underlying des Futures*, als auch den Wert der Option auf den *Future-Kontrakt*.

Man betrachtet wieder eine europäische Kaufoption auf eine (beliebige) Variable mit Wert V .

Die erwartete Auszahlung der Option wird im Black-Modell unter folgenden Annahmen berechnet:

- der Wert von V zum Zeitpunkt T ist logarithmisch normalverteilt
- der Erwartungswert von V_T ist gleich F_0 (F_0 ist der Wert des Forward-Preises von V für einen Kontrakt mit Laufzeit T zum Zeitpunkt null - F_0 ist gleich null, damit niemand einen Gewinn erwarten kann)
- die Standardabweichung von $\ln V_T$ ist gleich $\sigma\sqrt{T}$ (σ ist die Volatilität von F)

Die Diskontierung der erwarteten Auszahlung erfolgt durch $P(0, T)$, das entspricht dem Preis einer Nullkuponanleihe (eine Anleihe, die keine Kuponzahlungen vorsieht) zum Zeitpunkt null, die zum Zeitpunkt T eins auszahlt, also dem risikolosen Zinssatz über T Jahre. K entspricht dem Basispreis bzw. Ausübungspreis der Option.

Aus der Annahme, dass V_T logarithmisch normalverteilt ist folgt, wie in der Herleitung der Black-Scholes-Formel im letzten Punkt bereits gezeigt wurde, dass die erwartete Auszahlung der Option zum Zeitpunkt T folgende Gleichung erfüllt

$$E[\max(V_T - K, 0)] = E(V_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{E(V_T)}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

Da der Erwartungswert von V_T gleich F_0 ist laut Annahme und mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert wird, so ist der Wert der Kauf- bzw. Verkaufsoption

$$c = P(0, T)[F_0N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_0N(-d_1)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

Falls die Auszahlung aus dem Wert von V_T berechnet wird, aber erst zum Zeitpunkt T^* stattfindet, so wird die erwartete Auszahlung einfach vom Zeitpunkt T^* und nicht von T diskontiert (der Rest der obigen Formeln bleibt gleich).

Wichtig für das Modell von Black ist, dass man weder für F noch den Prozess von V eine geometrische Brownsche Bewegung annehmen muss, sondern nur, dass der Wert von V zum Zeitpunkt T logarithmisch normalverteilt ist.

Der Volatilitätsparameter σ sagt nicht unbedingt etwas über die Standardabweichung von $\ln V_T$ zu anderen Zeitpunkten als T aus, sondern es geht nur um die Definition der Beziehung, dass die Standardabweichung von $\ln V_T$ gleich $\sigma\sqrt{T}$ ist.

Die Gültigkeit des Modells von Black

Für konstante und deterministisch angenommene Zinssätze ist das Black-Modell sinnvoll, denn dann ist der Forward-Preis von V gleich dem Future-Preis und es gilt $E[S_T] = F_0$ in einer risikoneutralen Welt.

Wenn die Zinssätze jedoch stochastisch sind gilt es zwei Fragen zu beantworten:

- Warum darf man $E(V_T) = F_0$ setzen? (der Forward-Preis entspricht nicht dem Future-Preis)
- Warum wird beim Diskontieren ignoriert, dass die Zinssätze stochastisch sind?

Diese Annahmen sind gerechtfertigt, weil sich zeigen wird, dass sie sich gegenseitig ausgleichen.

2.2 Anleiheoptionen

Definition Eine Anleiheoption ist eine Option auf den Kauf bzw. Verkauf einer bestimmten Anleihe zu einem bestimmten Zeitpunkt zu einem bestimmten Preis.

2.2.1 Eingebettete Anleiheoptionen

Eine eingebettete Anleiheoption ist eine Option, die bei der Emission einer Anleihe in die Anleihebedingungen eingebunden wird, so macht man sie entweder für den Emittenten oder den Käufer interessanter. Zwei Beispiele für eine eingebettete Anleiheoption sind der Callable Bond und der Puttable Bond.

Callable Bond

Ein *Callable Bond* ist eine Anleihe, die dem Emittenten erlaubt, die Anleihe zu einem vorher festgelegten Preis zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten zurückzukaufen. Für gewöhnlich gibt es eine sogenannte Sperrfrist, sodass diese Option nicht in den ersten Jahren ausgeübt werden kann. Nach dieser Sperrfrist ist der Basispreis meist eine fallende Funktion der Zeit. Dafür bieten Anleihen mit Kaufoption im Allgemeinen höhere Renditen als Anleihen ohne Kaufoptionen, denn immerhin hat man dem Emittenten eine Kaufoption verkauft.

Puttable Bond

Ein *Puttable Bond* ist das analoge Gegenstück zu einem Callable Bond. Jetzt hat der Inhaber der Anleihe das Recht vom Unternehmen den vorzeitigen Rückkauf zu verlangen, das heißt der Käufer hat zusätzlich zur Anleihe noch eine Verkaufsoption erworben. Natürlich gibt es hier auch eine geringere Rendite.

Kredite enthalten auch häufig solche eingebetteten Anleiheoptionen, denn die vorzeitige Tilgung von Krediten stellt auch eine Kaufoption auf Anleihen dar. Eine Kreditzusage hingegen stellt eine Verkaufsoption auf eine Anleihe dar.

2.2.2 Europäische Anleiheoptionen

Europäische Anleiheoptionen findet man vor allem auf dem OTC-Markt, aber auch ein paar eingebettete Anleiheoptionen sind von diesem Typ.

Meist nimmt man an, dass der Anleihepreis (auch Bondpreis genannt) am Ende der Laufzeit, also bei Fälligkeit logarithmisch normalverteilt ist. Man kann für die Bepreisung der Option die Formeln des Black-Modells verwenden, wenn man F_0 gleich dem Forward-Anleihepreis F_B setzt und σ gleich der Volatilität des Forward-Anleihepreises σ_B ist. Weiters gilt dann wieder folgende Beziehung

$$\sigma_B \sqrt{T} = \text{Standardabweichung des } \ln B_T$$

wobei B_T der Anleihepreis bei Fälligkeit der Option ist.

Unter diesen Annahmen ergeben sich die Werte der Kauf- bzw. Verkaufsoption

$$c = P(0, T)[F_B N(d_1) - K N(d_2)]$$

$$p = P(0, T)[K N(-d_2) - F_B N(-d_1)]$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{F_B}{K}\right) \pm \frac{\sigma_B^2 T}{2}}{\sigma_B \sqrt{T}} \quad \text{und} \quad F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)}$$

Zur Berechnung des Forward-Anleihepreises F_B braucht man B_0 , den Anleihepreis zum Zeitpunkt null und I , den Barwert der Kuponzahlungen.

2.2.3 Theoretische Begründung des Modells

Wenn man eine Forward-risikoneutrale Welt bezüglich einer zum Zeitpunkt T fälligen Nullkuponanleihe annimmt, so kann man folgendes zeigen:

- $f_0 = P(0, T)E_T(f_T)$ - das heißt, der gegenwärtige Wert eines beliebigen Wertpapiers ist in dieser Welt sein Erwartungswert zum Zeitpunkt T , multipliziert mit dem Preis einer in T fälligen Nullkuponanleihe. Das bedeutet für den Preis einer Kaufoption auf eine Anleihe

$$c = P(0, T)E_T[\max(B_T - K, 0)] \quad (2.2)$$

wobei E_T der Erwartungswert in einer Forward-risikoneutralen Welt bezüglich einer in T fälligen Nullkuponanleihe ist.

- $E_T(V_T) = F$ - also der Erwartungswert einer beliebigen Variable (die keinen Zinssatz darstellt) zum Zeitpunkt T ist in dieser Welt gleich seinem Forward-Wert, das heißt

$$E_T(B_T) = F_B \quad (2.3)$$

Sei der Anleihepreis logarithmisch normalverteilt und die Standardabweichung des $\ln B_T$ gleich $\sigma_B \sqrt{T}$ so folgt aus (2.1) und (2.2)

$$c = P(0, T)[E_T(B_T)N(d_1) - KN(d_2)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{E_T(B_T)}{K}\right) \pm \frac{\sigma_B^2 T}{2}}{\sigma_B \sqrt{T}}$$

Mit Hilfe von (2.3) kann man diese Gleichung auf die Formel für die Bewertung einer europäischen Anleiheoption zurückführen. Daraus sieht man also, dass man den heutigen Zinssatz für eine T -jährige Laufzeit zur Diskontierung verwenden kann, wenn man den erwarteten Anleihepreis gleich dem Forward-Anleihepreis setzt.

2.3 Zinscaps und Zinsfloors

2.3.1 Zinscap

Definition

Ein Zinscap ist die Vereinbarung einer Zinsobergrenze (Cap Rate) R_K .

Man verwendet Zinscaps zur Absicherung gegen den Anstieg der Zinssätze auf eine variabel verzinsliche Anleihe über ein bestimmtes Niveau – Cap Rate. Wenn der variable Zinssatz an einem Anpassungstermin höher ist, als die Zinsobergrenze, so wird die Differenz am nächsten Anpassungstermin ausbezahlt. Als Tenor bezeichnet man die Zeit zwischen den Anpassungsterminen.

Der Cap als Portfolio von Zinsoptionen

Ein Zinscap kann als ein aus n Kaufoptionen auf einen zum Zeitpunkt t_k beobachteten Zinssatz bestehendes Portfolio dargestellt werden. Diese Kaufoptionen sehen wie folgt aus und werden auch als *Caplets* bezeichnet

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$$

Die Auszahlung dieses Caplets erfolgt in t_{k+1} . L bezeichnet den Nominalbetrag, R_K die Zinsobergrenze, R_k den zum Zeitpunkt t_k beobachteten Zinssatz für den Tenor zwischen t_k und t_{k+1} . Wenn der Zinscap eine Gesamtlaufzeit T hat, so gibt es n Anpassungstermine t_1, t_2, \dots, t_n und n potenzielle Auszahlungstermine t_2, t_3, \dots, t_{n+1} , wobei $t_{n+1} = T$ ist.

Der Cap als Portfolio von Anleiheoptionen

Ein Zinscap kann auch als ein aus n Verkaufsoptionen auf Nullkuponanleihen bestehendes Portfolio dargestellt werden. Die Auszahlung von $L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$ im Zeitpunkt t_{k+1} ist äquivalent mit

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max(R_k - R_K, 0) = \max \left[L - \frac{L(1 + R_K\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}, 0 \right] \quad (2.4)$$

im Zeitpunkt t_k .

$\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$ ist der Wert einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t_k , der zum Zeitpunkt t_{k+1} den Betrag $L(1 + R_K\delta_k)$ auszahlt.

Die rechte Seite aus (2.4) entspricht der Auszahlung aus einer Verkaufsoption mit Laufzeit t_k auf eine Nullkuponanleihe mit der Laufzeit t_{k+1} , falls der Nennwert der Anleihe $L(1 + R_K\delta_k)$ und der Basispreis L ist.

2.3.2 Zinsfloor

Zinsfloors werden analog zu Zinscaps gebildet.

Definition Ein Zinsfloor ist die Vereinbarung einer Zinsuntergrenze, das heißt es ist eine Absicherung gegen zu niedrige Zinsen. Eine Auszahlung tritt erst ein, wenn der variable Zinssatz die Zinsuntergrenze unterschreitet.

Ein Zinsfloor führt im Zeitpunkt t_{k+1} zu folgender Auszahlung

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$$

Analog zum Zinscap ist eine Zinsfloor ein Portfolio von Verkaufsoptionen auf Zinssätze bzw. ein Portfolio von Kaufoptionen auf Nullkuponanleihen. Jede dieser Optionen aus denen ein Zinsfloor besteht heißt *Floorlet*.

2.3.3 Collar

Definition Ein Collar ist eine Kombination aus einem Zinscap in der Long-Position und einem Zinsfloor in der Short-Position, das heißt der variable Zinssatz soll immer "stabil" zwischen zwei Werten gehalten werden.

Meist ist zu Beginn der Preis des Zinscaps gleich dem Preis des Zinsfloors, so ist der Einstieg in einen Collar nicht mit Kosten verbunden.

2.3.4 Bewertung von Zinscaps und Zinsfloors

Ein Caplet hat im Zeitpunkt t_{k+1} die Auszahlung $L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$. Sei der Zins R_k logarithmisch normalverteilt mit der Volatilität σ_k , so ist der Wert des Caplets

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{F_k}{R_K}\right) \pm \frac{\sigma_k^2 t_k}{2}}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

wobei F_k die Forward Rate, also der Zinssatz des Tenors zwischen t_k und t_{k+1} ist. Der Wert des entsprechenden Floorlets ist

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)]$$

Jedes Caplet eines Zinscaps bzw. Floorlet eines Zinsfloors muss mit diesen Gleichungen separat berechnet werden. Im Rahmen der Bewertung hat man entweder die Möglichkeit *eine Volatilität für alle* Caplets bzw. Floorlets zu verwenden - diese wird Flat-Volatilität genannt. Man variiert diese Volatilität an der Laufzeit des Zinscaps bzw. Zinsfloors.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, *für jedes* Caplet bzw. Floorlet *eine andere Volatilität* zu verwenden - diese werden als Spot-Volatilitäten bezeichnet.

Die am Markt angegebenen Volatilitäten sind meist Flat-Volatilitäten, aber viele Händler rechnen lieber mit Spot-Volatilitäten, weil ihnen diese die Möglichkeit geben über- bzw. unterbewertete Caplets bzw. Floorlets zu erkennen. Spot-Volatilitäten können aus Flat-Volatilitäten berechnet werden und umgekehrt.

2.3.5 Theoretische Begründung des Modells

Wenn man eine Forward-risikoneutrale Welt bezüglich einer zum Zeitpunkt t_{k+1} fälligen Nullkuponanleihe annimmt, so kann man folgendes zeigen:

- $f_0 = P(0, t_{k+1})E_{k+1}(f_{k+1})$ - das heißt, der gegenwärtige Wert eines beliebigen Wertpapiers ist in dieser Welt sein Erwartungswert zum Zeitpunkt t_{k+1} , multipliziert mit dem Preis einer in t_{k+1} fälligen Nullkuponanleihe. Das bedeutet für den Preis eines Caplets, das eine Auszahlung im Zeitpunkt t_{k+1} hat

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})E_{k+1}[\max(R_k - R_K, 0)] \quad (2.5)$$

wobei E_{k+1} der Erwartungswert in einer Forward-risikoneutralen Welt bezüglich einer in t_{k+1} fälligen Nullkuponanleihe ist.

- $E_{k+1}[R(t_k, t_k, t_{k+1})] = R(0, t_k, t_{k+1})$ - also der Erwartungswert eines Zinssatzes für den Zeitraum zwischen t_k und t_{k+1} ist in dieser Welt gleich der Forward Rate, das heißt

$$E_{k+1}(R_k) = F_k \quad (2.6)$$

wobei $R(t, T, T^*)$ der zum Zeitpunkt t beobachtete Forward-Zinssatz für den Abschnitt zwischen T und T^* ist.

Sei R_K logarithmisch normalverteilt so folgt aus (2.1) und (2.5)

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})[E_{k+1}(R_k)N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{E_{k+1}(R_k)}{R_K}\right) \pm \frac{\sigma_k^2 t_k}{2}}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

Mit Hilfe von (2.6) kann man diese Gleichung auf die Formel für die Bewertung eines Zinsscaps zurückführen. Daraus sieht man also, dass man den aktuell am Markt beobachteten Zinssatz für eine t_{k+1} -jährige Laufzeit zur Diskontierung verwenden kann, wenn man den erwarteten Zinssatz gleich dem Forward-Zinssatz setzt.

2.4 Europäische Swaptions

Definition Eine europäische Swaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Der Inhaber der Swaption hat das Recht, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt in einen bestimmten Zinsswap einzutreten.

Eine Swaption ist sinnvoll, wenn man in einer gewissen Zeit zum Beispiel ein Darlehen mit einer variablen Verzinsung und fixer Laufzeit abschließen wird und die variable Verzinsung gegen fixe Zinszahlungen tauschen will.

Die Swaption bietet die Sicherheit, zu diesem zukünftigen Zeitpunkt keinen zu hohen fixen Zinssatz zahlen zu müssen. Natürlich wird man diese Swaption nicht ausüben, wenn man dann zu diesem zukünftigen Zeitpunkt am Markt einen Zinsswap mit den gleichen Konditionen, jedoch mit einem niedrigerem festen Zinssatz bekommt.

Für solch eine Swaption muss man natürlich eine bestimmte Prämie zahlen, um das Recht aber nicht die Pflicht zu haben diesen Zinsswap auszuüben. Anders ist das bei *Forward Swaps*, für diese muss man keine Prämie im Voraus bezahlen, dafür ist man aber verpflichtet in den Zinsswap einzusteigen.

2.4.1 Bewertung europäischer Swaptions

Definition Die Swap Rate s_T ist jener feste Zinssatz, der in einem neu emittierten Zinsswap mit einer bestimmten Laufzeit n zu einer bestimmten Zeit T mit m Auszahlungsterminen pro Jahr mn -mal gegen den LIBOR-Zinssatz getauscht werden kann.

In diesem Modell wird angenommen, dass diese Swap Rate bei Fälligkeit der Option logarithmisch normalverteilt ist.

s_K ist der in einer Swaption vereinbarte feste Zinssatz, bei dem der Swap in T Jahren startet und n Jahre läuft, wobei es m Zahlungen pro Jahr gibt und L das Nominalkapital ist.

Die Auszahlung der Swaption besteht aus einer Serie von Zahlungsströmen in Höhe von

$$\frac{L}{m} \max(s_T - s_K, 0)$$

T_1, T_2, \dots, T_{nm} sind die Zahlungstermine und so ist der Wert des zum Zeitpunkt T_i erhaltenen Cash Flow

$$\frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{s_K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}}$$

s_0 ist die Forward Swap Rate zum Zeitpunkt null, σ bezeichnet die Volatilität der Forward Swap Rate, sodass $\sigma \sqrt{T}$ die Standardabweichung von $\ln s_T$ ist. Während ein Zinscap ein Portfolio von Zinsoptionen darstellt, handelt es sich bei einer Swaption um eine einzelne Option mit wiederkehrenden Auszahlungen. So ergibt sich der Gesamtwert der Swaption durch

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

Dies ist eine natürliche Erweiterung des Black-Modells. Die Volatilität σ wird mit \sqrt{T} multipliziert und $\sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$ bezeichnet den Diskontierungsfaktor für die mn Auszahlungen. Den Wert der Swaption kann man noch vereinfachen, wenn man die Annuität A als den Wert des Kontrakts definiert, der $\frac{1}{m}$ zu den Zeitpunkten T_i ausbezahlt

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

mit

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$$

Analog kann man das Ganze auch auf eine Verkaufsoption auf s_T anwenden, das heißt die Swaption gibt dem Inhaber das Recht, den festen Zins s_K zu erhalten und so folgt für die Auszahlung der Swaption

$$\frac{L}{m} \max(s_K - s_T, 0)$$

und der Wert der gesamten Swaption ist

$$LA[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)]$$

2.4.2 Theoretische Begründung des Modells

Wenn man eine Forward-risikoneutrale Welt bezüglich der Annuität A annimmt, so kann man folgendes zeigen:

- $f_0 = A(0)E_A \left[\frac{f_T}{A(T)} \right]$ - das heißt, der gegenwärtige Wert eines beliebigen Wertpapiers ist der gegenwärtige Wert der Annuität, multipliziert mit

$$E \left[\frac{\text{Preis des Wertpapiers in } T}{\text{Wert der Annuität in } T} \right]$$

Das bedeutet der Wert der Swaption ist

$$LAE_A[\max(s_T - s_K, 0)] \quad (2.7)$$

- $s_t = E_A[s_T]$ - also der Erwartungswert der Swap Rate zum Zeitpunkt T ist in dieser Welt gleich seinem Forward Swap Rate, das heißt

$$s_0 = E_A[s_T] \quad (2.8)$$

Da der feste Zinssatz bei Fälligkeit der Option logarithmisch normalverteilt angenommen wird und die Standardabweichung des $\ln s_T$ gleich $\sigma\sqrt{T}$ ist so folgt aus (2.1) und (2.7)

$$LA[E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln \left(\frac{E_A(s_T)}{s_K} \right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

Mit Hilfe von (2.8) kann man diese Gleichung auf die Formel für die Bewertung einer europäischen Swaption zurückführen. Daraus sieht man also, dass man Zinssätze zur Diskontierung als konstant betrachten kann, wenn man die erwartete Swap Rate gleich der Forward Swap Rate setzt.

2.5 Rückblick

Das Black-Modell und seine Erweiterungen bieten ein allgemein verständliches Verfahren zur Bewertung von Zinsoptionen europäischen Typs, wobei der Wert der Option zugrunde liegenden Variable als logarithmisch normalverteilt angenommen wird.

Jedes der vorgestellten Modelle ist zwar in sich konsistent, aber sie sind nicht untereinander konsistent. Es kann immer nur einer der drei Werte (Anleihepreis, Spot Rate, Swap Rate) als logarithmisch normalverteilt angenommen werden.

Beim Black-Modell kommt es zur Berechnung der erwarteten Auszahlung - unter der Annahme, dass der Erwartungswert einer Variablen gleich ihrem Forward-Preis ist - die dann mit der gegenwärtig am Markt beobachteten Spot Rate diskontiert wird.

Das Problem dieser Modelle ist, dass sie die Veränderungen der Zinssätze im Laufe der Zeit nicht beschreiben. Deshalb können sie nicht zur Bewertung von amerikanischen Swaptions, strukturierten Anleihen und Callable Bonds eingesetzt werden.

Kapitel 3

Zinsderivate - Die Short-Rate-Modelle

Da das Black-Modell an seine Grenzen stößt benötigt man alternative Verfahren. Zu diesen gehört auch die Ableitung so genannter Zinsstrukturmodelle. Dabei handelt es sich um Modelle, die die Entwicklung aller Nullkupon-Zinssätze (spot rates) beschreiben. Wir betrachten jetzt die Zinsstrukturmodelle, die das Verhalten des kurzfristigen Zinssatzes r modellieren, also die Short-Rate-Modelle.

3.1 Einführung

Definition Der Zinssatz r , der zum Zeitpunkt t für einen unendlich kleinen Zeitabschnitt gilt wird als Short Rate oder momentaner kurzfristiger Zinssatz bezeichnet.

Man betrachtet hier wieder nur den Prozess, dem r in der risikoneutralen Welt folgt, das heißt die Anleger erwirtschaften in einem kurzem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ im Mittel $r(t)\Delta t$.

Der Wert eines Zinsderivats in t , das zum Zeitpunkt T eine Auszahlung f_T leistet, ist gleich

$$\hat{E} [e^{-\bar{r}(T-t)} f_T]$$

\bar{r} ist der durchschnittliche Wert von r in $[t, T]$, $P(t, T)$ definiert den Preis einer Nullkupon-Anleihe zum Zeitpunkt t , die in T Betrag eins auszahlt und $R(t, T)$ den Zinssatz zum Zeitpunkt t bei stetiger Verzinsung für eine Periode $T - t$, so gilt

$$P(t, T) = \hat{E} [e^{-\bar{r}(T-t)}] = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

und somit

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E} [e^{-\bar{r}(T-t)}]$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Laufzeitstruktur der Zinssätze zu jedem beliebigen Zeitpunkt ableiten aus dem Wert von r zu diesem Zeitpunkt und dem risikoneutralen Prozess für r .

Also sucht man nun Modelle, die den Prozess von r darstellen, denn sobald dieser vollständig festgelegt ist, hat man auch die anfängliche Zinsstrukturkurve und ihre zeitliche Entwicklung vollständig bestimmt. Mittels $R(t, T)$ kann man also jeden Zinssatz für jede Laufzeit und jeden Zeitpunkt berechnen.

3.2 Gleichgewichtsmodelle

Normalerweise beginnt man bei diesen Modellen mit Annahmen über ökonomische Variablen und der Herleitung eines Prozesses für die Short Rate r . Danach untersucht man, welche Schlüsse man aus diesem Prozess für die Anleihe- und Optionspreise ziehen kann.

In einem *Einfaktor-Gleichgewichtsmodell* enthält der Prozess für r nur *eine Unsicherheitsquelle*. Grundsätzlich wird der risikoneutrale Prozess von r durch einen Itô-Prozess beschrieben

$$dr = m(r) dt + s(r) dz$$

Dieser Prozess unterstellt m , die momentane Drift - der Richtwert für den Zuwachs von r - und s , die momentane Standardabweichung, dass sie von r abhängen, jedoch nicht von der Zeit.

Die Annahme eines einzigen Faktors scheint weniger, als es tatsächlich ist. Es ändern sich zwar alle Zinssätze in dieselbe Richtung in einem beliebig kurzen Intervall, jedoch nicht um denselben Betrag. Daher kann sich die Gestalt der Zinsstrukturkurve im Laufe der Zeit ändern.

3.2.1 Rendleman-Bartter-Modell

Der Prozess für r ist in diesem Modell gegeben durch

$$dr = \mu r ds + \sigma r dz$$

wobei μ und σ konstant sind. r folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung und dieselbe Art von Prozess wird auch Aktienkursen unterstellt. Anzunehmen, dass sich ein kurzfristiger Zinssatz wie ein Aktienkurs verhält ist ganz natürlich, aber trotzdem nicht ganz passend.

Denn Zinssätzen tendieren scheinbar im Gegensatz zu Aktienkursen im Laufe der Zeit auf ein langfristiges Durchschnittsniveau zurück, was auch als Mittelwert-tendenz (Mean Reversion) bezeichnet wird.

Das heißt bei einem hohen r führt diese Mittelwerttendenz zu einer negativen Driftrate und analog für niedrige r . In diesem Modell jedoch bleibt die Mittelwerttendenz unberücksichtigt.

3.2.2 Vasicek-Modell

Der Prozess für r ist in diesem Modell gegeben durch

$$dr = a(b - r) dt + \sigma dz$$

wobei a , b und σ konstant sind.

In diesem Modell wird die Mittelwerttendenz berücksichtigt, indem der kurzfristige Zinssatz r mit einem Wert a auf ein Niveau b "gezogen" wird. Ein normalverteilter stochastischer Term σdz überlagert diese Tendenz.

Die gesamte Zinsstrukturkurve kann als Funktion von $r(t)$ beschrieben werden, sobald a , b und σ bestimmt sind

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T) r(t)$$

Das Modell hat jedoch auch einen Nachteil:

b ist das Tendenzniveau des Prozesses, wenn r nun über diesem Wert liegt, so ist der Term $a(b - r)$ negativ und der Drift wird den Prozess tendentiell nach unten "ziehen". Dass der Term σdz konstant, also unabhängig von r ist, führt zu dem Problem dieses Modells und zwar, dass der Prozess auch negative Werte annehmen kann.

3.2.3 Modell von Cox, Ingersoll und Ross

Der Prozess für r ist in diesem Modell gegeben durch

$$dr = a(b - r) dt + \sigma \sqrt{r} dz$$

Diese Modell hat dieselbe Drift wie das Vasicek-Modell, jedoch ist die Standardabweichung proportional zu \sqrt{r} . Wenn nun der kurzfristige Zinssatz steigt, so wird auch seine Standardabweichung größer, das heißt, dass der Prozess nicht mehr negativ werden kann.

Wie im Vasicek-Modell sind auch hier steigende, sinkende und gekrümmte Zinsstrukturkurven möglich. Der langfristige Zinssatz $R(t)$ hängt wie schon im vorigen Modell von $r(t)$ ab, das heißt, $r(t)$ bestimmt das Niveau der Zinsstrukturkurve, nicht aber ihre grundsätzliche Form, welche von t abhängt.

3.2.4 Gleichgewichtsmodelle mit zwei Faktoren

Es wurden auch einige Gleichgewichtsmodelle mit zwei Faktoren untersucht.

Modell von Brennan und Schwartz

In diesem Modell tendiert der Prozess für den kurzfristigen Zinssatz zu einem langfristigen Zinssatz, der wiederum einem stochastischen Prozess folgt.

Als langfristigen Zinssatz wählt man die Rendite einer Anleihe mit unendlicher Laufzeit, die eins pro Jahr auszahlt. Den Renditeprozess kann man mit Hilfe von Itô's Lemma aus dem Anleihepreisprozess berechnen, da die Rendite der Anleihe der Kehrwert des Preises ist.

Modell von Longstaff und Schwartz

Dieses Modell geht von einem allgemeinen Gleichgewichtsmodell für die Ökonomie aus und leitet ein Zinsstrukturmodell mit einer stochastischen Volatilität ab.

3.3 No-Arbitrage-Modelle

Das Problem der Gleichgewichtsmodelle ist, dass sie nicht unbedingt zur aktuellen Zinsstruktur passen. Lediglich durch die geschickte Wahl der Parameter lässt sich eine näherungsweise Anpassung an die Zinsstruktur erreichen.

Händler können kein Vertrauen in den Preis einer Anleiheoption haben, wenn das Modell die zugrunde liegende Anleihe nicht korrekt bewertet, denn ein Fehler von einem Prozent im Preis der zugrunde liegenden Anleihe kann zu einem Fehler von 25 Prozent im Optionspreis führen.

Im Gegensatz dazu stimmen *No-Arbitrage-Modelle* genau mit der aktuellen Zinsstruktur überein, denn im Gleichgewichtsmodell ist die aktuelle Zinsstruktur ein Modell*output* und im No-Arbitrage-Modell ist sie ein Modell*input*.

Die Driftrate $m(r)$ ist bei den Gleichgewichtsmodellen im Normalfall keine Funktion der Zeit, bei den No-Arbitrage-Modellen aber schon. Das liegt daran, dass hier die anfängliche Form der Zinsstrukturkurve den durchschnittlichen Pfad bestimmt.

Einige Gleichgewichtsmodelle können in No-Arbitrage-Modelle übergeleitet werden, indem man die Drift von r zeitabhängig modelliert.

3.3.1 Ho-Lee-Modell

Das erste No-Arbitrage-Modell wurde in Form eines Binomialbaums von Anleihepreisen mit zwei Parametern

- kurzfristige Standardabweichung
- Marktpreis des Risikos des kurzfristigen Zinssatzes

ausgeführt. Das Modell konvergiert in stetiger Zeit gegen

$$dr = \theta(t) dt + \sigma dz$$

Die momentane Standardabweichung σ ist konstant. Die Variable $\theta(t)$ definiert die mittlere Richtung, in der sich r zum Zeitpunkt t bewegt. Sie ist so gewählt, dass das Modell an die anfängliche Zinsstruktur angepasst und unabhängig von der Höhe von r ist.

$\theta(t)$ kann analytisch berechnet werden durch

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$$

$F(0, t)$ ist die momentane Forward Rate für einen Fälligkeitstermin t zum Zeitpunkt null, wobei der Index t die partielle Ableitung nach t bezeichnet. Näherungsweise ist $\theta(t)$ gleich $F_t(0, t)$ und deshalb ist die durchschnittliche Richtung, in die sich der kurzfristige Zinssatz bewegt, näherungsweise gleich der Steigung der momentanen Forward-Kurve, welche von normalverteilten Zufallsgrößen überlagert wird.

Mit diesem Modell können Zerobonds und europäische Optionen auf Zerobonds analytisch bewertet werden. Der größte Nachteil dieses Modells liegt in der impliziten Annahme, dass alle Zinssätze zu allen Zeiten gleich variabel sind und r negativ werden kann.

3.3.2 Einfaktor-Modell von Hull-White

Diese Modell stellt eine Erweiterung des Vasicek-Modells dar mit einer exakten Anpassung an die anfängliche Zinsstruktur

$$dr = [\theta(t) - ar] dt + \sigma dz = a \left[\frac{\theta(t)}{a} - r \right] dt + \sigma dz$$

wobei a und σ konstant sind.

Dieses Modell kann auch als Ho-Lee-Modell mit Mittelwerttendenz mit Wert a und als Vasicek-Modell mit zeitabhängigem Tendenzniveau bezeichnet werden. Man sieht, dass das Ho-Lee-Modell ein Spezialfall dieses Modells mit $a = 0$ ist.

Zum Zeitpunkt t tendiert r zu einem Niveau von $\frac{\theta(t)}{a}$ mit dem Wert a . Die Funktion $\theta(t)$ kann aus der anfänglichen Zinsstruktur errechnet werden

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Der letzte Term ist meistens sehr klein, deshalb bekommt man durch seine Vernachlässigung $F_t(0, t) + a[F(0, t) - r]$ als Driftrate des Prozesses für r zum Zeitpunkt t . Daraus sieht man, dass r im Mittel der Steigung der anfänglichen Kurve der momentanen Forward Rates folgt. Wenn der kurzfristige Zinssatz also von der Kurve abweicht, kehrt er wieder mit dem Wert a zurück.

Das Modell ermöglicht eine umfangreiche Beschreibung der Volatilitätsumgebung bei gleichzeitiger analytischer Handhabbarkeit. Der Nachteil dabei ist jedoch wie vorhin beim Vasicek-Modell, dass der kurzfristige Zinssatz negativ werden kann.

3.3.3 Black-Karasinski-Modell

In diesem Modell ist es nicht mehr möglich, dass der kurzfristige Zinssatz negativ wird

$$d \ln r = [\theta(t) - a(t)\ln(r)] dt + \sigma(t) dz$$

$\ln r$ folgt dem selben Prozess wie r im Hull-White-Modell. Der kurzfristige Zinssatz r ist für einen zukünftigen Zeitpunkt nicht normalverteilt (wie in Ho-Lee und Hull-White), sondern logarithmisch normalverteilt.

Das Black-Karasinski-Modell ist analytisch schlecht handhabbar, deshalb ist die Ermittlung von Formeln zur Bewertung von Anleihen in Abhängigkeit von r nicht möglich.

3.3.4 Zweifaktoren-Modell von Hull-White

Dieses Modell ist ähnlich aufgebaut, wie das Zweifaktoren Gleichgewichtsmodell von Brennan und Schwartz

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)] dt + \sigma_1 dz_1$$

wobei u einen Anfangswert von null hat und folgendem Prozess folgt

$$du = -bu dt + \sigma_2 dz_2$$

$\theta(t)$ wird wieder so gewählt, dass das Modell konsistent mit der anfänglichen Zinsstruktur ist. Die Zufallsvariable u ist eine Komponente des Reversionsniveaus von r und kehrt mit dem Wert b auf den Wert null zurück. a, b, σ_1 und σ_2 sind konstant, dz_1 und dz_2 sind Wiener-Prozesse mit einer momentanen Korrelation von ρ .

Das Zweifaktoren-Modell von Hull-White erlaubt entgegen den Einfaktor-Modellen wesentlich umfangreichere Zinsstrukturbewegungen und Volatilitätsstrukturen für den kurzfristigen Zinssatz.

3.4 Zinsbäume

Definition Ein Zinsbaum ist eine zeitdiskrete Darstellung des stochastischen Prozesses für den kurzfristigen Zinssatz.

Diese Zinsbäume sind ähnlich den Aktienkursbäumen. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Bäumen besteht in der Diskontierung. Im Aktienkursbaum wird der Diskontierungssatz für jeden Knoten als gleich unterstellt und im Zinsbaum variiert der Diskontierungssatz von Knoten zu Knoten.

Wenn der Zeitschritt im Baum die Länge Δt hat, dann sind die Zinssätze im Baum stetig verzinst für ein Zeitintervall Δt .

Üblicherweise wird angenommen, dass der Zinssatz R für den Abschnitt Δt demselben stochastischen Prozess folgt, wie der momentane Zinssatz r im entsprechenden zeitstetigen Modell.

Meist verwendet man für Zinssätze einen Trinomialbaum an Stelle eines Binomialbaums, denn dieser bietet den Vorteil eines zusätzlichen Freiheitsgrades. Deshalb ist es einfacher manche Eigenschaften von Zinssätzen abzubilden, wie etwa die Mittelwerttendenz.

Manchmal erweist es sich auch als hilfreich die klassische Verzweigung des Trinomialbaums zu modifizieren. Deshalb gibt es folgende gebräuchliche alternative Verzweigungen:

- Eins-aufwärts-, Geradeaus-, Eins-abwärts-Verzweigung
- Zwei-aufwärts-, Eins-aufwärts-, Geradeaus-Verzweigung
- Geradeaus-, Eins-abwärts-, Zwei-abwärts-Verzweigung

3.4.1 Verfahren zur Konstruktion von Bäumen

Hier wird gezeigt wie das Verfahren zur Konstruktion von Trinomialbäumen von Hull und White auf das Hull-White-Modell

$$dr = [\theta(t) - ar] dt + \sigma dz$$

angewendet werden kann. Im nächsten Abschnitt wird dann gezeigt wie man dieses Verfahren auf andere Modelle verallgemeinern kann.

Der erste Schritt

Sei ein Zeitschritt im Baum Δt und konstant. Weiters wird angenommen, dass der Zinssatz R für Δt demselben Prozess wie R folgt

$$dR = [\theta(t) - aR] dt + \sigma dz$$

Diese Annahme ist durchaus sinnvoll, wenn Δt gegen null geht.

Zuerst konstruiert man einen Baum für eine Variable R^* , die zu Beginn null ist und folgenden Prozess hat

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

Die Variable $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ ist normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 \Delta t$ und die durchschnittliche Änderung von R^* in Δt ist $-aR^* \Delta t$, wenn man Terme höherer Ordnung als Δt vernachlässigt.

Man definiert nun ΔR als den Abstand zwischen den Zinssätzen im Baum und (i, j) als den Knoten mit $t = i\Delta t$ und $R^* = j\Delta R$ (wobei i positiv und j positiv oder negativ ist).

Es ist nun zu klären welche der drei alternativen Verzweigungen in jedem Knoten zur Anwendung kommt, danach muss man noch die Verzweigungswahrscheinlichkeiten berechnen.

Die jeweilige verwendete Verzweigungsmethode muss zu positiven Wahrscheinlichkeiten für alle drei Zweige führen. Man definiert also nun zwei Werte j_{max} und j_{min} , sodass für $j > j_{max}$ zur Abwärtsverzweigung gewechselt wird und für $j < j_{min}$ zur Aufwärtsverzweigung.

Danach definiert man p_u, p_m, p_d die Wahrscheinlichkeiten der höchsten, mittleren und niedrigsten Verzweigung, die man durch lösen des folgenden Gleichungssystems erhält (falls von dem Knoten eine "normale" Verzweigung ausgeht)

$$\begin{aligned} p_u \Delta R - p_d R &= -aj \Delta R \Delta t \\ p_u \Delta R^2 + p_d \Delta R^2 &= \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta R^2 \Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeiten nur von j abhängen und der Baum symmetrisch ist.

Der zweite Schritt

Im zweiten Schritt geht es nun um die Transformation des Baumes für R^* in einen Baum für R . Um das zu erreichen verschiebt man nun die Knoten des R^* -Baums so, dass die anfängliche Laufzeitstruktur der Zinssätze exakt wiedergegeben wird. Dazu definiert man

$$\alpha_i = \alpha(i\Delta t) = R(i\Delta t) - R^*(i\Delta t)$$

und $Q_{i,j}$ als den Barwert eines Wertpapiers, das bei Erreichen des Knotens (i, j) den Betrag eins auszahlt. α_i und $Q_{i,j}$ können mit einem vorwärts gerichteten Verfahren so berechnet werden, dass die anfängliche Zinsstruktur exakt abgebildet wird. Man beginnt bei null und berechnet aus ihnen die restlichen Werte.

Man geht davon aus, dass $Q_{i,j}$ für $i \leq m$ ($m \geq 0$) bereits bestimmt wurde. Als Nächstes versucht man nun α_m so zu berechnen, dass die Bewertung einer zum Zeitpunkt $(m+1)\Delta t$ fälligen Nullkupon-Anleihe im Baum korrekt ist. Für den Zinssatz am Knoten (m, j) gilt $\alpha_m + j\Delta R$, sodass der Preis einer zum Zeitpunkt $(m+1)\Delta t$ fälligen Nullkupon-Anleihe gegeben ist durch

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t}$$

n_m ist die Anzahl der Knoten zu beiden Seiten des zentralen Knotens in $m\Delta t$. Durch umformen dieser Gleichung erhält man

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t}$$

Nachdem man α_m bestimmt hat, kann man $Q_{i,j}$ für $i = m+1$ berechnen

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t}$$

wobei $q(k, j)$ die Wahrscheinlichkeit für die Bewegung vom Knoten (m, k) zum Knoten $(m+1, j)$ ist.

3.4.2 Erweiterung auf andere Modelle

Das vorgestellte Verfahren kann auch auf Modelle der Form

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)] dt + \sigma dz$$

angewendet werden. Man nimmt wieder an, dass R , der Zinssatz für den Zeitabschnitt Δt demselben Prozess folgt wie r

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)] dt + \sigma dz$$

Nun setzt man $x = f(R)$, sodass gilt

$$dx = [\theta(t) - ax] dt + \sigma dz$$

Im ersten Schritt konstruiert man einen Baum für x^* , das demselben Prozess folgt wie x , nur dass $\theta t = 0$ gilt und der Anfangswert von x null ist.

Im zweiten Schritt geht es nun darum den Knoten zum Zeitpunkt $i\Delta t$ um den Betrag α_i zu verschieben um eine exakte Anpassung an die anfängliche Zinsstruktur zu erreichen.

Die Gleichungen für α_i und $Q_{i,j}$ müssen angepasst werden, da sie sich etwas von denen für $f(R) = R$ unterscheiden.

3.4.3 Auswahl von $f(r)$

Für $f(r) = r$ erhält man das Hull-White-Modell.

Der Vorteil dieses Modells ist, dass es analytisch gut lösbar ist. Der Nachteil jedoch ist, dass die Zinssätze negativ werden können.

Für $f(r) = \ln r$ erhält man das Black-Karasinski-Modell.

Der Vorteil dieses Modells ist, dass die Zinssätze immer positiv sind. Der Nachteil jedoch besteht darin, dass es analytisch nicht lösbar ist.

Die richtige Wahl für $f(r)$ besteht scheinbar darin, dass die Zinssätze für r kleiner als ein Prozent logarithmisch normalverteilt und für r größer als ein Prozent normalverteilt sind.

Literaturverzeichnis

[JH] JOHN C. HULL: *Optionen, Futures und andere Derivate*.
6. Auflage, Pearson Studium, 10/2005

[WI] WIKIPEDIA, die freie Enzyklopädie