

Das Markowitz-Modell und CAPM

Seminararbeit erstellt im Wintersemester 2009/10
von Dilyan Stoyanov

30. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Einperioden-Modell von Markowitz	5
2.1	Märkte, die nur Risiko-Veranlagung zulassen	6
2.2	Erweiterung des Modells mit risikoloser Anlage	8
2.3	Verlustgeschäfte im Markowitz-Modell	11
2.4	Ein illustratives Beispiel	13
3	CAPM	17
3.1	Two-fund Separation Theorem	17
3.2	Herleitung des CAPM	18

1 Einleitung

Ein Problem, dem Investoren immer wieder begegnen, ist die Minimierung von Risiken aus der Veranlagung unter Einhaltung von bestimmten Nebenbedingungen an das Endergebnis. Eine mögliche Entscheidung in solchen Situationen ergibt sich aus dem **Markowitz-Modell**, wofür Harry Markowitz mit dem Ökonomie-Nobelpreis im Jahre 1990 ausgezeichnet wurde. Die aus den Fünfziger Jahren stammende Arbeit basiert die Wahl eines *optimalen* Portfolios ausschließlich auf die ersten zwei Momente der Returns von den zugrunde liegenden Assets. Klarerweise stellt dies eine ziemlich grobe Projektion der Realität dar, da die Varianz oft nicht das bestmögliche Risikomaß ist. Nicht zu unterschätzen ist aber die Tatsache, dass dieses Modell zu geometrischen Interpretationen führt. Die zwei benötigten Parameter lassen sich dazu leicht schätzen. Sind

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} r_{1,i} \\ r_{2,i} \\ \vdots \\ r_{n,i} \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, \dots, T\}$$

Beobachtungen für die Returns der vorliegenden Assets, so können wir das Markowitz-Modell mit den klassischen Schätzern

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \sum r_{1,i} \\ \frac{1}{T} \sum r_{2,i} \\ \vdots \\ \frac{1}{T} \sum r_{n,i} \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [(r_i - \bar{r})(r_i - \bar{r})^T] = \left(\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (r_{k,i} - \bar{r}_k)(r_{l,i} - \bar{r}_l) \right)_{1 \leq k, l \leq n}$$

anwenden.

Eine Methode zur Lösung von Optimierungsaufgaben unter Nebenbedingungen, die Basis für die folgenden Betrachtungen bildet, ergibt sich aus dem folgenden

Satz 1.1 (*Lagrange - Multiplikator*) Sei $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$. Hat die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle y ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = \mathbf{0}$ und hat die Ableitung $dg(y) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Rang m , so gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}^m$ derart, dass für die Funktion

$$H : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$H(x, \lambda) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

(y, μ) ein stationärer Punkt ist, d.h. $dH(y, \mu) = \mathbf{0}$. Es gelten also an dieser Stelle die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) + \sum_{j=1}^m \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$g_j(y) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Im zweiten Teil dieser Seminararbeit wird das *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) aufbauend auf das Markowitz-Modell hergeleitet. Das CAPM ermöglicht es, einzelne riskante Anlagemöglichkeiten im Kontext des gesamten Marktportfolios zu bewerten. Bei den beiden Modellen werden zusätzliche Annahmen getroffen, die man aber in natürlicher Weise argumentieren kann und die in diesem Sinne nicht beschränkend sind.

2 Das Einperioden-Modell von Markowitz

Betrachte jetzt ein Marktmodell mit n Assets, wobei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ der Portfoliovektor ist, also bezeichnet x_i das Kapital, das man in das i -te Asset investiert. Sei $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ der stochastische Vektor der Returns von allen zugrunde liegenden Assets. Unser Portfolio liefert also bei Fälligkeit die (stochastische) Rendite $x^T \mathbf{r}$. Wie bereits erwähnt, benutzt das Markowitz-Modell die ersten zwei Momente. Führe dazu $r := \mathbb{E}[\mathbf{r}] \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma := \mathbb{E}[(\mathbf{r} - r)(\mathbf{r} - r)^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein. Um die Optimierungsaufgaben zu stellen, brauchen wir noch folgende

Definition 2.1 (*Gewinn*) Der Gewinn eines Portfolios mit zugehörigem Portfoliovektor x sei die erwartete Rendite:

$$\rho(x) := \mathbb{E}[x^T \mathbf{r}] = x^T r.$$

Definition 2.2 (*Risiko*) Das Risiko eines Portfolios mit zugehörigem Portfoliovektor x sei die Varianz der Rendite:

$$R(x) := \mathbb{V}[x^T \mathbf{r}] = \mathbb{E}[x^T (\mathbf{r} - r)(\mathbf{r} - r)^T x] = x^T \Sigma x.$$

Nun kommen wir zu unserem Optimierungsproblem - wähle ein Portfolio, das das Risiko minimiert, durch das Anfangskapital 1 finanziert wird und Gewinn ρ (in Erwartung) liefert, also

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} R(x) \\ \text{sodass} \quad & e^T x = 1, \\ & \rho(x) = \rho. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist $e := (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ und $e^T x = 1$ die *Budgetgleichung*. Klarerweise spielt die positive Konstante $\frac{1}{2}$ eine rein kosmetische Rolle - diese Form vereinfacht die explizite Lösung von (2).

Im Folgenden betrachten wir aufsteigend Märkte, die ausschließlich aus risikobehafteten Anlagemöglichkeiten bestehen, solche, die dazu auch risikolose anbieten (eine Art festverzinsliches Bankkonto), sowie Assets mit garantiertem Verlust. Dabei bekommt man verschiedene Formen bzw. Lösungen von (2), die sich auch von betriebswirtschaftlichem Standpunkt interpretieren lassen.

2.1 Märkte, die nur Risiko-Veranlagung zulassen

In diesem einfachsten Fall treffen wir folgende Annahmen:

$$\Sigma \text{ sei SPD}; \tag{A1}$$

$$r \notin \text{span}\{e\}. \tag{A2}$$

(A1) besagt, dass alle Portfolios tatsächlich risikobehaftet sind. Sollte (A2) nicht der Fall sein, so muss unter Beachtung der Nebenbedingung $r = \mathbb{E}[\mathbf{r}] = (\rho, \rho, \dots, \rho)^T$. Dies wird i.A. nicht der Fall sein. Ist das jedoch erfüllt, so ist das optimale Portfolio stets durch $x = \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T \Sigma^{-1}e}$ gegeben, also unabhängig von ρ . Wegen (A1) können wir folgende Größen definieren, die später kürzere Darstellungen von den optimalen Portfolios und deren Parameter ermöglichen werden:

$$\alpha := e^T \Sigma^{-1} e, \quad \beta := e^T \Sigma^{-1} r, \quad \gamma := r^T \Sigma^{-1} r, \quad \delta := \alpha \gamma - \beta^2.$$

Wir kommen nun zu

Lemma 2.3 *Die Konstanten α , γ und δ sind positiv. Es gelten ferner folgende Abschätzungen:*

$$\alpha \in \left[\frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right], \quad \gamma \in \left[\frac{\|r\|_2^2}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{\|r\|_2^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right], \quad |\beta| < \frac{\sqrt{n}\|r\|_2}{\lambda_{\min}(\Sigma)}.$$

Beweis Es existiert eine ONB $\{v_i\}_{i=1}^n$ des \mathbb{R}^n , die aus Eigenvektoren zu Eigenwerte $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ von Σ besteht. Schreibt man $e = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, so folgt insbesondere $n = \|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$. Nun gilt

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right)^T \Sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\lambda_i} v_i \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{c_i c_j}{\lambda_j} v_i^T v_j = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{\lambda_i}.$$

Somit folgt

$$\alpha \in \left[\frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} \sum_{i=1}^n c_i^2, \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right] = \left[\frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right].$$

Analog zeigt man die Abschätzung für γ . Mit $r = \sum_{i=1}^n d_i v_i$ folgt:

$$|\beta| = |e^T \Sigma^{-1} r| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{c_i d_i}{\lambda_i} \right| < \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2} \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 \sum_{i=1}^n d_i^2}}{\lambda_{\min}(\Sigma)}.$$

Oben verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Da $\|r\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}$, sind wir fertig. ■

Bemerkung 2.4 *Es sei bemerkt, dass sowohl (A1), als auch (A2) für den Beweis notwendig ist. (A1) liefert nämlich die Positivität der Eigenwerte, (A2) bedeutet, dass e und r , also auch die Koeffizienten bezüglich der ONB - $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ und $(d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ - l.u. sind. Dies hat zur Folge, dass die Ungleichung für $|\beta|$ strikt ist.*

Problem 1 *Löse*

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^T \Sigma x \\ \text{sodass} \quad & e^T x = 1, \\ & r^T x = \rho. \end{aligned} \tag{3}$$

Satz 2.5 (3) *besitzt die eindeutige Lösung*

$$x = \Sigma^{-1}(c_1 e + c_2 r), \quad c_1 := \frac{\gamma - \beta \rho}{\delta}, \quad c_2 := \frac{\alpha \rho - \beta}{\delta}.$$

Beweis Die Hilfsfunktion zur Bestimmung des Lagrange-Multiplikators ist

$$H(x; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x + \lambda_1 (e^T x - 1) + \lambda_2 (r^T x - \rho).$$

Einsetzen in Bedingungen (1) unter Verwendung von $dR(x) = 2(\Sigma x)^T$ und Transponieren ergibt:

$$\begin{pmatrix} \Sigma & e & r \\ e^T & & \\ r^T & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $x = -\Sigma^{-1}(\lambda_1 e + \lambda_2 r)$ und weiters, dass

$$\begin{cases} -e^T \Sigma^{-1}(\lambda_1 e + \lambda_2 r) = 1 \\ -r^T \Sigma^{-1}(\lambda_1 e + \lambda_2 r) = \rho \end{cases}$$

\iff

$$\begin{cases} -\lambda_1 \alpha - \lambda_2 \beta = 1 \\ -\lambda_1 \beta - \lambda_2 \gamma = \rho \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}, \text{ und da } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} \gamma - \beta\rho \\ \alpha\rho - \beta \end{pmatrix}$$

ist die behauptete Form von x gezeigt. Da die Menge $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid e^T x = 1, r^T x = \rho\}$ abgeschlossen ist, muss wegen der Stetigkeit von $x \mapsto R(x) = x^T \Sigma x$ auch das Bild $R(N)$ abgeschlossen sein. Da zudem Σ positiv definit ist, gilt $R(N) \subseteq (0, +\infty)$, also ist $\inf_{x \in N} \frac{1}{2} R(x)$ tatsächlich ein Minimum. ■

Korollar 2.6 *Das minimierte Risiko in (2) ist*

$$R_{\min}(\rho) = \frac{\alpha\rho^2 - 2\beta\rho + \gamma}{\delta}.$$

Ferner gilt

$$\min_{\rho} R_{\min}(\rho) = R_{\min}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

Beweis Aus Satz 2.5 folgt

$$R_{\min}(\rho) = (\Sigma^{-1}(c_1 e + c_2 r))^T \Sigma (\Sigma^{-1}(c_1 e + c_2 r)) = c_1(c_1 \alpha + c_2 \beta) + c_2(c_1 \beta + c_2 \gamma)$$

und nach Einsetzen von

$$c_1 = \frac{\gamma - \beta\rho}{\delta}, \quad c_2 = \frac{\alpha\rho - \beta}{\delta}$$

bekommt man die gewünschte Form. Die zweite Behauptung ist offensichtlich. ■

Wir sehen, dass das optimale Portfolio eine erfolgsabhängige (ρ bestimmt die Koeffizienten) Linearkombination von den erfolgsunabhängigen Portfolios $\Sigma^{-1}e$ und $\Sigma^{-1}r$ ist. Es ist zudem eine affine Funktion von ρ . Etwas unrealistisch erscheint die Tatsache, dass aus $\tilde{\rho} < \frac{1}{\alpha}$ für die entsprechenden optimalen Risiken $R_{\min}(\tilde{\rho}) > R_{\min}(\frac{1}{\alpha})$ folgt: kleinere Gewinne sind für den Investor gefährlicher. Dies motiviert unser Bestreben, das Modell geeignet zu erweitern, um solche Nachteile zu minimieren / vermeiden.

2.2 Erweiterung des Modells mit risikoloser Anlage

Jetzt wenden wir uns dem Fall zu, wo zu den n riskanten Veranlagungsmöglichkeiten noch das früher besprochene „Bankkonto“ mit einer festen deterministischen Rendite r^c hinzugefügt wird. Nun wird der Portfoliovektor zu (x, x^c) erweitert; x , \mathbf{t} , r , Σ beschreiben nur der Risikoanteil des Portfolios. (A1) ist eine natürliche Forderung an das Risikomodell, die weiterhin erhalten bleibt; eine Modifikation von unserer Annahme (A2) ist notwendig:

$$r \neq r^c e. \tag{A3}$$

Problem 2 Löse

$$\min_{x, x^c} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} = \min_x \frac{1}{2} x^T \Sigma x$$

(4)

$$\text{sodass} \quad e^T x + x^c = 1,$$

$$r^T x + r^c x^c = \rho.$$

Satz 2.7 (4) besitzt die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \Sigma^{-1}(r - r^c e) \\ 1 - \mu(\beta - r^c \alpha) \end{pmatrix}, \quad \mu := \frac{\rho - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}.$$

Das optimale Risiko ist daher

$$R_{\min}(\rho) = \frac{(\rho - r^c)^2}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}$$

mit globalem Minimum 0 an der Stelle r^c , wobei das zugehörige Portfolio nur in das Bankkonto investiert.

Beweis Die Hilfsfunktion zur Bestimmung des Lagrange-Multiplikators ist

$$H(x, x^c; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x + \lambda_1 (e^T x + x^c - 1) + \lambda_2 (r^T x + r^c x^c - \rho).$$

(1) besagt nun (nach Transponieren):

$$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 & e & r \\ 0 & 0 & 1 & r^c \\ e^T & 1 & & \\ r^T & r^c & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die ersten $n + 1$ Einträge von der rechten Seite 0. Aus der $(n + 1)$ -ten Zeile des obigen Systems folgt $\lambda_1 = -\lambda_2 r^c$. Einsetzen in den ersten n Zeilen ergibt nun

$$x = -\Sigma^{-1} \lambda_2 (r - r^c e).$$

Die $(n + 2)$ -te Zeile liefert

$$x^c = 1 + \Sigma^{-1} \lambda_2 (r - r^c e).$$

Einsetzen von obigen Formeln für x und x^c in der letzten Zeile ergibt λ_2 :

$$-\lambda_2 r^T \Sigma^{-1}(r - r^c e) + r^c + \lambda_2 r^c e^T \Sigma^{-1}(r - r^c e) = \rho \iff \lambda_2 = -\frac{\rho - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}.$$

Dabei ist unter (A1)

$$(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma = (r - r^c e)^T \Sigma^{-1}(r - r^c e) > 0.$$

Dass es ein Minimum tatsächlich gibt, zeigt man analog wie bei der Lösung von (3). Die behaupteten Darstellung und Eigenschaften von R_{\min} sind leicht herzuleiten. ■

Die Wirkung der risikolosen Anlage erklärt der folgende

Korollar 2.8 *Das Risiko des optimalen Portfolios aus (4) ist stets kleiner oder gleich dem optimalen Risiko aus (3). Wenn $\beta \neq r^c \alpha$ gilt die Gleichheit nur im Punkt $\rho = \frac{\gamma - r^c \beta}{\beta - r^c \alpha}$, wo die beiden Probleme die identischen Lösungen $(x, 0)$ bzw. x haben. Gilt $\beta = r^c \alpha$, so $x^c \equiv 1$ und $e^T x \equiv 0$, wobei die Differenz der beiden Risiken stets $\frac{1}{\alpha}$ beträgt:*

$$\frac{(\rho - r^c)^2}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha \rho^2 - 2\beta \rho + \gamma}{\delta}.$$

Beweis Bezeichne $\Delta(\rho)$ die Differenz zwischen das optimale Risiko aus (4) und dies aus (3):

$$\Delta(\rho) = \frac{\alpha \rho^2 - 2\beta \rho + \gamma}{\delta} - \frac{(\rho - r^c)^2}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}.$$

Klarerweise ist Δ eine quadratische Funktion in ρ :

$$\Delta(\rho) = \left(\frac{\alpha}{\delta} - \frac{1}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma} \right) \rho^2 + 2 \left(\frac{r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma} - \frac{\beta}{\delta} \right) \rho + \frac{\gamma}{\delta} - \frac{(r^c)^2}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}.$$

Für die Diskriminante bekommen wir $\mathcal{D} \equiv 0$ und aus

$$\text{sgn} \left(\frac{\alpha}{\delta} - \frac{1}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma} \right) = \text{sgn} \left(\alpha((r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma) - \delta \right) = \text{sgn}((r^c \alpha - \beta)^2)$$

folgt die Behauptung. ■

Es stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, Portfolios mit zwei oder mehr risikolose Anlagemöglichkeiten zu betrachten. Die Antwort liefert folgendes

Lemma 2.9 (Arbitrage) Ein Portfolio mit mindestens zwei risikolosen Assets mit verschiedenen Renditen r^c, r^d kann jedes vorgegebene ρ mit Null-Risiko realisieren.

Beweis Investiere das Anfangskapital von 1 nur in die risikolosen Positionen, wobei

$$x^c = \frac{\rho - r^d}{r^c - r^d}, \quad x^d = 1 - x^c.$$

Dies liefert Rendite in Höhe ρ bei Fälligkeit mit Null-Risiko. ■

2.3 Verlustgeschäfte im Markowitz-Modell

Das Marktmodell besteht in diesem Abschnitt aus n risikobehafteten Anlagemöglichkeiten, Bankkonto und einem Asset mit garantiertem Verlust, d.h. mit Wert 0 bei Fälligkeit bzw. Return -1 . Dies erscheint zunächst sinnlos, wir werden aber sehen, dass diese Erweiterung im Markowitz-Kontext zu Verminderung des optimalen Risikos führt. Zudem ergibt sich eine analoge Interpretation - ist im Marktmodell erlaubt, nur einen Teil des Anfangskapitals 1 zu veranlagen, so vermeiden wir das oben eingeführte Prinzip des Geld-Verbrennens. Neben (A1) und (A3) setzen wir voraus, dass

$$r^c > -1. \tag{A4}$$

Diese Annahme begründen wir mit der Tatsache, dass $r^c \leq r^l$ nicht sinnvoll ist. Dabei ist $r^l \equiv -1$ und x^l das in die Verlust-Anleihe investierte Kapital. Damit das Modell nicht zulässt, das der Investor unbeschränkte Summen ausleihen kann, ohne dann diese Schulden zu tilgen, verlangen wir $x^l \geq 0$.

Problem 3 Löse

$$\min_{x, x^c, x^l} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ x^c \\ x^l \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \\ x^l \end{pmatrix} = \min_x \frac{1}{2} x^T \Sigma x$$

$$\text{sodass} \quad e^T x + x^c + x^l = 1, \tag{5}$$

$$r^T x + r^c x^c - x^l = \rho,$$

$$x^l \geq 0.$$

Satz 2.10 (5) besitzt eine eindeutige Lösung. Ist $\rho \leq r^c$, so gilt

$$x \equiv \mathbf{0}, \quad x^c = \frac{\rho + 1}{r^c + 1}, \quad x^l = \frac{r^c - \rho}{r^c + 1}.$$

Die Rendite ρ wird in diesem Falle ohne Risiko realisiert. Gilt $\rho > r^c$, so $x^l \equiv 0$ und x^c sowie x haben die gleiche Form wie in der Lösung von (4).

Beweis Wir gehen folgendermaßen vor: zunächst halten wir x^l fest, bekommen eine Lösung x von (5), die von x^l abhängt, und minimieren im Anschluß das Risiko als Funktion von x^l unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $x^l \geq 0$. Analog wie in (4) bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 & e & r \\ 0 & 0 & 1 & r^c \\ e^T & 1 & & \\ r^T & r^c & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 - x^l \\ \rho + x^l \end{pmatrix}.$$

Man erhält sukzessive

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -r^c \lambda_2, \\ x &= \lambda_2 \Sigma^{-1}(r^c e - r), \\ x^c &= 1 - x^l - \lambda_2 e^T \Sigma^{-1}(r^c e - r), \\ x^c &= \frac{\rho + x^l - \lambda_2 r^T \Sigma^{-1}(r^c e - r)}{r^c}. \end{aligned}$$

Die letzten zwei Gleichungen ergeben

$$\lambda_2 = \frac{r^c - \rho - (r^c + 1)x^l}{\alpha(r^c)^2 - 2\beta r^c + \gamma}.$$

Jetzt wollen wir

$$\begin{aligned} x^T \Sigma x &\longrightarrow \min \iff \\ \iff \lambda_2^2 (r^c e^T - r^T) (\Sigma^{-1})^T \Sigma \Sigma^{-1} (r^c e - r) &\longrightarrow \min \iff \\ \iff \lambda_2^2 (\alpha(r^c)^2 - 2\beta r^c + \gamma) &\longrightarrow \min \iff \\ \iff (r^c - \rho - (r^c + 1)x^l)^2 &\longrightarrow \min. \end{aligned}$$

Ist $r^c < \rho$, so wird das Minimum unter Beachtung von $x^l \geq 0$ im Punkt $x^l = 0$ erreicht. Andernfalls folgt $x^l = \frac{r^c - \rho}{r^c + 1}$. Die angegebene Darstellung der Lösung bekommt man jetzt unmittelbar. ■

Im Markowitz-Modell wird eine (große quadratische) Abweichung von dem festgelegten Ziel bestraft. Dies hat zur Folge, dass eine erwirtschaftete Rendite in Höhe von $\rho - \epsilon$ genauso

unerwünscht ist als solche in Höhe von $\rho + \epsilon$. In diesem Zusammenhang wird das unnötige Kapital zur Erreichung des Ziels, welches eine Risikoquelle darstellt, verbrennt. Man verlangt *nicht*, dass eine maximale Rendite erreicht wird, sondern sucht gezielt nach Möglichkeiten, ρ in Erwartung zu gewinnen und das Risiko dabei minimal zu halten. Eine Motivation dafür kann z.B. das Bestreben sein, den Erfolg im Geschäftsjahr möglichst stabil zu halten und extreme Ereignisse wie sehr hohe Gewinne oder Verluste in den einzelnen Quartalen zu vermeiden.

Die bereits besprochene äquivalente Formulierung ergibt sich aus dem folgenden

Lemma 2.11 (5) *ist äquivalent zu einer Modifikation von (4), wobei die Budgetgleichung $e^T x + x^c = 1$ durch die Budgetungleichung $e^T x + x^c \leq 1$ ersetzt wird. Diese Bedingung besagt, dass es gestattet ist, weniger als 100% des vorhandenen Kapitals zu veranlagen.*

Beweis Führe eine Hilfsvariable $\Delta \geq 0$ ein, um $e^T x + x^c \leq 1$ als $e^T x + x^c + \Delta = 1$ zu schreiben. Diese Formulierung ist nun offensichtlich äquivalent zu (5), wobei $\Delta \equiv x^l$. ■

2.4 Ein illustratives Beispiel

Im Folgenden betrachten wir die drei besprochenen Varianten des Markowitz-Modells mit

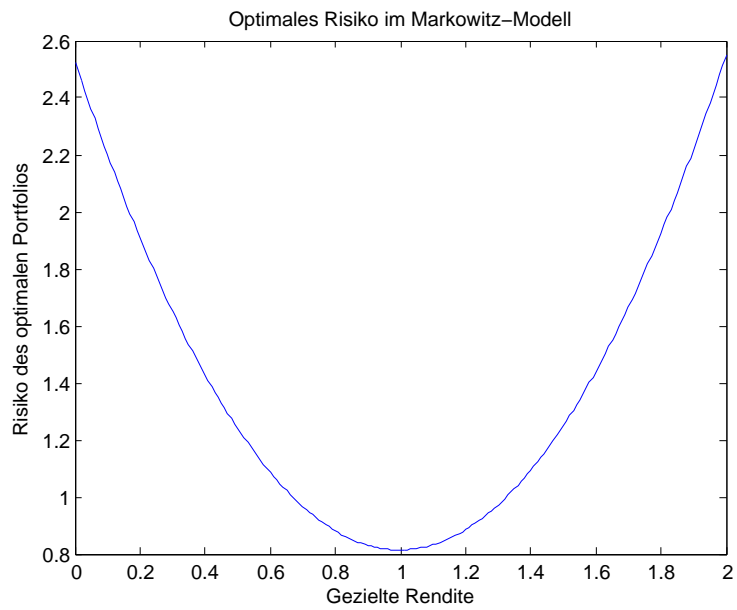
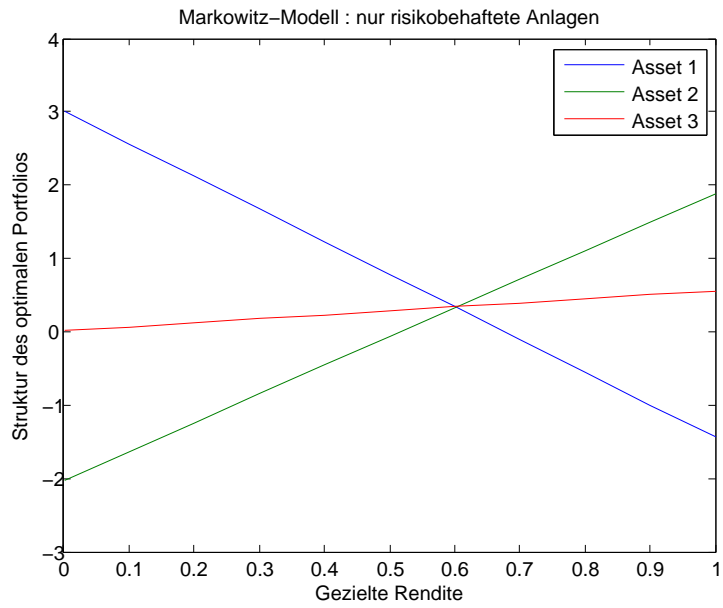
$r^c = 0.2$, $r = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ und der (zufällig erzeugten) SPD Matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.5004 & 1.3293 & 0.8439 \\ 1.3293 & 1.2436 & 0.6936 \\ 0.8439 & 0.6936 & 1.2935 \end{pmatrix}.$$

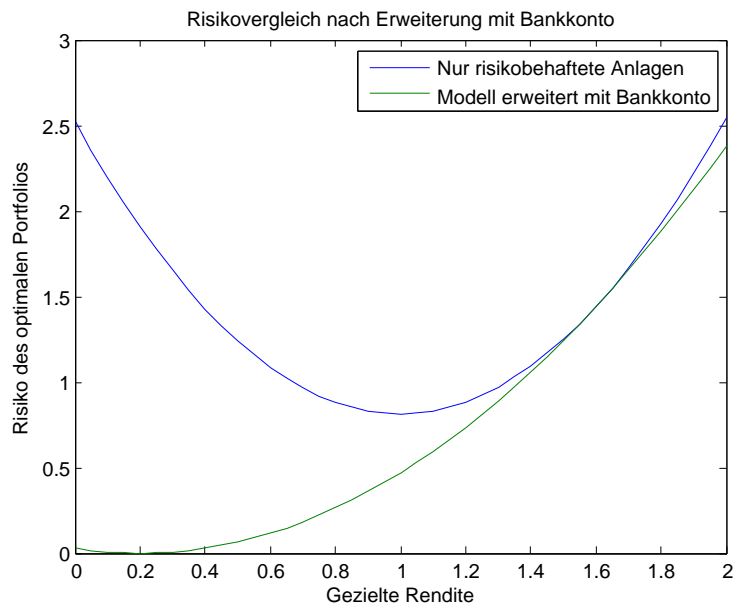
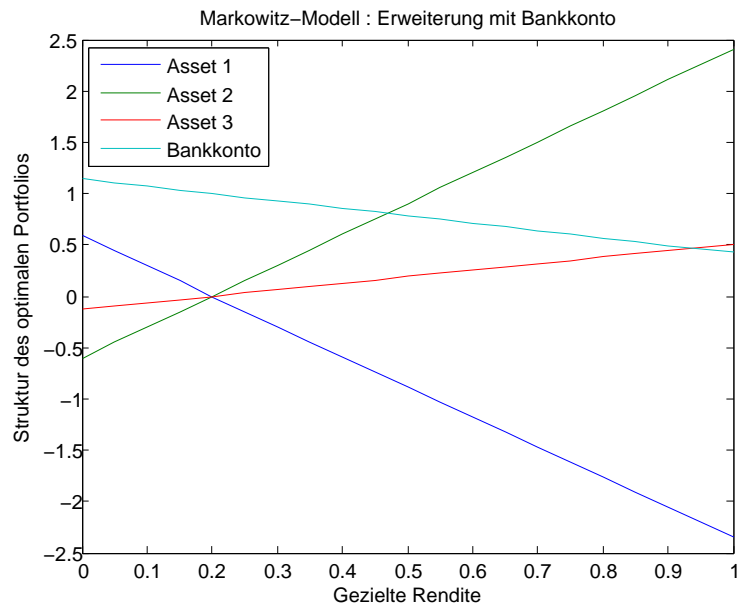
Die Returns sind absichtlich groß gewählt. In diesem Falle gilt

$$\alpha = 1.2281, \quad \beta = 1.2242, \quad \gamma = 1.8009, \quad \delta = 0.7129.$$

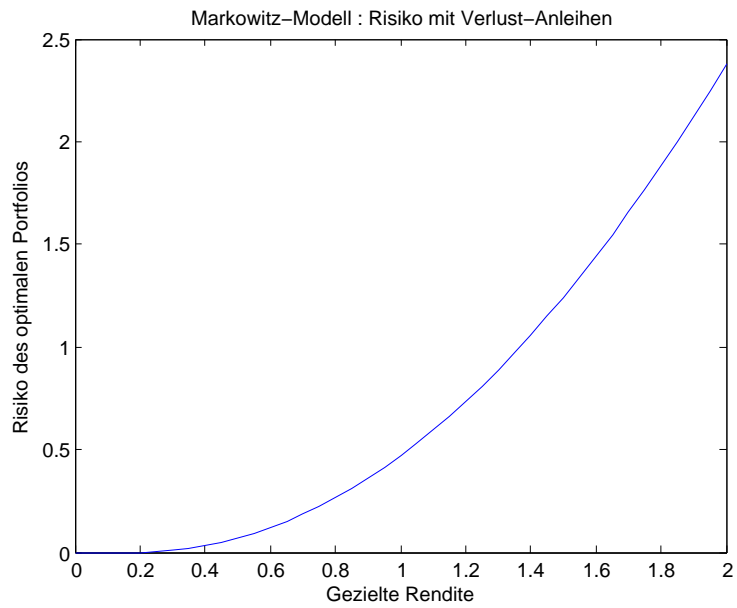
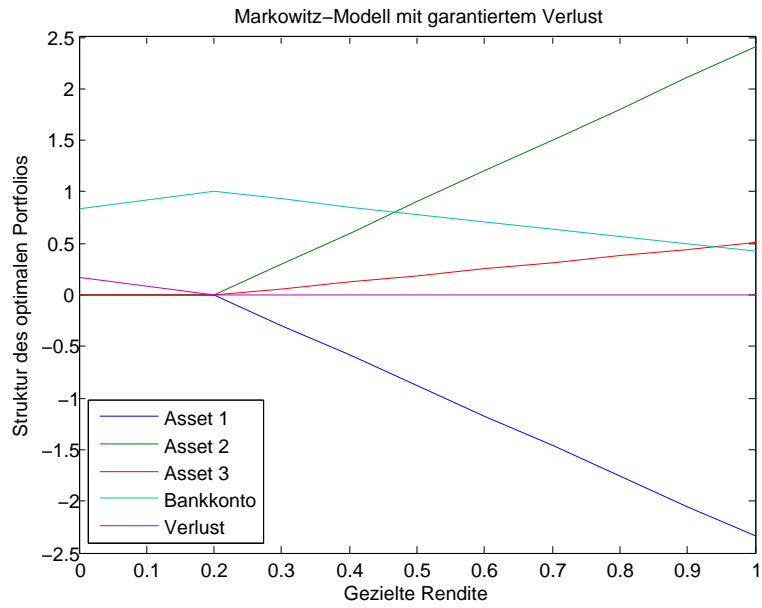
- Nur risikobehaftete Anlagemöglichkeiten



- Risikobehaftete Anlagemöglichkeiten und Bankkonto



- Risikobehaftete Anlagemöglichkeiten, Bankkonto und Verlust-Anleihen



3 CAPM

Bei unseren Betrachtungen des Markowitz-Modells haben wir die Veranlagungstätigkeit im Kontext eines ökonomischen Systems, das als gegeben vorausgesetzt wurde, studiert. Es stellt sich die Frage, wie die (eventuell homogenen) Entscheidungen von den einzelnen Investoren den Markt in seiner Gänze beeinflussen. Das CAPM bestimmt theoretische Gleichgewichtskurse, die sich einstellen, wenn risikoaverse Marktteilnehmer entsprechend der Markowitz-Portfoliotheorie effiziente Portfolios zusammenstellen. Dieses Modell wurde von William Sharpe, John Lintner und Jan Mossin in den Sechziger Jahren unabhängig voneinander entwickelt.

3.1 Two-fund Separation Theorem

Wir haben gezeigt, dass (4) die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \Sigma^{-1}(r - r^c e) \\ 1 - \mu(\beta - r^c \alpha) \end{pmatrix}, \quad \mu := \frac{\rho - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}.$$

besitzt; μ ist offensichtlich eine affine Funktion in ρ , also sind x und x^c affin in ρ . Dies motiviert der folgende

Satz 3.1 (*Two-fund Separation Theorem*) Sei $\rho \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest und bezeichne $\mathcal{L}(\rho)$ das optimale Portfolio aus

$$\min_{x, x^c} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} = \min_x \frac{1}{2} x^T \Sigma x$$

$$\text{sodass} \quad e^T x + x^c = 1,$$

$$r^T x + r^c x^c = \rho.$$

Sind $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \neq \rho_2$, so existiert ein eindeutiges $\theta \in \mathbb{R}$, sodass $\rho = \theta \rho_1 + (1 - \theta) \rho_2$. Es gilt

$$\mathcal{L}(\rho) = \theta \mathcal{L}(\rho_1) + (1 - \theta) \mathcal{L}(\rho_2).$$

Beweis Klarerweise ist $\theta = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$. Es gilt

$$\mu = \frac{\rho - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma} = \theta \underbrace{\frac{\rho_1 - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}}_{\mu_1} + (1 - \theta) \underbrace{\frac{\rho_2 - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}}_{\mu_2}.$$

Daher

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\rho) &= \left(\frac{(\theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2)\Sigma^{-1}(r - r^c e)}{1 - (\theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2)(\beta - r^c \alpha)} \right) = \\
&= \theta \left(\frac{\mu_1 \Sigma^{-1}(r - r^c e)}{(1 - \mu_1)(\beta - r^c \alpha)} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{\mu_2 \Sigma^{-1}(r - r^c e)}{(1 - \mu_2)(\beta - r^c \alpha)} \right) = \\
&= \theta \mathcal{L}(\rho_1) + (1 - \theta) \mathcal{L}(\rho_2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Kennen wir also die optimalen Portfolios $\mathcal{L}(\rho_1)$, $\mathcal{L}(\rho_2)$ zu zwei verschiedenen Gewinnen, so können wir das optimale Portfolio zu einem *beliebigen* Gewinn ρ bestimmen.

3.2 Herleitung des CAPM

Neben den Annahmen (A1) und (A3) setzen wir in diesem Abschnitt weiters voraus, dass die Investoren eine Entscheidung über die zu erwartende Rendite treffen, und im Anschluss stets das zugehörige optimale Portfolio nach dem Markowitz-Modell auswählen. Darüber hinaus beschränken wir uns auf dem Fall, wo alle Investoren mit dem Anfangskapital 1 starten und dieses dann vollständig veranlagen.

Definition 3.2 (*Market Portfolio*) Der Markt-Portfoliovektor \mathcal{M} ist die Summe aus allen einzelnen Portfoliovektoren im Marktmodell.

Gemäß dieser Definition ist $\mathcal{M}^T(\mathbf{r}, r^c)$ die absolute Markt-Rendite. Sei jetzt ρ_i die gezielte Rendite des i -ten Investors, wobei $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ und N die Anzahl der Anleger ist. Er wählt also nach obiger Annahme das Portfolio $\mathcal{L}(\rho_i)$ aus. Gilt $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N$, so ist $\mathcal{M} = N\mathcal{L}(\rho_1)$. Im Falle, dass sich zwei Investoren (o.B.d.A der 1. und 2.) verschiedene Ziele gesetzt haben, so können wir die restlichen geplanten Renditen als Konvexkombinationen mit bestimmten Koeffizienten von diesen schreiben:

$$\forall i \in \{3, 4, \dots, N\} \exists \theta_i \in \mathbb{R} : \rho_i = \theta_i \rho_1 + (1 - \theta_i) \rho_2.$$

Nach dem vorigen Abschnitt gilt daher $\mathcal{L}(\rho_i) = \theta_i \mathcal{L}(\rho_1) + (1 - \theta_i) \mathcal{L}(\rho_2)$, $3 \leq i \leq N$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{i=1}^N \mathcal{L}(\rho_i) = \\ &= \left(1 + \sum_{i=3}^N \theta_i\right) \mathcal{L}(\rho_1) + \left(N - 1 - \sum_{i=3}^N \theta_i\right) \mathcal{L}(\rho_2) = \\ &= N \left(\frac{1 + \sum_{i=3}^N \theta_i}{N} \mathcal{L}(\rho_1) + \frac{N - 1 - \sum_{i=3}^N \theta_i}{N} \mathcal{L}(\rho_2) \right). \end{aligned}$$

Da jetzt in den Klammern eine Konvexkombination steht, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= N \mathcal{L} \left(\frac{1 + \sum_{i=3}^N \theta_i}{N} \rho_1 + \frac{N - 1 - \sum_{i=3}^N \theta_i}{N} \rho_2 \right) = \\ &= N \mathcal{L} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i \right). \end{aligned}$$

Mit $\bar{\rho} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i$ ist damit $\mathcal{M} = N \mathcal{L}(\bar{\rho})$. Diese Formel bleibt richtig auch wenn $\{\rho_i\}_{i=1}^N$ alle gleich sind. \mathcal{M} ist das Vielfache eines optimalen Portfolios, welches wir bereits studiert haben. Genauer hat es die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} := N \mathcal{L}(\bar{\rho}) = N \begin{pmatrix} \bar{\mu} \Sigma^{-1} (r - r^c e) \\ 1 - \bar{\mu} (\beta - r^c \alpha) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu} := \frac{\bar{\rho} - r^c}{(r^c)^2 \alpha - 2r^c \beta + \gamma}.$$

Unter der realistischen Annahme, dass die Nachfrage und das Angebot an risikolose Anlagemöglichkeiten im Gleichgewicht sein sollen, bekommt man sofort die Bedingung

$$\bar{\rho} = r^c + \frac{\alpha (r^c)^2 - 2\beta r^c + \gamma}{\beta - r^c \alpha}, \quad \beta \neq r^c \alpha. \quad (6)$$

Diese Annahme treffen wir im Folgenden. Die absolute Markt-Rendite ist gegeben durch die Zufallsvariable

$$\mathbf{r}^M = N \left(\bar{\mu} \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} (r - r^c e) + (1 - \bar{\mu} (\beta - r^c \alpha)) r^c \right),$$

wobei die risikolose Komponente nach obiger Vermutung wegfällt. Ein Ziel des CAPM ist wie bereits erwähnt, die Abhängigkeit eines einzelnen risikobehafteten Asset von dem ganzen Markt-Modell, also von dem Markt-Portfolio, zu quantifizieren. Wir betrachten dazu für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Kovarianzen

$$\text{Cov}(\mathbf{r}^M, \mathbf{r}_i) = \text{Cov}(\mathbf{r}^M, e_i^T \mathbf{r}),$$

wobei e_i der i -te Einheitsvektor des \mathbb{R}^n ist. Mit

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}^{\mathcal{M}}) = N\bar{\mu}r^T\Sigma^{-1}(r - r^ce), \quad \mathbb{E}(e_i^T\mathbf{r}) = e_i^Tr$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{r}^{\mathcal{M}}, e_i^T\mathbf{r}) &= N\mathbb{E}\left[(\mathbf{r} - r)^T\bar{\mu}\Sigma^{-1}(r - r^ce)(\mathbf{r} - r)^T e_i\right] = \\ &= N\mathbb{E}\left[\bar{\mu}(r^T - r^ce^T)\Sigma^{-1}(\mathbf{r} - r)(\mathbf{r} - r)^T e_i\right] = \\ &= N\bar{\mu}(r^T - r^ce^T)\Sigma^{-1}\Sigma e_i = \\ &= N\bar{\mu}(r_i - r^c) \underbrace{\quad}_{(6)} \frac{N(r_i - r^c)}{\beta - \alpha r^c}. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.7 und unter obiger Annahme erhält man

$$\bar{\rho} - r^c = (\beta - \alpha r^c)R_{\min}(\bar{\rho}).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Aussage des CAPM:

$$\boxed{r_i - r^c = \frac{\text{Cov}(\mathbf{r}^{\mathcal{M}}, \mathbf{r}_i)}{NR_{\min}(\bar{\rho})}(\bar{\rho} - r^c).}$$

Literatur

- [1] Marc C. Steinbach **Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis**. 2001 Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] <http://de.wikipedia.org/wiki/CAPM> (Version vom 29.11.2009.)