Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

AUSSCHEIDEORDNUNGEN IN DER LEBENSVERSICHERUNGSMATHEMATIK

Karin ZIMMERMANN

TU Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese Seminararbeit basiert größtenteils auf dem Buch „Mathematische Methoden der Personenversicherung“ von Milbrodt und Helbig sowie auf den Mitschriften der Vorlesungen „Lebensversicherungsmathematik WS 08“ und „Personenversicherungsmathematik SS 09“ von Professor Kainhofer. Eine genaue Auflistung der verwendeten Literatur befindet sich am Ende der Arbeit.

2 Einleitung

Neben den vielen verschiedenen Teilen aus denen sich der Preis eines Versicherungsproduktes zusammensetzt, ist besonders bedeutend die Modellierung und Analyse des biometrischen Risikos. Zeitpunkt und Ursache des Todes sind nicht vorhersehbar, also rein zufällig, wodurch die Methoden der Stochastik auch in die Berechnungen der Versicherung Einzug halten. So werden die verschiedenen Risiken wie verbleibende Lebensdauer oder Ausscheideursache mit Zufallsvariablen modelliert.

Da es noch nicht gelungen ist in die Zukunft zu blicken, muss man die beobachteten und ausgewerteten Daten aus den vergangenen Volkszählungen für die Prognose der wahrscheinlich eintretenden Todeszeitpunkte heranziehen.

Im ersten Kapitel sollen die Grundbegriffe des Sterblichkeitskalküls unter Berücksichtigung eines einzigen Risikos, dem Todesfallrisikos, eingeführt werden. Des weiteren werden einige Vereinfachungen bei absoluter Stetigkeit der Verteilung in Bezug auf das eindimensionale Lebesgue-Maß vorgestellt.

Der zweite Abschnitt verallgemeinert die Aussagen des ersten auf zusammengesetzte Ausscheideordnungen, also verschiedene Ausscheideursachen. Dabei wird zwischen „abhängigen“ und „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten unterschieden.

Im dritten Kapitel wird das Erlöschen einer aus m unabhängigen Leben bestehenden Gruppe durch das Todesfallrisiko modelliert. Die dafür wichtige Schuette-Nesbitt-Formel und deren Beweis sowie die Folgerungen daraus werden angegeben.

Der anschließende Teil beschäftigt sich mit von Philosophen des 17. und 18. Jahrhunderts entwickelten Sterbegesetzen und einfachen Modellen, die auf bestimmten Annahmen basieren.

Das letzte Kapitel gibt schließlich einen kurzen Überblick über die verschiedenen Darstellungsarten von Sterbewahrscheinlichkeiten.

3 Ein unter einem Risiko stehendes Leben

Dieses Kapitel behandelt Personengesamtheiten, auch *Kollektiv* oder *Kohorte* genannt, die aufgrund einer einzigen Ausscheideursache abnehmen. Dabei wird das einzige Risiko als *Tod* bezeichnet.

3.1 Beschreibung der Lebensdauerverteilung

Um nun ein geeignetes Modell erstellen zu können, betrachtet man den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Mit der Zufallsvariable $T_x \geq 0$ werde die zukünftige Lebensdauer einer Person im Alter x im Kollektiv bezeichnet. Der Todeszeitpunkt ist also $x + T_x$.

Die Lebensdauerverteilung $\mathfrak{L}(T_x|P)$ von T_x unter P soll im Folgenden genauer studiert werden. Es gibt verschiedene Funktionen die sie beschreiben:

$$\textit{Verteilungsfunktion} \qquad \begin{aligned} F_x\colon [0,\infty) &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto P(T_x \leq t) \end{aligned}$$

Definition 3.1.1. *Die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, in Zeichen* ${}_tq_x$, *ist definiert durch die Verteilungsfunktion* F_x, *also* ${}_tq_x = F_x(t)$.

$$\textit{Überlebensfunktion} \qquad \begin{aligned} S_x\colon [0,\infty) &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto P(T_x > t) \end{aligned}$$

Definition 3.1.2. *Die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, in Zeichen* ${}_tp_x$, *ist definiert durch die Überlebensfunktion* S_x, *also* ${}_tp_x = S_x(t) = 1 - F_x(t)$.

$$\textit{Sterbeintensität} \qquad \begin{aligned} \Lambda_x\colon [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ t &\longmapsto \int\limits_{[0,t]} \frac{1}{1 - F_x(\cdot - 0)} dF_x \end{aligned}$$

Definition 3.1.3. *Die Sterblichkeitsintensität eines x-Jährigen im Alter x+t ist definiert durch* $\Delta\Lambda_x = \dfrac{\Delta F_x}{1 - F_x(\cdot - 0)}$.

Unter der Sterblichkeitsintensität versteht man die mittlere Sterbewahrscheinlichkeit im Zeitintervall $(t, t + \Delta]$, wobei Δ gegen Null strebt, also die Momentansterblichkeit.

Wegen $F^{-1}(1) = \Lambda_x^{-1}(\Lambda_x(\infty))$ und

$$F_x(t) = \int_{[0,t]} (1 - F_x(\cdot - 0))d\Lambda_x, \qquad t \geq 0$$

sowie

$$\Delta\Lambda_x = \frac{\Delta F_x}{1 - F_x(\cdot - 0)} \leq 1$$

erhält man als explizite Darstellung der Überlebensfunktion die Exponentialformel

$$S_x(t) = \exp(-\Lambda_x^{(c)}(t)) \cdot \prod_{0 \leq \tau \leq t} (1 - \Delta\Lambda_x(\tau)), \qquad t \geq 0$$

Durch Λ_x sind F_x und S_x eindeutig bestimmt.

3.2 Existenz einer Lebesgue-Dichte und die Konsequenzen

Satz 3.2.1. *Ist* $\mathfrak{L}(T_x) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0,\infty))}$, *also absolut stetig in Bezug auf das eindimensionale Lebesgue-Maß, so existiert eine Lebesgue-Dichte* $f_x(t) = F_x'(t)$, *mit deren Hilfe die Verteilung folgendermaßen beschrieben werden kann:*

$$\int_s^t f_x(\tau)d\tau =: {}_{s|t-s}q_x$$

Beweis 1 Aus der Maßtheorie gilt für absolut stetige Maße, dass eine Lebesgue-Dichte existiert. Durch Nachrechnen von $\int_s^t f_x(\tau)d\tau = F_x(t) - F_x(s) = P(s < T_x \leq t) = {}_{s|t-s}q_x$ zeigt sich die Richtigkeit der Behauptung.

□

Die Ausscheideintensität (Sterblichkeitsintensität) kann man nun schreiben als

$$\lambda_x := \frac{f_x}{S_x}$$

Der verallgemeinerte Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht die Darstellung

$$\lambda_x(t) = \frac{d}{dt}\Lambda_x(t)$$

und weiter

$$\lambda_x(t) = -\frac{d}{dt}\log S_x(t) = -\frac{d}{dt} log\ {}_tp_x$$

Nun kann auch die Überlebensfunktion als einfache Exponentialformel geschrieben werden:

$$S_x(t) = \exp(-\int_0^t \lambda_x(\tau)d\tau) = {}_tp_x$$

Mit den nun eingeführten Beschreibungen der Lebensdauerverteilung können eine Reihe interessanter Größen berechnet werden, so zum Beispiel:

- rechnerisches Höchstalter: $med(T_x) := F_x^{-1}(\frac{1}{2})$
- zukünftige Lebenserwartung: $\mathring{e}_x := \mathbb{E}(T_x) = \int_0^\infty S_x(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt$
- relative Momentansterblichkeit: $${}_\Delta q_{x+t} = \frac{P(t < T_x < t + \Delta)}{P(T_x > t)} = \frac{\int_t^{t+\Delta} f_x(s)ds}{{}_tp_x} \overset{\Delta klein}{\approx} \lambda_x(t)$$

3.3 Stationaritätsbedingung

In vielen Büchern zur Lebensversicherungsmathematik wird eine wichtige Bedingung zwar nie explizit erwähnt, die daraus resultierenden Konsequenzen aber verwendet. Es handelt sich dabei um die *Stationaritätsbedingung*. Sie beschreibt eine Verträglichkeitsbeziehung zwischen den Verteilungen der zukünftigen Lebensdauern und den verschiedenen Lebensaltern.

Für die Überlebensverteilung eines s-Jährigen wird neben der Verteilung der Lebensdauer eines Neugeborenen einzig die Zusatzinformation berücksichtigt, dass mittlerweile das Alter s erreicht wurde.

$$P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t | T_x > s) \qquad s, t, x \geq 0$$

Erfüllt ein System $\mathfrak{L}(T_x|P)$ die Stationaritätsbedingung, so heißt es *einfache Ausscheideordnung.*

Einige daraus folgende Resultate:

- Vereinfachungen beim Rechnen:

$$\begin{aligned} {}_{s+t}p_x &= P(T_x > s)P(T_x > s + t|T_x > s) \\ &= {}_sp_x \; {}_tp_{x+s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{s+t}q_x - {}_sq_x &= P(s < T_x \leq s + t) \\ &= {}_sp_x \; {}_tq_{x+s} \end{aligned}$$

- rechnerisches Höchstalter: $\exists\ \omega_0 \in [0, \infty) \qquad P(T_x > 0) = \begin{cases} 1, & x < \omega_0 \\ 0, & x \geq \omega_0 \end{cases}$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Die Stationaritätsbedingung

(b) Für das rechnerische Höchstalter

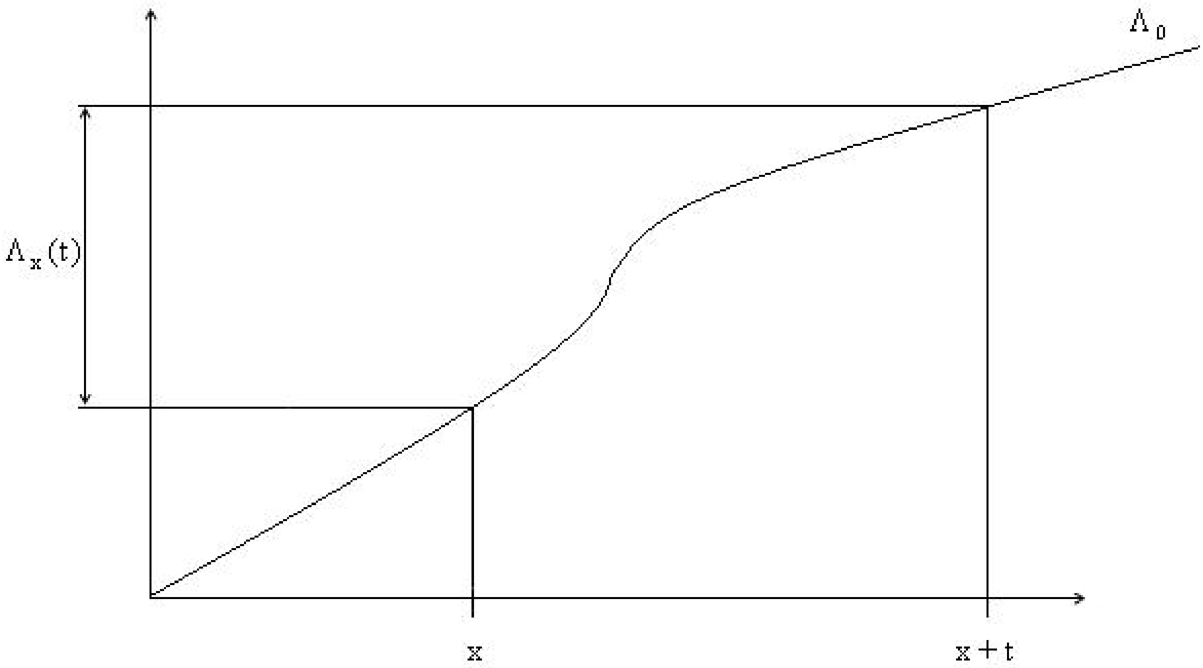
$$\omega_x = \begin{cases} \omega_0, & x < \omega_0 \\ x, & x \geq \omega_0 \end{cases}$$

(c) Für die Ausscheideintensitäten gilt

$$\Lambda_x(t) = \Lambda_0(x + t) - \Lambda_0(x), \qquad x + t \leq \omega_0,\ x < \omega_0$$

Aussage (b) besagt, dass das rechnerische Höchstalter ω_0 unabhängig vom Eingangsalter x ist und dass nach Überschreiten des Höchstalters unmittelbar der Tod eintritt.

Aussage (c) besagt, dass eine Ausscheideintensität Λ_0 existiert, aus deren Zuwächsen sich die Ausscheideintensitäten für verschiedene Lebensalter errechnen.



Die Abbildung veranschaulicht die Vorgehensweise zur Berechnung einer beliebigen Ausscheideintensität eines x-Jährigen. Zu den Zeitpunkten x und $x+t$ werden die Werte der ausgezeichneten Ausscheideintensität Λ_0 abgelesen. Bildet man daraus die Differenz, so erhält man den Wert der Ausscheideintensität Λ_x zum Zeitpunkt t

4 Ein unter konkurrierenden Risiken stehendes Leben

In diesem Kapitel werden Personengesamtheiten untersucht, deren Abnehmen auf mehrere Ursachen $j \in \{1, \ldots, m\} =: U$ zurückzuführen ist. Es wird also ein unter m konkurrierenden Risiken stehendes Leben beobachtet.
Einige Beispiele sollen den zugrundeliegenden Fall veranschaulichen:

1. Kollektiv Berufstätiger
   j=1 Ausscheiden durch Stornierung
   j=2 Ausscheiden durch Invalidisierung
   j=3 Ausscheiden durch Tod als Aktiver
   j=4 Ausscheiden durch Pensionierung

2. Kollektiv Lebender
   j=1 Ausscheiden durch Unfalltod
   j=2 Ausscheiden aus anderen Ursachen

3. Kollektiv ohne Pockenvorerkrankung
   j=1 Ausscheiden durch Pockenerkrankung
   j=2 Ausscheiden durch Tod ohne Pockenvorerkrankung

Anhand der Untersuchungen der Pockenkrankheit entstand vermutlich das erste Modell mit konkurrierenden Risiken. Vor allem Daniel Bernoulli (1700-1782) versuchte die Auswirkungen einer Elimination der Pockenkrankheit auf die Bevölkerungssterblichkeit zu beschreiben. In weiterer Folge entwickelten sich verschiedene Modelle, deren Entwicklung bei H. L. Seal und M. Gail nachzuschlagen ist.

Als Grundlage dient wieder der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, auf dem die Zufallsvariablen T_x, zukünftige Verweildauer des x-Jährigen, und $J_x \subset U$, die zutreffende Kombination von Ausscheidursachen, definiert sind.

4.1 Beschreibung der Verteilung mit „abhängigen Wahrscheinlichkeiten“

Satz 4.1.1. *Die gemeinsame Verteilung des Ausscheidemodells mit mehreren Ausscheideursachen $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ wird durch die Verteilung von J_x und die bedingte Verteilung von T_x gegeben J_x beschrieben. Sie ist gegeben durch die partiellen Verteilungsfunktionen,*

$$\begin{aligned} F_{x,C}\colon [0,\infty) &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto P(T_x \leq t, J_x = C) \end{aligned}$$

$$F_{x,C} = \mathfrak{L}(T_x | J_x = C) \cdot P(J_x = C)$$

die (abhängigen) partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten

$$ {}_tq_x{}^{(C)} := F_{x,C}(t) $$

oder die (abhängigen) partiellen Verbleibswahrscheinlichkeiten,

$$ {}_tp_x{}^{(C)} := 1 - {}_tq_x{}^{(C)} $$

wobei $t \geq 0,\ \emptyset \neq C \subset U$.

Die nicht ganz offensichtliche Bedeutung der *abhängigen Wahrscheinlichkeit* wird weiter unten erklärt.

Definition 4.1.1. *Die zu* (T_x, J_x) *gehörige Lebensdauerverteilung ist die Verteilung von* T_x *mit der Verteilungsfunktion*

$$ F_x := \sum_{\emptyset \neq C \subset U} F_{x,C} $$

Die totale t-jährige Ausscheide- und Verbleibswahrscheinlichkeit zum Modell ist gegeben durch

$$ {}_tq_x := F_x(t) = \sum_{\emptyset \neq C \subset U} {}_tq_x{}^{(C)} \qquad\qquad {}_tp_x := 1 - {}_tq_x $$

Definition 4.1.2. *Die kumulative partielle Ausscheideintensität, die das isolierte Wirken der einzelnen Ursachenkombinationen* $\emptyset \neq C \subset U$ *beschreibt, ist*

$$ \Lambda_{x,C} : \ \longmapsto \int\limits_{[0,t]} \frac{1}{1 - F_x(\cdot - 0)} dF_{x,C} $$

Satz 4.1.2. *Sei* $\mathfrak{L}(T_x) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0,\infty))}$ *mit Lebesgue-Dichte* f_x. *Dann kann das Ausscheidemodell beschrieben werden durch die Lebesgue-Dichten*

$$ \int_s^t f_{x,C}(\tau) d\tau = P(s < T_x \leq t, J_x = C) $$

bzw. durch die partiellen Ausscheideintensitäten

$$ \lambda_{x,C} := \frac{f_{x,C}}{1 - F_x} $$

Definition 4.1.3. *Eine Darstellung des Ausscheidemodells $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ mittels unabhängiger Ausfallszeiten ist ein System stochastisch unabhängiger $[0,\infty]$-wertiger Zufallsvariablen T_C, $\emptyset \neq C \subset U$, wobei für jede Kombination C von Ausscheideursachen T_C die alleinige Wirkung dieser Kombination innerhalb der Lebensspanne $\mathfrak{L}_x := \{t \in [0,\infty) | F_x(t-0) < 1\}$ beschrieben wird:*

$$\Lambda_{T_C}(t) = \Lambda_{x,C}(t), \qquad t \in \mathfrak{L}_x$$

4.2 Darstellungsmöglichkeit mittels „unabhängiger Wahrscheinlichkeiten“

Nach Eintreten mindestens einer Ausscheideursache können die Wirkungsweisen der anderen Ursachen nicht mehr beobachtet werden. Bildlich gesprochen bedeutet das, dass mit dem Eintreten der ersten Ausscheideursache eine Uhr gestoppt wird, von der dann die Todeszeit und die -ursachenkombination abgelesen werden können. Dazu betrachtet man den Satz von Karup-Loewy:

Satz 4.2.1 (Karup-Loewy)**.** *Sei $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ ein Ausscheidemodell mit m Ausscheideursachen und Lebensdauerspanne $\mathfrak{L}_x$.*
Dann gilt:

(a) Es existiert eine Darstellung von $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ mittels unabhängiger latenter Ausfallszeiten $T_C, \emptyset \neq C \subset U$.

(b) Die Verteilungsfunktion F_{T_C} von T_C ist auf $\mathfrak{L}_x$ eindeutig bestimmt:

$$1 - F_{T_C}(t) = exp(-\Lambda^{(c)}_{x,C}(t)) \cdot \prod_{\tau \leq t} (1 - \Delta\Lambda_{x,C}(\tau))$$

(c) Besitzen die partiellen Verteilungsfunktionen $F_{x,C}, \emptyset \neq C \subset U$, keine gemeinsamen Sprungstellen auf $\mathfrak{L}_x$ und T ist die zukünftige gemeinsame Verweildauer der „verbundenen Leben“ T_C, so liegen auf $\mathfrak{L}_x$ keine Bindungen der T_C vor, d.h. die „ausscheidende Person“ $J \in 2^U \backslash \emptyset$ ist P-f.s. wohldefiniert und für alle $\emptyset \neq C \subset U$ stimmen die Verteilungen von (T_x, J_x) und (T, J) überein.

(d) Im Lebesgue-stetigen Fall $\mathfrak{L}(T_x) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0,\infty))}$ können alle T_C Lebesgue-stetig auf $[0,\infty)$ gewählt werden. In diesem Fall heißt $T_C, \emptyset \neq C \subset U$ eine dominierte Darstellung von $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten. Für die Ausscheideintensitäten gilt

$$\lambda_{T_C} = \lambda_{x,C}$$

Interpretiert werden kann der Satz von Karup-Loewy folgendermaßen:

ad (a) Es gibt immer eine Darstellung des Ausscheidemodells mit Hilfe der latenten Ausfallzeiten.

ad (b) Die Verteilungsfunktionen sind eindeutig.

ad (c) Es gibt also keine Mehrfachübergänge. Es tritt immer nur eine Ursache zu einem Zeitpunkt ein. Und die Verteilung von (T_x, J_x) (Ausscheidemodell) und (T, J) (stoppende Lebensuhr = Auslöser) stimmen überein.

ad (d) Die Ausscheideintensitäten λ der latenten Ausfallzeiten stimmen mit denen im Ausscheidemodell überein.

Beweis 2 vgl. [M-H] S.78f

Durch die Forderung, dass die partiellen Verteilungsfunktionen keine gemeinsamen Sprungstellen besitzen, sind die „ausscheidenden Personen“ J identifizierbar.
Aus dem Satz von Karup-Loewy folgt:

Wenn $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ ein Ausscheidemodell mit m identifizierbaren Ausscheideursachen ist, d.h. $P(\#J_x = 1) = 1$, dann existieren stochastisch unabhängige numerische Zufallsvariablen $T_j \geq 0, j \in U$, sodass

$$\Lambda_{T_j}(t) = \Lambda_{x,\{j\}}(t), \qquad t \in \mathfrak{L}_x$$

Die Verteilungsfunktion F_{T_j} von T_j ist auf $\mathfrak{L}_x$ eindeutig bestimmt:

$$1 - F_{T_j}(t) = \exp(-\Lambda^{(c)}_{x,\{j\}}(t)) \cdot \textstyle\prod_{\tau \leq t} (1 - \Delta\Lambda_{x,\{j\}}(\tau))$$

Im Lebesgue-stetigen Fall können alle T_j Lebesgue-stetig auf $[0, \infty)$ gewählt werden und für die Ausscheideintensitäten gilt

$$\lambda_{T_j} = \lambda_{x,\{j\}} \qquad \textit{f.ü. auf } \mathfrak{L}_x$$

Definition 4.2.1. *Sei $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ ein Ausscheidemodell mit mehreren Ausscheideursachen und $(T_C)_{\emptyset \neq C \subset U}$ eine Darstellung mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten. Dann heißen*

$${}^{u}_{t}p^{(C)}_{x} := 1 - {}^{u}_{t}q^{(C)}_{x} := P(T_C > t) = \exp\left(-\Lambda^{(C)}_{x,C}(t)\right) \cdot \prod_{\tau \leq t} (1 - \Delta\Lambda_{x,C}(\tau))$$

die unabhängigen partiellen Verbleibswahrscheinlichkeiten bzw. Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Der auf Karup zurückgehende Begriff „unabhängige Wahrscheinlichkeit" ist dadurch motiviert, dass ${}^{u}_{t}p_x^{(C)}, {}^{u}_{t}q_x^{(C)}$ nur von $\Lambda_{x,C}$ abhängig sind und nicht von den Ausscheideintensitäten zu anderen Ursachenkombinationen beeinflusst werden.

Der schon vorher erwähnte Begriff der „abhängigen Wahrscheinlichkeiten" hingegen erfüllt das nicht,

$$ {}_tq_x{}^{(C)} = \int_{[0,t]} \exp\left(-\Lambda_x^{(C)}(\tau)\right) \cdot \prod_{s<\tau} \left(1 - \Delta\Lambda_x(s)\right) \Lambda_{x,C}(d\tau) $$

ist also auch von den anderen Ursachenkombinationen abhängig.

5 Mehrere unter einem Risiko stehende Leben

Bei Versicherungen auf mehrere unter einem Risiko, dem Todesfallriskio, stehende Leben werden die zukünftigen Lebensdauern mit m *unabhängigen* Zufallsvariablen $T_{x_1}, \ldots, T_{x_m} \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ modelliert, wobei die Stationaritätsbedingung erfüllt ist. Die Unabhängigkeitsannahme bringt dabei viele technische Vereinfachungen, obwohl sie nicht ganz unproblematisch ist. Besonders bei Personen im höheren Alter wird die zukünftige Lebensdauer eines Lebenspartners vom Tod des anderen beeinflusst, diese etwaigen Abhängigkeiten werden aber vernachlässigt.
Dafür betrachtet man einen Zustand $u = x_1 : x_2 : ... : x_m$, der je nach Art der Versicherung unterschiedlich lange intakt ist. Dieses Kapitel soll nun einige solcher Zustände untersuchen.

5.1 Gruppenerlöschung beim ersten Ausscheiden

Hierbei ist die Gruppe aktiv, solange alle m Personen am Leben sind, oder anders formuliert, solange bis die erste Person stirbt. Der Zustand $u = x_1 : x_2 : ... : x_m$ erlischt also nach dem ersten Tod. Auf Englisch heißt dieser Zustand „joint life status“, d.h. Zustand der verbundenen Leben.

Die *zukünftige gemeinsame Lebensdauer* der Gruppenmitglieder ist

$$T_{x_1 \ldots x_m} := \bigwedge_{i=1}^{m} T_{x_i} = \text{Minimum}(T_1, T_2, ..., T_m)$$

Für die *t-jährige gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit* gilt

$${}_t p_{x_1 \ldots x_m} := P(T_{x_1 \ldots x_m} > t) = \prod_{i=1}^{m} P(T_{x_i} > t) = \prod_{i=1}^{m} {}_t p_{x_i}$$

und für die *t-jährige Ausscheidewahrscheinlichkeit*

$${}_t q_{x_1 \ldots x_m} := F_{x_1 \ldots x_m} = 1 - {}_t p_{x_1 \ldots x_m} = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - {}_t q_{x_i})$$

wobei die Verteilungsfunktion der zukünftigen gemeinsamen Lebensdauer gegeben ist durch

$$F_{x_1 \ldots x_m} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}} F_{x_{i_1}}(t) \ldots F_{x_{i_k}}(t)$$

Die *kumulative gemeinsame Ausscheideintensität* ist definiert durch

$$\Lambda_{x_1 \ldots x_m}(t) := \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F_{x_1 \ldots x_m}(\cdot - 0)} dF_{x_1 \ldots x_m}$$

Im Fall $\mathfrak{L}(T_{x_i}) \ll \lambda|_{\mathfrak{B}([0,\infty))}$, $i = 1, \ldots, m$ gilt für die *gemeinsame Ausscheideintensität*

$$\lambda_{x_1 \ldots x_m}(t) := \frac{f_{x_1 \ldots x_m}(t)}{1 - F_{x_1 \ldots x_m}(t)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{x_i}(t) \qquad \lambda\text{-f.ü.}$$

5.2 Vereinfachungen beim Zustand der verbundenen Leben

Vereinfachungen ergeben sich unter Verwendung analytischer Sterbegesetze.

Wenn man annimmt, dass die m Leben das **Gompertz'sche Sterbegesetz** (vgl. Kapitel 6)

$$\mu_{x_k+t} = Bc^{x_k+t} \qquad t \geq 0,\ k = 1, ..., m$$

erfüllen, so erhält man für den Zustand $u = x_1 : x_2 : ... : x_m$

$$\begin{aligned}
\mu_{u+t} &= \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t} = \sum_{k=1}^{m} Bc^{x_k+t} \\
&= \sum_{k=1}^{m} Bc^{x_k} \cdot c^t = B \cdot c^t \sum_{k=1}^{m} c^{x_k} \\
&= B \cdot c^t \cdot c^w
\end{aligned}$$

also ein Leben mit technischem Alter w, definiert durch $c^w = \sum_{k=1}^{m} c^{x_k}$.

Wenn man annimmt, dass die m Leben dem **Makeham-Gompertz-Sterbegesetz**

$$\mu_{x_k+t} = A + Bc^{x_k+t} \qquad t \geq 0,\ k = 1, ..., m$$

folgen, so erhält man für den Zustand $u = x_1 : x_2 : ... : x_m$

$$\begin{aligned}
\mu_{u+t} &= \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t} = \sum_{k=1}^{m} A + Bc^{x_k+t} \\
&= m \cdot A + B \cdot c^t \cdot \sum_{k=1}^{m} c^{x_k} = m \cdot A + B \cdot c^t \cdot m \cdot c^{\tilde{w}} \\
&= m \cdot (A + Bc^{\tilde{w}+t})
\end{aligned}$$

Es gilt also $c^{x_1} + c^{x_2} + ... + c^{x_m} = m \cdot c^{\tilde{w}}$. Das heißt, die m Leben mit unterschiedlichem Alter werden durch m Leben mit gleichem Alter $\tilde{w}$ ersetzt. Das Alter $\tilde{w}$ kann als Mittelwert der Alter $x_1, ..., x_m$ gesehen werden.

Diese Vereinfachungen haben aber heutzutage keinerlei Relevanz in der Praxis, da die exakte Berechnung durch den Computer keine Probleme mehr bereitet.

5.3 Gruppenerlöschung in Abhängigkeit der Anzahl der Lebenden

Sei $T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;l}$ die Überlebenszeit für mindestens l der m Individuen, also

$$T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;l} := T_{m-l+1:x_m}$$

die $(m-l+1)$-te Ordnungsstatistik der zukünftigen Lebensdauern.
Hingegen ist $T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;[l]}$ die Überlebenszeit dass genau l der Individuen die Zeit t überleben.

Man betrachtet die Wahrscheinlichkeiten, dass mindestens l der m unabhängigen Personen die Zeit $t \geq 0$ überleben

$${}_tp_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;l} := P(T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;l} > t)$$

und dass genau l der m u.a. Personen die Zeit t überleben

$${}_tp_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;[l]} := P(T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;l} > t, T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;\;l+1} \leq t)$$

Ein in diesem Zusammenhang wichtiger Satz ist

Satz 5.3.1 (Schuette-Nesbitt-Formel)**.** *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathfrak{A}$ und eine nur von der Anzahl der eingetretenen Ereignisse $N(\omega) := \#\{i | \omega \in A_i\}$ abhängige Zufallsvariable*

$$C = \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot \mathbb{1}_{\{N=i\}}$$

gegeben.

Dann gilt für $c := (c_0, \ldots, c_m)^T$, $S_0 := 1$

$$E(C) = \sum_{k=0}^{m} (\Delta^k c)_0 \cdot S_k$$

wobei $E(c_k) := c_{k+1}$ der „Backshiftoperator“ ist und

$$S_k := \sum_{\{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

und der „Differenzenoperator“

$$\Delta : \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^{m}$$

$$\Delta(c_0, \ldots, c_m)^T := (c_1 - c_0, \ldots, c_m - c_{m-1})^T$$

so definiert sind.

Setzt man nun $A_i := \{T_{x_i} > t\}$ in der Schuette-Nesbitt-Formel, so erhält man

$${}_tS_k := S_k = \sum_{\{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1,\ldots,m\}} {}_tp_{x_{i_1}} \cdots {}_tp_{x_{i_k}}$$

Beweis 3 Man definiere einen „Linksabschneider“ L und einen „Rechtsabschneider“ R

$$L, R : \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^{m}$$

wobei der „Linksabscheider“

$$L(c_0, ..., c_m) := (c_1, ...c_m)^T$$

und der „Rechtsabschneider“

$$R(c_0, ..., c_m) := (c_0, ...c_{m-1})^T$$

erfüllen.
Dann gilt für den Differenzenoperator $\Delta = L - R$.
Eingesetzt in C folgt daraus

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot \mathbb{1}_{\{N=i\}} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \mathbb{1}_{\{N=i\}} (R^{m-i} \circ L^i)(c) \\
&= (\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_1} R + \mathbb{1}_{A_1} L) \circ \cdots \circ (\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_m} R + \mathbb{1}_{A_m} L)(c) \\
&= (R + \mathbb{1}_{A_1} \Delta) \circ \cdots \circ (R + \mathbb{1}_{A_m} \Delta)(c) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1,\ldots,m\}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}} \cdot (\Delta^k c)_0
\end{aligned}$$

Bildet man nun den Erwartungswert von C so erhält man die behauptete Formel.

$\square$

Sei

$$C = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \mathbb{1}_{\{N=i\}}$$

eine Zufallsvariable, welche nur von der Anzahl N der nach t Jahren noch Lebenden abhängig ist, so gilt

$$E(C) = \sum_{k=0}^{m} (\Delta^k c)_0 \ {}_tS_k$$

Setzt man nun $c := c^{[l]} := (\delta_{lj})_{j=0,\dots,m}$ und

$$(\Delta^k c^{[l]})_0 = \begin{cases} 0, & k < l \\ (-1)^{k-l}\binom{k}{l}, & l \le k \le m \end{cases}$$

so erhält man die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} {}_tp^{[l]}_{\overline{x_1 \dots x_m}} &:= P(T_{\overline{x_1 \dots x_m}}^{\ l} > t, T_{\overline{x_1 \dots x_m}}^{\ l+1} \le t) \\ &= \sum_{k=l}^{m} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \cdot {}_tS_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^{k} \binom{k+l}{l} \cdot {}_tS_{k+l} \end{aligned}$$

Sei nun $C = \sum_{i=0}^{m} d_i \cdot \mathbb{1}_{\{N \ge 1\}}$ eine andere Darstellung, dann folgt

$$C = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{j} d_i \right) \cdot \mathbb{1}_{\{N=j\}}$$

und

$$E(C) = d_0 \ {}_tS_0 + \sum_{k=1}^{m} (\Delta^{k-1} d)_1 \ {}_tS_k$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
(\Delta^{k-1} c^{[l]})_1 &= (\Delta^k c^{[l]})_0 + (\Delta^{k-1} c^{[l]})_0 \\
&= (-1)^{k-l} \binom{k}{l} + (-1)^{k-l-1} \binom{k-1}{l} \\
&= (-1)^{k-l} \binom{k-1}{l-1} \\
&= (-1)^{k-l} \binom{k-1}{k-l} \qquad \text{für } l < k \leq m
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(\Delta^{l-1} c^{[l]})_1 &= (\Delta^l c^{[l]})_0 + (\Delta^{l-1} c^{[l]})_0 \\
&= (-1)^{l-l} \binom{l-1}{l-1}
\end{aligned}
$$

und

$$
(\Delta^{k-1} c^{[l]})_1 = 0 \qquad \text{für } k < l,
$$

erhält man mit $d := c^{[l]}$

$$
\begin{aligned}
{}_t p_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;l} &:= P(T_{\overline{x_1 \ldots x_m}}^{\;l} > t) \\
&= \sum_{k=l}^{m} (-1)^{k-l} \binom{k-1}{k-l} \cdot {}_t S_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^k \binom{k+l-1}{k} \cdot {}_t S_{k+l}
\end{aligned}
$$

5.4 Gruppenerlöschung beim letzten Ausscheiden

Dabei handelt es sich um einen Spezialfall des vorherigen Kapitels.
Man unterscheidet auch hier zwischen den Zuständen, dass genau eine Person oder mindestens eine Person am Leben ist.

Der Zustand $u = \overline{x_1 : x_2 : ... : x_m}$ ist aktiv, solange mindestens eine Person am Leben ist, also

$$T(u) = \bigvee_{i=1}^{m} T_i = \text{Maximum}(T_1, ..., T_m)$$

Die englische Bezeichung dafür ist „last-survivor status“, d.h. Zustand des letzten Lebens.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person am Leben ist (vgl. vorher $l = 1$):

$${}_tp_{\overline{x_1 ... x_m}} := {}_tp_{\overline{x_1 ... x_m}}^{\;\;1} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \cdot {}_tS_k$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Person am Leben ist (vgl. vorher $[l] = 1$):

$${}_tp_{\overline{x_1 ... x_m}}^{\;\;[1]} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} k \cdot {}_tS_k$$

6 Diskretisierung: Ganzzahlig gestutzte zukünftige Verweildauer

In diesem Kapitel sei die zukünftige Verweildauer T_x als strikt positiv vorausgesetzt.

Definition 6.0.1. *Es bezeichne T_x die zukünftige Lebensdauer eines x-Jährigen. Dann ist $K_x := \lceil T_x \rceil - 1$ die ganzzahlig gestutzte zukünftige Verweildauer des x-Jährigen und $S_x := T_x - K_x$ die unterjährige Verweildauer.*

Satz 6.0.1. *Die zukünftige ganzzahlige Verweildauer kann als Summe $K_x = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{1}_{\{k<T_x \leq k+1\}}$ geschrieben werden.*

Satz 6.0.2. *Die beiden Modelle $\mathfrak{L}(T_x, J_x)$ und $\mathfrak{L}(K_x, S_x, J_x)$ sind äquivalent. Es gilt für $t \geq 0$, $\emptyset \neq C \subset U$:*

$$P(T_x \leq t, J_x = C) = P(K_x \leq [t] - 1, J_x = C) + P(K_x = [t], S_x \leq t - [t], J_x = C)$$

und für $k \in \mathbb{N}_0, s \in (0,1], \emptyset \neq C \subset U$

$$P(K_x = k, S_x \leq s, J_x = C) = P(k < T_x \leq k + s, J_x = C)$$

Satz 6.0.3. *Sei $q_{x+i}^{(C)}$ die einjährige abhängige partielle Sterbewahrscheinlichkeit und es gelte die Stationaritätsbedingung. Dann ergibt sich*

$$\begin{aligned}
P(K_x = k, J_x = C) &= P(k < T_x \leq k+1, J_x = c) \\
&= {}_kp_x \cdot q_{x+k}^{(C)} \\
&= \prod_{i=1}^{k} (1 - \sum_{\emptyset \neq B \subset U} q_{x+i-1}^{(B)}) \cdot q_{x+k}^{(C)}
\end{aligned}$$

für $x \in [0, \omega_0), k \in \mathbb{N}_0, \emptyset \neq C \subset U$. Die ganzzahlig gestutzte Restlebenserwartung ist dann

$$e_x := \mathbb{E}(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \prod_{i=1}^{k} (1 - q_{x+i-1}) q_{x+k}$$

Satz 6.0.4. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- *S_x und (K_x, J_x) sind stochastisch unabhängig und $R_x \sim U(0,1]$.*

- *Es gilt die lineare Interpolationsformel*

$$_{k+r}q_x^{(C)} =_k q_x^{(C)} + r \cdot ({}_{k+1}q_x^{(C)} -_k q_x^{(C)}), \qquad r \in (0,1], k \in \mathbb{N}_0, \emptyset \neq C \subset U$$

7 Sterbegesetze für die Gesamtbevölkerung

Die Philosophen des 17. und 18. Jahrhunderts waren davon überzeugt, dass sich auch für die menschliche Sterblichkeit einfache in Formeln beschreibbare Gesetze formulieren lassen müssten.
Hier eine Auflistung der bekanntesten Sterbegesetze:

De Moivre

De Moivre behauptete 1725 die Existenz eines Höchstalters ω, das er auf 86 Jahre setzte. Die zukünftige Verweildauer T_x nahm er gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \omega - x]$ an. Daraus folgt, dass die Dichte gegeben ist durch $g_x(t) = \dfrac{1}{\omega - x}$ für $t \in [0, \omega - x]$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= P(T_x > t) = \frac{\omega - x - t}{\omega - x} \\
\Lambda_x(t) &= -\log {}_tp_x = \log(\omega - x) - \log(\omega - x - t) \\
\lambda_x(t) &= \frac{d}{dt}\Lambda_x(t) = \frac{1}{\omega - x - t}
\end{aligned}
$$

Gompertz

Gompertz setzte für sein Modell einen exponentiellen Anstieg der Sterblichkeitsintensität voraus.
Unter der Stationaritätsbedingung folgt für alle $t \geq 0,\ x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_x(t) &= B \cdot c^{x+t} \qquad\qquad \text{mit Parametern } B > 0,\ c \geq 1 \\
\Lambda_x(t) &= \int_0^t \lambda_x(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{B}{\log c}(c^{x+t} - c^x), & c \neq 1 \\ B\ t, & c = 1 \end{cases} \\
{}_tp_x &= \begin{cases} \exp\left(\frac{B}{\log c}(c^x - c^{x+t}\right), & c \neq 1 \\ \exp(-Bt), & c = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Makeham

Makeham verallgemeinerte 1860 die Sterbegesetze von Gompertz, indem er exponentielles Wachstum der Sterblichkeitsintensität mit einem konstanten Anteil $A > 0$ forderte.
Unter der Stationaritätsbedingung heißt das für $t \geq 0,\ x \geq 0$

$$\lambda_x(t) = A + B \cdot c^{x+t}$$

$$\Lambda_x(t) = At + \frac{B}{\log c}(c^{x+t} - c^x)$$

$$_tp_x = \exp\left(-At + \frac{B}{\log c}(c^x - c^{x+t})\right)$$

Für $c = 1$ erhält man bei Gompertz und Makeham konstantes $\lambda_x(t)$, das heißt T_x hat eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\frac{1}{B}$. Diese "Gedächtnislosigkeit" ist aber unrealistisch für die menschliche Lebensdauer.
Bei Gompertz fällt der lineare Teil mit der Konstanten A weg.

Weibull

Der Physiker Weibull führte 1939 eine Verteilung ein, die duch folgende Ausfallsrate gegeben ist:

$$\lambda_0(s) = \frac{c}{\alpha^c} s^{c-1}$$

mit Parametern $\alpha > 0,\ c > 0$ und Variable $s \geq 0$.
In Abhängigkeit von c hat die Ausfallsrate unterschiedlichen Verlauf. Für $0 < c < 1$ ist sie hyperbolisch fallend, für $c = 1$ konstant, sublinear wachsend für $1 < c < 2$, linear wachsend für $c = 2$ und superlinear wachsend für $c > 2$. Sinnvoll für die menschliche Sterblichkeit ist dabei der Fall $c > 1$. Man erhält unter Berücksichtigung der Stabilitätsbedingung

$$\lambda_x(t) = \frac{c}{\alpha^c}(x + t)^{c-1}$$

$$\Lambda_x(t) = \int_0^t \lambda_x(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha^c}\left((x+t)^c - x^c\right)$$

$$_tp_x = \exp\left(\frac{1}{\alpha^c}(x^c - (x+t)^c)\right)$$

Gumbel

Zwischen der Gumbel-Verteilung und der Weibull-Verteilung besteht ein Zusammenhang. Die Gumbel-Verteilung gehört zur Klasse der Extremwertverteilungen und es gilt

$$\text{X ist } \textit{Gumbel-verteilt} \text{ mit Parametern } m \in \mathbb{R} \text{ und } c > 0 \\ \rightleftharpoons P(X \leq x) = \exp\left(-e^{-c(x-m)}\right)$$

Der Zusammenhang lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Satz 7.0.5. $T \sim Weibull(a, b) \Leftrightarrow -\log T \sim Gumbel(-\log a, b)$

Zu den Vorteilen der Sterbegesetze zählen die niedrige Anzahl an Paramtern, die durchaus akzeptable Genauigkeit bei wenigen Daten und deren Einsatz bei kurzen Altersbereichen. Dennoch ist die Diskrepanz zur Realität meistens zu groß, sodass die Verwendung von Sterbetafeln bevorzugt wird.

8 Sterbetafeln - Ausscheidewahrscheinlichkeiten als Rechnungsgrundlagen

In diesem Teil der Arbeit geht es um die quantitative Erfassung des Risikos.

Als Ausgangspunkt betrachtet man eine Personengesamtheit, die auf Grund der Ausscheideursache „Tod“ sowie weiterer aber hier nicht genauer berücksichtigten Ausscheideursachen wie Emigration abnehmen oder durch Immigration zunehmen kann. Die Sterblichkeit wird zum Beispiel durch qualitative und quantitative Risikomerkmale wie Geschlecht und Alter beeinflusst. Eine nach dem Geschlecht und dem Lebensalter gebildete Risikoklasse wird auch als *Kohorte* bezeichnet. Es sollen die unabhängigen einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten geschätzt werden.

8.1 Darstellungsarten der Schätzwerte

Die geschätzten Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden nomalerweise in Tabellen nach Geschlecht getrennt dargestellt. Man unterscheidet dabei zwischen

- **Periodentafeln**
  Sie enthalten Schätzungen für die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Person des Kollektivs, die innerhalb eines festen Zeitraumes das Alter x erreicht, im Laufe eines Jahres stirbt.
  Problem: die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten sind nicht zeitlich konstant, durch Verbesserung der medizinischen Versorgung und der sozialen Bedingungen
  $\Rightarrow Generationentafel$

- **Generationentafeln**
  Sie beschreiben die Absterbeordung fester Geburtsjahrgänge. Hier hängt der betrachtete Zeitraum in dem der Tod eines x-Jährigen möglicherweise eintritt von x ab. Für die Erstellung vollständiger Gererationensterbetafeln wäre das Absterben der gesamten Generation nötig, um aber vorher schon Aussagen treffen zu können, werden die gesuchten Sterbewahrscheinlichkeiten mittels geeigneter Extrapolationsverfahren aus den geschätzten Sterbewahrscheinlichkeiten früherer Geburtsjahrgänge ermittelt. Dabei ist zu erkennen, dass der „Trendfaktor“ λ_x ein negatives Vorzeichen aufweist, also die Sterblichkeit von Generation zu Generation sinkt und sich somit verringert.

- **Selektionstafeln**
  Bei diesen Tabellen werden neben Alter und Geschlecht noch weitere Risikomerkmale berücksichtigt. Es werden die Schätzwerte der Wahrscheinlichkeiten, dass ein x-Jähriger, der vor t Jahren dem zugrunde liegenden Selektionsprozess unterlag, innerhalb eines Jahres verstirbt, erfasst. Der Selektionseffekt nimmt mit der Zeit ab und die Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich nach Ende der Selektionsperiode r nicht mehr von denen der Periodensterbetafeln.

8.2 Vorgehen zur Erstellung von Sterbetafeln

Die beobachteten Daten werden nur durch die Risikomerkmale Alter und Geschlecht differenziert. Die Lebensalter seien aus der Menge $AB := \{x_0, x_0 + 1, \ldots, \omega\}$, wobei $x_0 = 0$ das Minimalalter und ω das Höchstalter, oft $\omega = 112$, ist. Betrachtet man die Sterbetafeln getrennt für Frauen und Männer, so wird zu jedem Alter $x \in AB$ ein Schätzwert für die unabhängige Wahrscheinlichkeit ${}^{u}q_x$ festgehalten, also dass eine Person des Kollektivs die x-Jahre alt ist innerhalb des nächsten Jahres, also bis zur Vollendung des (x+1)-ten Lebensjahres, stirbt. Das Alter ω ist dann das kleinste Alter mit unabhängiger Sterbewahrscheinlichkeit 1.
Zunächst werden also Sterbetafeln zweiter Ordnung für die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten erstellt und gegebenenfalls mit Hilfe statistischer Tests überprüft. Danach wird eine Generationentafel zweiter Ordnung erstellt, welche die Sterbewahrscheinlichkeiten in späteren Jahren enthält. Die Generationentafeln enthalten die Werte

$$\frac{{}_{k+1}q_{x-k} - {}_{k}\, q_{x-k}}{{}_{k}p_{x-k}}$$

also die Wahrscheinlichkeit eines in k Jahren x-Jährigen Mannes innerhalb eines Jahres zu sterben.
Mittels eines Modells wird dann der Trend bestimmt

$$\frac{{}_{k+2}q_{x-k-1} - {}_{k+1}\, q_{x-k-1}}{{}_{k+1}p_{x-k-1}} = \frac{{}_{k+1}q_{x-k} - {}_{k}\, q_{x-k}}{{}_{k}p_{x-k}} G(x,k)$$

Versicherungen führen ihre Berechnungen dann aber aufgrund von Sterbetafeln erster Ordnungen durch, es werden also noch Sicherheitszu/abschläge in die Wahrscheinlichkeiten miteinbezogen.
Zusätzlich werden noch eine Reihe von möglichen Fehlern berücksichtigt:

1. Statistische Fehler bei der Aufstellung der Sterbewahrscheinlichkeiten.
2. Fehler beim Trend.

Literaturverzeichnis

[M-H] H. MILBRODT and M. HELBIG. Mathematische Methoden der Personenversicherung. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1 edition, 1999.

[LVM] R. KAINHOFER. *Mitschrift zur Vorlesung: Lebensversicherungsmathematik.* 2008

[PVM] R. KAINHOFER. *Mitschrift zur Vorlesung: Personenversicherungsmathematik.* 2009