

Zinstheorie in der Versicherung

Seminararbeit

Zvonarich Marko

WS 2009/10

16.12.2010

Inhaltsverzeichnis

I)	Vorwort	2
II)	Bewertung mit Risikostreuung	2
	a) Das Gesetz der Großen Zahlen	2
	b) Ein Portfolio von Versicherten	2
	c) Aufzinsungs - und Diskontierungsfaktoren	4
	d) Der Verlust des Versicherers und das Äquivalenzprinzip	5
III)	General Bonds	6
	a) Nullkuponanleihe	6
	b) Beispiele	6
IV)	Hedgen mit Nullkuponanleihen	7
	a) Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen	7
	b) Hedging eines Portfolios von Risikoversicherungen	8
V)	Yield	10
	a) Yield curves	10
	b) Forward rate	10
	c) Verhältnis der forward rate zur spot rate	12
	d) Simple rate	12
VI)	Marktwert der garantierten Zahlungen	13
	a) Marktwert und forward rate	14
VII)	Arbitrage-free pricing	16
	a) Arbitrage Beispiel	16
	b) Gehandelte Assets und Information	16
	c) Ein Zwei-Perioden Modell	17
	d) Investmentstrategien und Werteprozesse	18
	e) Der Kostenprozess	19
	f) Selbstfinanzierende Strategien und Arbitrage	20
	g) Hedgen und Erreichbarkeit	21
	h) Äquivalente Martingalmaße	21
	i) Martingalmaße und Arbitragefreiheit	22
	j) Bepreisung mit einem äquivalenten Martingalmaß	23
VIII)	Modelle für die spot rate in stetiger Zeit	24
	a) Affine Modelle	25
IX)	Marktwerte	27
X)	Literaturquelle	30

I) Vorwort

In meiner Arbeit über die Zinstheorie im Versicherungsgeschäft, werde ich das Grundkonzept über die Berechnung der Zinsen eingehend diskutieren. Dabei werde ich mich nicht nur auf einzelne Verträge beschränken, sondern das gesamte Portfolio einer Versicherung behandeln. Der Zins wird als keine feste Größe angenommen, sondern wird als Nullkuponanleihe eingeführt. Als Literaturquelle habe ich das Werk von Thomas Moller und Morgen Steffensen "Market - Valuation Methods in Life and Pension Insurance", sowie diverse Mitschriften aus Vorlesungen benutzt.

II) Bewertung mit Risikostreuung

In diesem Kapitel stellen sich mehrere Fragen: Wie werden Lebensversicherungsverträge für gewöhnlich bewertet? Welche Methoden stecken dahinter? Was ist die Diversifikation? Um eine Antwort auf diese Fragen zu erhalten, betrachten wir für das Versicherungsgeschäft sehr wichtige *Gesetz der Großen Zahlen* und deren Anwendung im Bereich der Lebensversicherung. Im speziellen betrachten wir Situationen mit stochastischem Zins.

a) Das Gesetz der Großen Zahlen

Eine erste Version des Gesetzes wurde vom Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli formuliert. Dieser beobachtete, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses (z.B. Münzwurf) mit steigender Durchführung des Versuches, in der Regel der Wahrscheinlichkeit dieses Zufallsergebnisses annähert (in Falle eines Münzwurfes $\frac{1}{2}$).

Das *Gesetz der Großen Zahlen* spielt besonders für das Versicherungsgeschäft eine wichtige Rolle, da es eine ungefähre Einschätzung des Schadenverlaufes erlaubt. Das Gesetz nimmt an Genauigkeit zu, je größer die Menge der Versicherten ist. Es kann aber nichts darüber aussagen, wer im einzelnen von einem Schaden betroffen sein wird. Das Gesetz bietet eine Möglichkeit dem Zufall eine „Vorhersagbarkeit“ zuzuordnen, obwohl es bei Großereignissen (Naturkatastrophen etc.) teilweise unbrauchbar wird.

b) Ein Portfolio von Versicherten

Betrachten wir nun ein Portfolio von l_x identischen n -jährigen Erlebensfallverträgen mit Versicherungssumme 1. Mit l_{x+t} für $t \geq 0$ bezeichnen wir die erwartete Anzahl der Lebenden mit $x + t$ Jahren.

Wir betrachten hier folgende Standardannahmen:

- Für die Versicherungsnehmer l_x im Alter x und zum Zeitpunkt 0 sind die Restlebenszeiten gegeben durch T^1, \dots, T^{l_x} . Alle haben die gleiche Überlebenswahrscheinlichkeit, die gegeben ist durch:

$$- {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+u) du\right) \quad (1)$$

wobei die Sterblichkeitsintensität μ eine deterministische Funktion ist. Dabei könnte μ z.B. eine *Gompertz - Makeham* Intensität der Form:

$$- \mu(x+t) = \alpha + \beta c^{x+t} \quad (2)$$

sein.

- Die Verträge werden durch eine Prämie $\Pi(0)$ zum Zeitpunkt 0 bezahlt.

Die Zahl der Versicherungsnehmer l_x , die nach n Jahren noch am Leben ist, kann natürlich nicht genau vorhersehbar sein. Je größer allerdings das Portfolio ist, umso genauer liegt die Zahl der Überlebenden in n Jahren bei den erwarteten l_{x+n} . Dies ist ein Resultat des *Gesetzes der Großen Zahlen*. Man führt den Indikator $I_{T^i > n}$ ein, sodass der i -te Versicherungsnehmer n Jahre überlebt. Das Verhältnis zwischen der (unbekannten) Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt n und den Versicherungsnehmer l_x die den Vertrag zum Zeitpunkt 0 abgeschlossen haben kann wie folgt geschrieben werden:

$$\bullet \frac{1}{l_x} \sum_{i=1}^{l_x} I_{T^i > n} \quad (3)$$

Diese Situation ist mit dem Münzwurf vergleichbar. Wegen des *Gesetzes der Großen Zahlen* konvergiert (3) gegen:

$$\bullet E[I_{T^1 > n}] = P(T^1 > n) = {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (4)$$

für $l_x \rightarrow \infty$. Dies gilt nur falls die Lebensdauer der Versicherungsnehmer unabhängig ist. Also ist die Anzahl der tatsächlich Überlebenden nahe bei l_{x+n} falls l_x groß ist:

$$\bullet \sum_{i=1}^{l_x} I_{T^i > n} \approx l_x n p_x = l_{x+n} \quad (5)$$

Die Annahme der Unabhängigkeit der Versicherungsnehmer ist für die Konvergenz unbedingt erforderlich. Falls die Sterbeintensität μ stochastisch ist, impliziert das *Gesetz der Großen Zahlen* die Konvergenz von (3) gegen eine Konstante im Allgemeinen nicht. Man unterscheidet zwischen dem Unsystematischen - und Systematischen Sterberisiko.

- Systematisches Risiko: Hängt mit den Konsequenzen der stochastischen Änderung in der Sterbeintensität zusammen.
- Unsystematisches Risiko: Hängt mit der versicherten Lebensdauer zusammen und kann mit der Vergrößerung des Portfolios vermieden werden, was beim Systematischen Risiko nicht möglich ist.

c) Aufzinsungs - und Diskontierungsfaktoren

Wie verhält sich die jährliche Zinsrate zur Zinsintensität? Wie werden Zinsraten behandelt, die für die Länge des Vertrages nicht konstant sind?

Aufzinsungsfaktoren falls die Zinsrate i konstant ist:

- $r = \ln(1 + i)$
- $S(t) = e^{rt} = (1 + i)^t \quad (6)$
- $\frac{d}{dt}S(t) = rS(t) \quad (7)$

Wobei $S(t)$ der t - jährige Aufzinsungsfaktor ist und die Differentialgleichung (7) mit der Anfangsbedingung $S(0) = 1$ erfüllt.

Analog definiert man für konstantes i die Diskontierungsfaktoren:

- $v = \frac{1}{1+i} = e^{-r}$
- $S(t)^{-1} = v^t = (1 + i)^{-t} = e^{-rt} \quad (8)$

Wobei nun $S(t)^{-1}$ der t - jährige Diskontierungsfaktor ist.

Betrachten wir nun den Fall, dass i nicht konstant ist:

Sei $i(s)$ die Zinsrate im Jahr s . Die Zinsintensität $r(s)$ für das Jahr s ergibt sich nun durch die Gleichung:

- $(1 + i(s)) = e^{r(s)}$
- $S(t) = (1 + i(s)) \dots (1 + i(t)) = \exp(\sum_{s=1}^t r(s)) \quad (9)$

ist in diesem Fall der t - jährige Aufzinsungsfaktor.

Für den Fall, dass sich die Zinsintensität r öfters als einmal im Jahr ändert, betrachten wir $r(u)$ zu beliebiger Zeit u . Man führt in der Gleichung (7) r als zeitabhängig ein:

- $\frac{d}{dt}S(t) = r(t)S(t)$

Wir bekommen nun unseren Aufzinsungs - bzw. Diskontierungsfaktor zum Anfangswert $S(0) = 1$

- $S(t) = \exp\left(\int_0^t r(u), du\right)$ (10)

- $S(t)^{-1} = \exp\left(-\int_0^t r(u), du\right)$ (11)

Ein Vorteil ist nun, dass man Zinsraten erlaubt, sich über die Zeit zu ändern und man die Zinsintensität als Funktion der Zeit ansieht. Dieses System kann benutzt werden um realistischere Modelle mit stochastischer Zinsrate zu beschreiben.

d) Der Verlust des Versicherers und das Äquivalenzprinzip

Betrachten wir nun ein Portfolio von l_x Erlebensversicherungen, die eine Einheit zum Zeitpunkt n auszahlen, und durch eine Prämie $\Pi(0)$ zum Zeitpunkt 0 getilgt werden. Die Anzahl der Überlebenden ist deterministisch und gleich l_{x+n} . Der Barwert der Leistung zum Zeitpunkt 0 ist gegeben als: $S(n)^{-1}l_{x+n}$.

Der Wert der Prämien zum Zeitpunkt 0 ist $l_x\Pi(0)$. Hier ist kein Diskontieren nötig, da die Prämien zum Zeitpunkt 0 bezahlt werden. Der Verlust des Versicherers ist nun gegeben als:

- $L = l_{x+n}S(n)^{-1} - l_x\Pi(0)$ (12)

Die Prämie $\Pi(0)$ wird als fair bezeichnet, falls $L = 0$ ist. Falls $S(n)$ deterministisch ist, so ist die faire Prämie die Äquivalenzprämie, wobei $S(t) = \exp\left(\int_0^t r(u), du\right)$ ist. Aus der Gleichung (12) erhalten wir nun:

- $\pi(0) = \frac{l_{x+n}}{l_x} \exp\left(-\int_0^n r(u)du\right) = {}_n p_x \exp\left(-\int_0^n r(u)du\right)$ (13)

entspricht nun dem Barwert der Leistungen. Wir können dieses Argument nur realisieren, falls $S(n)^{-1}$ deterministisch ist.

Wir haben nun gesehen, dass das Sterberisiko vermeidbar ist, falls die versicherten Leben unabhängig sind und man die Größe des Portfolios anhebt. Die Beseitigung des Diskontierungsfaktors $S(n)^{-1}$ ist jedoch nicht möglich falls $S(n)$ zufällig ist. Man kann jedoch das Risiko der zukünftigen Entwicklung des Zinssatzes durch *Nullkuponanleihen* (*zero coupon bonds*) in den Griff bekommen.

III) General Bonds

Eine allgemeine Anleihe *General Bond* die zum Zeitpunkt τ_0 mit den Zahlungen c_0, \dots, c_n zu den Zeiten $\tau_1 < \dots < \tau_n$ ausgestellt wird, hat den Wert für $t \geq \tau_0$ gleich:

$$\bullet P(t) = \sum_{i:\tau_i > t} P(t, \tau_i) c_i \quad (14)$$

Dies ist zugleich der Preis, der zu keiner Möglichkeit eines risikofreien Gewinnes führt. Dies kann durch ein einfaches Arbitrage - Argument gezeigt werden. Wobei $P(t, \tau_i)$ der Preis einer *Nullkuponanleihe* zur Zeit t mit Fälligkeit τ_i ist. Somit kommen wir zur Definition der *Nullkuponanleihe*:

a) Nullkuponanleihe

Der Begriff *Nullkuponanleihe* stammt von der englischen Bezeichnung *Zero Coupon Bond*. Bei dieser Sonderform handelt es sich um ein verzinsliches Wertpapier in Form einer Anleihe bei der keine laufenden Zinsen ausbezahlt werden. Lediglich am Ende der Laufzeit erfolgt eine Auszahlung. Der Anleger erzielt seinen Gewinn demnach aus dem gestiegenen Verkaufspreis am Ende der Laufzeit, der höher liegt als der Erwerbspreis.

Eine *Nullkuponanleihe* mit Fälligkeit T ist ein Vertrag, der eine Einheit zum Zeitpunkt T ausbezahlt. Der Preis im Intervall $t \in [0, T]$ ist gegeben als $P(t, T)$ mit $P(t, t) = 1$

b) Beispiele

Typische Beispiele sind der *Annuity Bond* und der *Bullet Bond*. Beim *Annuity Bond* sind die Zahlungen $c_k = c$, also konstant für alle k .

Den *Bullet Bond* erhält man falls:

- $c_k = L(\tau_k - \tau_{k-1})K$ für $k = 1 \dots n - 1$
und
- $c_n = L(\tau_n - \tau_{n-1})K + K$ für $k = n$

L ist hier eine *simple rate*, die wir später noch erläutern werden, und K ein beliebiges Kapital. Der Eigentümer der Anleihe erhält zum Zeitpunkt τ_k die einfache Zinsrate $L(\tau_k - \tau_{k-1})$ auf das Kapital K für das Zeitintervall $[\tau_{k-1}, \tau_k]$. Zum Zeitpunkt τ_n wird dann K gemeinsam mit den Zinsen für das Intervall $[\tau_{n-1}, \tau_n]$ zurückgezahlt.

IV) Hedgen mit Nullkuponanleihen

Der Begriff *hedgen* kommt aus dem englischen und bedeutet so viel wie absichern. Das Hedgegeschäft bezeichnet ein Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken wie beispielsweise Wechselkursschwankungen oder zukünftige Veränderungen des Zinssatzes. Ihm liegt die Absicht zugrunde einen gegenwärtig als annehmbar empfundenen Preis für die Zukunft festzulegen. Ein perfekter Hedge eliminiert jegliches Risiko, ist aber in der Praxis fast unmöglich. In diesem Kapitel modifizieren wir das Äquivalenzprinzip, sodass der Versicherer mittels Handeln mit Nullkuponanleihen das Risiko der Zinsänderung kontrollieren kann.

a) Hedging eines Portfolios von Erlebensversicherungen

Angenommen der Versicherer investiert zum Zeitpunkt 0 in $l_x \kappa$ Einheiten eines n -bonds. Der Barwert des Verlustes des Versicherers von den l_x Erlebensversicherungen ist gegeben durch:

$$\bullet \tilde{L} = (l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0)) + l_x \kappa (P(0, n) - 1 \cdot S(n)^{-1}) \quad (15)$$

Der 1. Teil der Gleichung entspricht dem Barwert des Verlustes ohne die n -Anleihen, und der 2. Teil dem Barwert des Verlustes zum ZP 0 vom Kauf von $l_x \kappa$ n -Anleihen um den Preis $P(0, n)$. Falls man die Terme etwas umordnet erhält man:

$$\bullet \tilde{L} = (l_{x+n} - l_x \kappa) S(n)^{-1} + l_x (\kappa P(0, n) - \pi(0)) \quad (16)$$

Durch Umformungen sieht man, dass der erste Teil gleich Null ist falls $\kappa = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x$, und der zweite Teil gleich Null ist falls:

- $\pi(0) = {}_n p_x P(0, n) \quad (17)$

Die faire Prämie aus Gleichung (17) hat eine sehr natürliche Form. Es ist der Preis zum Zeitpunkt 0 einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit n multipliziert mit der Überlebenswahrscheinlichkeit. Im Portfolio mit l_x Versicherungsnehmern sollte der Versicherer $l_x {}_n p_x = l_{x+n}$ Anleihen kaufen, was wiederum der erwarteten Anzahl von Überlebenden entspricht. Der Wert der Anleihe zur zukünftigen Zeit t die zum Zeitpunkt 0 gekauft wurde ist gegeben durch:

- $l_x {}_n p_x P(t, n) = l_{x+n} P(t, n) \quad (18)$

Der Marktwert zur Zeit t der garantierten Zahlungen, verbunden mit den l_{x+t} Erlebensversicherungen ist gegeben durch:

- $l_{x+t} {}_{n-t} p_{x+t} P(t, n) = l_{x+n} P(t, n) \quad (19)$

Dies gilt, da das Argument zur Ermittlung des Preises zum Zeitpunkt 0 des garantierten Teiles der Erlebensversicherung zur Zeit t für jeden der l_{x+t} anderen Versicherungsnehmer wiederholt werden kann. Dies zeigt nun, dass der Marktwert der Leistungen exakt gleich ist dem der Investments (der Assets) zu irgendeiner Zeit t für jede zukünftige Entwicklung des Wertes der Nullkuponanleihe ist. Der Marktwert der garantierten Zahlungen hängt nicht von der Investmentstrategie des Unternehmens ab, obwohl der Marktwert durch ein hedging - Argument abgeleitet wird. Wenn es möglich wäre, solche Verträge zu kaufen, und zu Preisen verkaufen, die vom Marktwert abweichen, könnte man indem man in Nullkuponanleihen investiert, risikofreie Gewinne erzielen (arbitrage).

b) Hedging eines Portfolios von Risikoversicherungen

Betrachten wir nun ein Portfolio von l_x Risikoversicherungen, wobei die Anzahl der Toten im Jahr t , also $x + t$ - jährigen betrachtet zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch:

- $d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1} \quad (20)$

Der Einfachheit halber ist die Versicherungssumme am Ende des Jahres zu entrichten. In diesem Fall muss das Argument, das für die Erlebensversicherungen benutzt wurde, leicht modifiziert werden, sodass das Unternehmen in Nullkuponanleihen mit Fälligkeiten $t = 1, 2, \dots, n$ investiert. Das Unternehmen investiert zum Zeitpunkt 0 in $l_x \kappa$ t-bonds zum Preis $P(0, t)$. Der Verlust des Versicherers zum Zeitpunkt 0 ist demnach:

$$\bullet \tilde{L} = \left(\sum_{t=1}^n d_{x+t-1} S(t)^{-1} - l_x \pi(0) \right) + l_x \sum_{t=1}^n \kappa(t) (P(0, t) - 1 \cdot S(t)^{-1}) \quad (21)$$

Die Interpretation erfolgt auf die gleiche Weise wie bei den Erlebensversicherungen. Durch Umformungen erhält man nun:

$$\bullet \tilde{L} = \sum_{t=1}^n (d_{x+t-1} - l_x \kappa(t)) S(t)^{-1} + l_x \left(\sum_{t=1}^n \kappa(t) P(0, t) - \pi(0) \right) \quad (22)$$

Der erste bzw. der zweite Teil sind Null falls:

$$\bullet \kappa(t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = {}_{(t-1)|1}q_x = {}_{t-1}p_x q_{x+t-1} \text{ bzw.} \quad (22)$$

$$\bullet \pi(0) = \sum_{t=1}^n {}_{(t-1)|1}q_x P(0, t) \quad (23)$$

Diese faire Prämie unterscheidet sich von der klassischen Formel die wir vorher gesehen haben. An die Stelle des Diskontierungsfaktors kommt jetzt die Nullkuponanleihe. Wir haben jetzt nur den Fall betrachtet, dass die Versicherungsleistung erst am Ende des Todesjahres ausgezahlt wird. Falls die Leistung bereits im Todeszeitpunkt erbracht werden soll, brauchen wir eine stetige Version von (23). Für kleine h gilt nun:

$$\bullet {}_{t|h}q_x \approx {}_t p_x \mu(x+t)h$$

also wird aus (23):

$$\bullet \pi(0) = \int_0^n {}_t p_x \mu(x+t) P(0, t) dt \quad (24)$$

Es ist nun nicht mehr möglich, dass $\tilde{L} = 0$ ist, da es unendlich viele Zahlungszeitpunkte gibt. Wenn man jedoch genügend Nullkuponanleihen auswählt kann \tilde{L} beliebig nahe an Null angenähert werden.

V) Yield

Yield (Rendite) ist der jährliche Gesamtertrag eines angelegten Kapitals, meist in Prozenten des angelegten Kapitals ausgedrückt. Es existieren verschiedene Arten von Renditen, wobei bei der Geld- oder Kapitalanlage immer ein mit der Rendite verbundenes Risiko beachtet werden muss.

a) Yield curves

Der laufend zusammengesetzte *Nullkupon - yield* (spot rate) $R(t, T)$ für den Zeitraum $[t, T]$ ist definiert als:

- $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T)$ (25)

Nun sieht man, dass der Preis der Nullkuponanleihe durch den laufend zusammengesetzten *Nullkupon - yield* ausgedrückt werden kann:

- $P(t, T) = \exp(-R(t, T)(T - t))$ (26)

Die Gleichung (26) kann als Diskontierungsfaktor im Intervall $[t, T]$, zum konstanten Zinssatz $R(t, T)$ interpretiert werden. Die Zinsintensität hängt jedoch vom Preis der Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t ab.

Die Zinsstruktur zum Zeitpunkt t (die *zero coupon yield curve*) ist gegeben durch die Abbildung:

- $h \mapsto R(t, t + h)$

b) Forward rate

Die *forward rate* (Terminzins) ist jener Zinssatz, der zur Zeit t (heute) für eine zukünftige Investition zur Zeit T' vereinbart wird und zur Zeit T endet. Wir betrachten also Zeit von $0 \leq t \leq T' \leq T$. Wir können den *yield* $R(T', T)$ nicht benutzen, da dieser mit $P(T', T)$ Termen definiert ist, und diese zum Zeitpunkt t unbekannt sind.

Die laufend zusammengesetzte *forward rate* zum Zeitpunkt t für den Zeitraum $[T', T]$ ist definiert durch:

$$\bullet f(t, T', T) = -\frac{\log P(t, T) - \log P(t, T')}{T - T'} \quad (27)$$

Um ein besseres Verständnis der *forward rate* zu erhalten, sehen wir, dass das Verhältnis zum Preis t für einen T -bond und T' -bond gegeben ist durch:

$$\bullet \frac{P(t, T)}{P(t, T')} = \exp(-f(t, T', T)(T - T')) \quad (28)$$

Was interpretiert werden kann als:

- verkaufe einen T' -Bond zum Zeitpunkt t und erhalte $P(t, T')$
- zum Zeitpunkt t : verwende $P(t, T')$ um $\frac{P(t, T')}{P(t, T)}$ Einheiten eines T -Bonds zu kaufen
- zum Zeitpunkt T' zahle man eine Einheit an den T' - Bond
- zum Zeitpunkt T erhalte man $\frac{P(t, T')}{P(t, T)}$ vom T -Bond

Die *instantaneous forward rate* (sofortige Terminzins) zum Zeitpunkt t für die Zeit T ist definiert als:

- $f(t, T) = -\frac{d}{dT} \log P(t, T) \quad (30)$
- Die *instantaneous short rate* zum Zeitpunkt t ist $r(t) = f(t, t)$

Durch Umformungen erhalten wir:

$$\bullet P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, \tau) d\tau\right) \quad (31)$$

Es ist nötig, dass der zukünftige bond Preis zum Zeitpunkt t bekannt ist. Dies bedeutet, dass die *instantaneous short rate* deterministisch ist. Die Gleichung (31) zeigt nun, dass sich der Preis der Nullkuponanleihe direkt von der *instantaneous forward rate* herleiten lässt.

c) Verhältnis der forward rate zur spot rate

Aus der Gleichung (28) folgt mit $T' = t$, dass

- $f(t, t, T) = R(t, T)$

die *forward rate* zur Zeit t für das Intervall $[t, T]$ stimmt mit der *spot rate* für $[t, T]$ überein.

Durch Kombination der Gleichungen (26) und (31) erhalten wir:

- $\frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, \tau) d\tau = R(t, T) \quad (32)$

Dies zeigt nun, dass der *Nullkupon - yield* für das Intervall $[t, T]$ als Durchschnitt der *instantaneous forward rate* interpretiert werden kann.

d) Simple rate

Als Alternative zur *continuously compounded rates* (laufend zusammengesetzte Zinsen), werden nun *simple rates* oder *simple yields* betrachtet. Diese *simple rates* unterscheiden sich von den gewöhnlichen *compounded rates* insofern, dass ehemalige Zinsen in der Berechnung der neuen Zinsen nicht berücksichtigt werden.

Betrachten wir ein Zeitintervall $[s, t]$ ein Kapital P und eine *simple rate* L , so ist der Zins gegeben als: $PL(t - s)$

Mit stetiger Aufzinsung unter einem konstanten Zinssatz r , steigt das Guthaben von Pe^{rs} auf Pe^{rt} für das Intervall $[s, t]$.

Also kann der Zinsgewinn geschrieben werden als: $P(e^{rt} - e^{rs}) = Pe^{rs}(e^{r(t-s)} - 1)$

Der *simple yield* oder (*simple spot rate*) für ein Intervall $[t, T]$ ist gegeben als:

- $L(t, T) = -\frac{P(t, T) - 1}{(T-t)P(t, T)} \quad (33)$

Die *simple forward rate* für ein Intervall $[T', T]$ zum Zeitpunkt t ist gegeben als:

$$\bullet L(t, T', T) = -\frac{P(t, T) - P(t, T')}{(T - T')P(t, T)} \quad (34)$$

Nun folgt aus der Definition der *simple spot rate*:

$$\bullet L(t, T)(T - t)P(t, T) = 1 - P(t, T) \quad (35)$$

Wir kommen zu folgender Interpretation:

Der rechte Teil ist genau der Ertrag im Zeitraum $[t, T]$ vom Kauf einer T-Anleihe mit Preis $P(t, T)$ zum Zeitpunkt t , und vom Einlösen des Betrages 1 zum Zeitpunkt T .

Der linke Teil ist jener Anteil, der im Zeitraum $[t, T]$ in Kombination mit der Investition von $P(t, T)$ unter der konstanten *simple rate* $L(t, T)$ anfällt.

VI) Marktwert der garantierten Zahlungen

Betrachten wir die Hedging-Argumente aus dem 4. Kapitel, so folgt, dass der Marktwert (der faire Preis) zum Zeitpunkt t einer n - jährigen Erlebensversicherung garantiert zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch:

$$\bullet b^a(0)P(t, n) {}_{n-t}p_{x+t} \quad (36)$$

wobei ${}_{n-t}p_{x+t}$ die Überlebenswahrscheinlichkeit eines $x + t$ - jährigen ist $n - t$ Jahre zu überleben und $b^a(0)$ der Erlebensleistung entspricht. Die Nullkuponanleihe tritt hier als Diskontierungsfaktor auf.

Der Marktwert zum Zeitpunkt t für den Teil des Vertrages der b^{ad} im Todeszeitpunkt vor n ausbezahlt, ist gegeben durch:

$$\bullet b^{ad} \int_t^n P(t, s) {}_{s-t}p_{x+t} \mu(x + s) ds \quad (37)$$

wobei $P(t, s)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t mit Fälligkeit s ist. Der Marktwert zum Zeitpunkt t der zukünftigen Prämie lautet:

$$\bullet \pi \int_t^n P(t, s) {}_{s-t}p_{x+t} ds \quad (38)$$

Kombinieren wir nun diese drei Ausdrücke, erhalten wir folgenden Ausdruck für den Marktwert zum Zeitpunkt t für die garantierten Zahlungen zum Zeitpunkt 0:

- $V^g(0, t) = b^a(0)P(t, n)_{n-t}p_{x+t} + \int_t^n P(t, s)_{s-t}p_{x+t}(\mu(x + s)b^{ad} - \pi)ds \quad (39)$

Wir bezeichnen mit $V^g(t)$ den Marktwert zum Zeitpunkt t für die garantierten Zahlungen zum Zeitpunkt t . Diesen erhalten wir falls wir in Gleichung (39) $b^a(0)$ durch $b^a(t)$ ersetzen. Falls r und μ deterministische Funktionen sind, so wissen wir bereits, dass der Preis der Nullkuponanleihe gegeben ist durch:

- $P(t, s) = \exp(-\int_t^s r(\tau)d\tau)$

Setzen wir dies nun in die Gleichung (39) ein, so erhalten wir:

- $V^g(t, u) = b^a(t) \exp(-\int_u^n r(\tau)d\tau)_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp(-\int_u^s r(\tau)d\tau)_{s-u}p_{x+u}(\mu(x + s)b^{ad} - \pi)ds \quad (40)$

a) Marktwert und forward rate

In diesem Abschnitt leiten wir eine Version der Thiele'schen Differentialgleichung für den Marktwert der garantierten Zahlungen, die die *forward rate* beinhalten her.

Im Kapitel der *forward rate* haben wir gezeigt wie die *instantaneous forward rate* $f(t, \tau)$ zum Zeitpunkt t mit dem Preis der Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t zusammenhängt.

Falls wir den Ausdruck (31) in die Gleichung (40) einsetzen, so erhalten wir:

- $V^g(t, u) = b^a(t) \exp\left(-\int_u^n f(u, \tau)d\tau\right)_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp\left(-\int_u^s f(u, \tau)d\tau\right)_{s-u}p_{x+u}(\mu(x + s)b^{ad} - \pi)ds \quad (41)$

Die Situation $t = u$ ergibt den Marktwert $V^g(t)$ zum Zeitpunkt t der garantierten Zahlung zum Zeitpunkt t , wobei dieser Ausdruck bei stochastischem Zins von Bedeutung ist. In dieser Situation leiten wir einen alternativen Ausdruck für den Marktwert her, der ähnlich zu den klassischen Formeln ist. Der stochastische Zins wird durch die *instantaneous forward rate* zum Zeitpunkt u ersetzt, die zu diesem Zeitpunkt bekannt ist.

Wir betrachten nun eine Version der Thiele'schen Differentialgleichung, die nun die Möglichkeit bietet, eine Differentialgleichung für die individuelle Gewinnzuteilung in einem Modell mit stochastischem Zins herzuleiten. Es ist jedoch nicht möglich eine Differentialgleichung für $V^g(t, u)$ herzuleiten, falls (41) appliziert wird. $V^g(t, u)$ ist eine sehr komplizierte Funktion von u , die von der Zinsrate zum Zeitpunkt u abhängt. Wir führen folgende Funktion ein:

$$\begin{aligned} \bullet \quad V^{g,\circ}(t, u) &= b^a(t) \exp\left(-\int_u^n f(t, \tau) d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ &\quad + \int_u^n \exp\left(-\int_u^s f(t, \tau) d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds \quad (42) \end{aligned}$$

Diese kann als Wert zum Zeitpunkt u für die garantierten Zahlungen zum Zeitpunkt t interpretiert werden, indem man die *instantaneous forward rate* zum Zeitpunkt t verwendet.

$V^{g,\circ}(t, u)$ ist kein echter Marktwert. Der große Vorteil liegt jedoch darin, dass es eine einfache Funktion von u ist und direkt differenzierbar ist. Also erhalten wir folgende Differentialgleichung für $u \geq t$ mit den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial}{\partial u} V^{g,\circ}(t, u) &= f(t, u) V^{g,\circ}(t, u) + \pi - \mu(x+u) R^{g,\circ}(t, u) \quad (43) \\ \bullet \quad V^{g,\circ}(t, t) &= V^g(t) \\ V^{g,\circ}(t, n) &= b^a(t) \end{aligned}$$

wobei $R^{g,\circ}(t, u)$ die Risikosumme ist, gegeben durch

$$\bullet \quad R^{g,\circ}(t, u) = b^{ad} - V^{g,\circ}(t, u)$$

Diese Differentialgleichung bietet eine alternative Methode zur Berechnung von (42): Gegeben ist die Versicherungssumme $b^a(t)$ garantiert zum Zeitpunkt t und die *forward rate* $f(t, u)$ zum Zeitpunkt t . Der Marktwert $V^g(t)$ kann nun berechnet werden, indem die Gleichung (43) für das Intervall $[t, n]$ mit der Bedingung, dass die Zahlung nach dem Erleben von n , garantiert zum Zeitpunkt t gelöst wird.

VII) Arbitrage-free pricing

Was ist ein arbitragefreier Preis (arbitrage-free price)? Was ist ein Martingalmaß? Wie können diese Konzepte auf die Berechnung des Marktwertes in der Lebens- und Pensionsversicherung angewandt werden?

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in das Prinzip der Arbitragefreiheit. Die Hauptidee dahinter ist: Die Preise der gehandelten Assets werden so bestimmt, sodass keine risikofreien Gewinne entstehen können.

a) Arbitrage Beispiel

Als Beispiel eines risikolosen Gewinns oder arbitrage, betrachten wir zwei gehandelte Assets S^0 und S^1 deren Preis zum Zeitpunkt 0 übereinstimmt. Das heißt $S^0(0) = S^1(0)$. Wir wissen außerdem mit Wahrscheinlichkeit 1, dass $S^0(T) \geq S^1(T)$ und $P(S^0(T) > S^1(T)) > 0$.

Wie kann nun ein risikoloser Gewinn erzielt werden?

Man kaufe zum Zeitpunkt 0 eine Einheit des 0. Assets, und verkaufe zugleich eine Einheit des 1. Assets. Zum Zeitpunkt T führt dies nun zu einem Gewinn $V = S^0(T) - S^1(T) \geq 0$ wobei nun gilt, dass $P(V \geq 0) = 1$ und

$P(V > 0) > 0$ Zum Zeitpunkt T erhalten wir $V \geq 0$ obwohl man nichts zum Zeitpunkt 0 bezahlt hat. Dies entspricht einem geschenkten Lotterielos!

Der Grundgedanke beim arbitrage-free pricing ist, dass keine arbitrage Möglichkeit existieren soll. Falls sie existieren würde, wären alle Investoren in diese Strategie interessiert. Es gäbe also nur noch Käufer des billigen Assets (0. Asset im Beispiel) und Verkäufer des teuren Assets (1. Asset im Beispiel).

b) Gehandelte Assets und Information

Wir betrachten in diesem Kapitel einen Finanzmarkt mit zwei gehandelten Assets, deren Preise zum Zeitpunkt t gegeben sind als $S^0(t)$ und $S^1(t)$. Die Preise zum Zeitpunkt u werden durch die Zufallsvariablen $(S^0(u), S^1(u))$ beschrieben und sind vor der Zeit u nicht bekannt.

Die Familie der Preise für den Asset i in diskreter Zeit ist gegeben als $S^i = (S^i(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ und ist ein *stochastischer Prozess*. Um zu wissen, was zum Zeitpunkt t bekannt ist wird eine *Filtration* $(\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ eingeführt. Hier ist $\mathcal{F}(t)$ die Information, die zum Zeitpunkt t bekannt ist. Für $t < u$ gilt: $\mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}(u)$, dies heißt, dass keine Information „verloren“ geht. Mathematisch gesehen ist eine Filtration eine wachsende Folge von σ - Algebren.

Der Preisprozess S^i ist *adaptiert* zu einer Filtration \mathcal{F} , falls der Preis des i . Assets zum Zeitpunkt t Teil der Information $\mathcal{F}(t)$ ist. Dies heißt auch, dass $S^i(t)$ $\mathcal{F}(t)$ messbar ist. Ein *stochastischer Prozess* heißt *vorhersehbar* falls sein Wert zum Zeitpunkt t bereits zum Zeitpunkt $t - 1$ bekannt war.

Wir nehmen an, dass S^0 die Entwicklung eines Sparkontos mit periodischer Zinsrate $i(t)$ für die Periode $(t - 1, t]$ beschreibt, so dass:

- $S^0(t) = (1 + i(1)) \cdot \dots \cdot (1 + i(t))$

wobei $(i(t))_{t \in \{1, \dots, T\}}$ auch ein *stochastischer Prozess* ist.

Nun könnte zum Beispiel S^1 der Wert einer Nullkuponanleihe sein. Den Prozess $S^0(t)$ können wir als Diskontierungsfaktor festlegen, und können weiters die diskontierten Preisprozesse $X(t)$ und $X^0(t)$ einführen, wobei:

- $X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)}$ und $X^0(t) = \frac{S^0(t)}{S^0(t)} = 1$

c) Ein Zwei-Perioden Modell

Betrachten wir in diesem Abschnitt ein einfaches Beispiel mit 2 Perioden. Wir nehmen an, dass zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ gehandelt wird. Weiters wird angenommen, dass die Zinsrate $i(1)$ des Sparkontos für die 1. Periode zum Zeitpunkt 0 bekannt ist, aber $i(2)$ erst zum Zeitpunkt 1 bekannt wird. Der Wert des Sparkontos zum Zeitpunkt 0 ist $S^0(0) = 1$. Ebenso gilt für $S^0(1) = (1 + i(1)) = e^{r(1)}$ und $S^0(2) = (1 + i(1))(1 + i(2)) = e^{r(1)+r(2)}$. Die zukünftige Zinsrate nimmt jeweils nur 2 verschiedene Werte an.

Betrachten wir nun konkrete Werte: $i(1) = 5\%$ und die Zinsrate für die 2. Periode soll entweder $i(2) = 4\%$ oder $i(2) = 6\%$ sein.

Setzen wir nun p gleich:

- $p = P(i(2) = 0.04) = 1 - P(i(2) = 0.06)$ wir bemerken, dass $0 < p < 1$ ist

Das Beispiel $p = \frac{1}{2}$ ist der Fall, sodass beide Ausgänge gleich wahrscheinlich sind.

Es könnte sich nun folgende Frage stellen: Ist es durch diese Annahmen möglich einen Preis der Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $T = 2$ zu finden?

Falls die Zinsrate von 5% auf 6% anwächst, ist es möglich das Geld an einem Sparkonto anzulegen, und am Ende der Periode eine Zinsrate von 6% zu erhalten.

Das gewöhnliche arbitrage Argument zeigt nun, dass der Wert zum Zeitpunkt 1 einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $T = 2$ in dieser Situation gegeben sein muss durch:

- $P(1, 2) = \frac{1}{1.06} \approx 0.943$

Wenn die Zinsrate auf 4% sinkt, erhalten wir:

- $P(1, 2) = \frac{1}{1.04} \approx 0.962$

Wir können den Preis $P(0, 2)$ zum Zeitpunkt 0 aber immer noch nicht exakt bestimmen. Es gibt viele verschiedene Preise der Nullkuponanleihe, welche konsistent mit der Bedingung sind, dass keine Arbitrage möglich sein soll.

Im Folgenden zeigen wir, dass aus der Bedingung keiner Arbitrage nur folgt:

- $0.898 \approx \frac{0.943}{1.05} < P(0, 2) < \frac{0.962}{1.05} \approx 0.916$

Wenn der Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt 0 gegeben ist, ist es möglich die Preise vieler anderer Veträge herzuleiten.

d) Investmentstrategien und Werteprozesse

Eine *Investmentstrategie* ist ein zweidimensionaler Prozess $h = (h^0, h^1)$, sodass $h^1(t)$ vorhersehbar, und $h^0(t)$ adaptiert ist. Das Paar $h(t) = (h^0(t), h^1(t))$ nennt man das Portfolio zur Zeit t . $h^1(t)$ ist die Anzahl der Einheiten des 1.Assets zum Zeitpunkt t . Diese Assets sind Teil des Investmentportfolios im Intervall $(t - 1, t]$.

Die Bedingung der Vorhersehbarkeit von h^1 sichert ab, dass die Anzahl der *Assets*, die wir im Intervall $(t - 1, t]$ haben, zur Zeit $t - 1$ bestimmt wird, basierend auf der Information, die zu dieser Zeit verfügbar ist. Das Guthaben h^0 auf dem Sparkonto soll jedoch nur *adaptiert* sein. So wird aufgrund der zusätzlichen Information die während $(t - 1, t]$ entsteht das Guthaben zum Zeitpunkt t festgelegt.

Das Portfolio zum ZP $t - 1$ ist definiert als:

- $h(t - 1) = (h^0(t - 1), h^1(t - 1))$

Wobei $h^1(t - 1)$ Nullkuponanleihen sind und ein Kapital auf dem Sparkonto mit einem Wert von $h^0(t - 1)S^0(t - 1)$.

Der diskontierte Wert des Portfolios $h(t-1)$ zum Zeitpunkt $t-1$, wobei S^0 als Diskontierungsfaktor dient ist gleich:

- $$V(t-1, h) = S^0(t-1)^{-1}(h^1(t-1)S^1(t-1) + h^0(t-1)S^0(t-1))$$

$$= h^1(t-1)X(t-1) + h^0(t-1) \quad (44)$$

Wobei der Prozess $(V(t, h))_{t \in \{0, 1, \dots, T\}}$ als der diskontierte *Werteprozess* bezeichnet wird.

e) Der Kostenprozess

Es ist von großer Bedeutung die Veränderung des Werteprozesses zu beschreiben und darauf zu achten, ob diese durch neues Kapital oder durch Ausschüttung der Erträge der Kapitalanlagen zustande gekommen ist. Aus diesem Grund wird der sogenannte Kostenprozess (*cost process*) eingeführt.

Wir betrachten nun wieder den Zeitraum $(t-1, t]$. Gleich nach dem Zeitpunkt $t-1$ wird das Portfolio $h(t-1)$ adjustiert, sodass der Hedger nun $h^1(t)$ Bonds hält. Dies wird bewerkstelligt, indem man $h^1(t) - h^1(t-1)$ Bonds kauft.

Dies führt zu den diskontierten Kosten:

- $(h^1(t) - h^1(t-1))X(t-1)$

Das neue Portfolio $(h^0(t), h^1(t-1))$ wird bis zum Zeitpunkt t gehalten. Wenn die neuen Preise $(S^0(t), S^1(t))$ bekannt werden, erhält der Hedger den diskontierten Gewinn:

- $h^1(t)(X(t) - X(t-1))$

Zum Schluss entscheidet der Hedger zum Zeitpunkt t das Guthaben am Sparkonto von $h^0(t-1)S^0(t)$ auf $h^0(t)S^0(t)$ zu ändern, woraus sich die zusätzlichen diskontierten Kosten von $h^0(t) - h^0(t-1)$ ergeben. Dies basiert auf der zusätzlichen Information, die zur Zeit t verfügbar ist.

Wir haben gesehen, dass sich die Veränderung im Investmentportfolio schreiben lässt als:

- $$V(t, h) - V(t-1, h) = (h^1(t) - h^1(t-1))X(t-1)$$

$$+ h^1(t)(X(t) - X(t-1)) + (h^0(t) - h^0(t-1)) \quad (45)$$

Der erste und letzte Term stehen für die Kosten des Hedgers, während der zweite die Gewinne der Strategie h im Zeitraum $(t-1, t]$ repräsentiert. Wir führen nun den Kostenprozess für die Strategie h ein:

$$\bullet C(t, h) = V(t, h) - \sum_{s=1}^t h^1(s) \Delta X(s) \quad (46)$$

Wobei wir benutzt haben, dass $\Delta X(s) = X(s) - X(s-1)$ ist. Der Kostenprozess ist definiert als Wert der Strategie, verringert durch das Handeln von Gewinnen. Der Kostenprozess erfüllt folgende Relation:

$$\bullet V(t, h) = V(t-1, h) + h^1(t)(X(t) - X(t-1)) + (C(t, h) - C(t-1, h)) \quad (47)$$

Dies korrespondiert mit der Gleichung (45). Wir bemerken nun, dass $C(0, h) = V(0, h)$. Man sieht also, dass die Anfangskosten gleich dem Betrag sind der zum Zeitpunkt 0 investiert wird.

f) Selbstfinanzierende Strategien und Arbitrage

Eine Strategie wird als selbstfinanzierend *self-financing* bezeichnet, falls eine Änderung im Werteprozess gegeben durch (45) nur durch das Handeln mit Gewinnen erzeugt wird. Das heißt, dass das Portfolio nicht durch Kapitalab- oder zuwanderung beeinflusst wird. Alle Veränderungen im Portfolio müssen auf einem kostenneutralen Weg geschehen. Der Kauf von Bonds muss durch Verringerung des Guthabens am Sparkonto finanziert werden. Also sehen wir für alle t , dass:

$$\bullet V(t, h) = V(0, h) + \sum_{s=1}^t h^1(s) \Delta X(s) \quad (48)$$

Falls nun die Gleichung (48) in (46) eingesetzt wird, sehen wir, dass der Kostenprozess *cost process* konstant und gleich $V(0, h)$ ist, also gleich dem Wert der Anfangsinvestition zum Zeitpunkt 0. Dies charakterisiert die Selbstfinanzierungs-Strategie in Termen des Kostenprozesses.

Arbitrage ist eine Selbstfinanzierungs-Strategie h , sodass

$$\bullet V(0, h) = 0, \quad P(V(T, h) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad P(V(T, h) > 0) > 0 \quad (49)$$

Die Interpretation ist exakt gleich dem oben angeführtem Beispiel zur Arbitrage. Wir können es wiederum mit einem geschenkten Lotterielos vergleichen.

g) Hedgen und Erreichbarkeit

Der Versicherer investiert am Finanzmarkt in einer Art, um das Risiko verbunden mit einer Leistungspflicht H zu kontrollieren (*hedgen*). In einigen Fällen ist es möglich, eine Selbstfinanzierende-Strategie zu bestimmen, welche die Leistungspflicht komplett repliziert. Dies ist der Fall, wenn eine Selbstfinanzierende-Strategie h existiert, die mit einem Wert $V(0, h)$ beginnt, und mit einem Wert $V(T, h) = H$ zur Zeit T endet.

In diesem Fall ist der Anfangswert $V(0, h)$ der einzig angemessene Preis für H . Solche claims heißen erreichbar und $V(0, h)$ ist der sogenannte arbitrage-freie Preis für H .

In vielen Fällen können die Leistungsverpflichtungen nicht perfekt gehedged werden indem man eine Selbstfinanzierende-Strategie benutzt. Dies lässt die Frage nach der optimalen Handelsstrategie offen.

h) Äquivalente Martingalmaße

Um zum Begriff des *äquivalenten Martingalmaßes* zu gelangen, müssen wir zuerst den Begriff des *Martingals* erläutern. Was ist also ein *Martingal*?

Betrachten wir zunächst wieder den diskontierten Preisprozess X , welcher das Verhältnis des Preises eines bonds S^1 und dem Wert S^0 eines Guthabens auf einem Sparkontos zum Zeitpunkt 0 ist. Hier könnte man sich fragen wie der erwartete diskontierte Preis des Bonds zum Zeitpunkt u lautet. Falls wir mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß P arbeiten, heißt die Antwort $E^P[X(u)]$, dementsprechend ist $E^Q[X(u)]$ die Antwort, falls Q benutzt wird.

Man kann diese Frage noch etwas präziser gestalten, indem wir nach dem erwarteten diskontierten Preis unter Q fragen, wobei die Information $\mathcal{F}(t)$ für $t < u$ hinzugezogen wird. Die Antwort lautet nun:

- $E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] \quad (50)$

Der Prozess X wird nun als *Martingal* unter Q bezeichnet, falls (50) gleich mit dem diskontierten Preis zum Zeitpunkt t ist, also:

- $E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t) \quad \forall t \leq u \quad (51)$

Falls X ein Markov Prozess ist, gilt sogar:

- $E^Q[X(u)|X(t)] = X(t) \quad (52)$

Wir können dies folgendermaßen interpretieren:

Falls $X(t)$ und $X(u)$ die diskontierten Preise eines Bonds zum Zeitpunkt t und u sind und Q ein Martingalmaß ist, so ist der erwartete diskontierte Preis zum Zeitpunkt u identisch mit dem Preis zum Zeitpunkt t .

Wie lässt sich nun ein *äquivalentes Martingalmaß* charakterisieren?

Q wird als *äquivalentes Martingalmaß* bezeichnet, falls X ein *Martingal* unter Q ist. Der Markt ist genau dann arbitragefrei, falls es ein *äquivalentes Martingalmaß* gibt.

Es muss jedoch festgehalten werden, dass der diskontierte Bond Preis X in der Regel kein Martingal unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist. Wir benutzen nun folgende Voraussetzung:

Es existiert mindestens ein *äquivalentes Martingalmaß*.

i) Martingalmaße und Arbitragefreiheit

Betrachten wir in diesem Abschnitt ein *äquivalentes Martingalmaß* Q , sodass der diskontierte Preisprozess ein Q -Martingal ist, das heißt für alle $t < u \in \{0, 1, \dots, T\}$ gilt $E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t)$. Wir wollen zeigen, dass keine Selbstfinanzierende-Strategie h mit $V(0, h)$ existieren kann und wo

$$\bullet V(T, h) = V(0, h) + \sum_{s=1}^T h^1(s) \Delta X(s) \quad (53)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 strikt positiv ist. Um zu zeigen, dass so eine Strategie nicht existieren kann, müssen wir zeigen:

$$\bullet E^Q[V(T, h)] = V(0, h) \quad (54)$$

Warum schließt dies jedoch die Möglichkeiten zur Arbitrage aus?

Falls $V(T, h) \geq 0$ und $E^Q[V(T, h)] = V(0, h) = 0$ ist, muss gelten, dass

$Q(V(T, h) = 0) = 1$. $P(V(T, h) = 0) = 1$, da P und Q zwei äquivalente Martingalmaße sind.

Zu zeigen gilt es noch, dass (54) für jede Selbstfinanzierend-Strategie gilt. Hier benutzen wir die spezielle Konstruktion der Investmentstrategie h , welche sicherstellt, dass h^1 vorhersehbar ist.

Also kommen wir auf folgenden Ausdruck:

$$\bullet E^Q[h^1(s) \Delta X(s) | \mathcal{F}(s-1)] = h^1(s) E^Q[\Delta X(s) | \mathcal{F}(s-1)] = 0$$

Hier wurde benutzt, dass $h^1(s) \mathcal{F}(s-1)$ messbar ist.

Die zweite Gleichung folgt, da X ein Q - Martingal ist, sodass:

- $E^Q[\Delta X(s)|\mathcal{F}(s-1)] = E^Q[X(s) - X(s-1)|\mathcal{F}(s-1)] = X(s) - X(s-1) = 0$

Dies zeigt, dass der Werteprozess (48) für eine Selbstfinanzierende-Strategie auch ein Q -Martingal ist:

- $E^Q[V(u, h)|\mathcal{F}(t)] = V(t, h)$

für alle $t \leq u$. Falls $u = T$ und $t = 0$ gesetzt werden sehen wir, dass:

- $E^Q[V(T, h)] = V(0, h)$

Wir haben nun gesehen: Falls ein äquivalentes Martingalmaß existiert, gibt es keine Strategie h die (49) erfüllt.

j) Bepreisung mit einem äquivalenten Martingalmaß

Betrachten wir nun eine Leistungspflicht, welche die diskontierte Auszahlung H spezifiziert, die durch eine Selbstfinanzierende Strategie h repliziert werden kann:

- $H = V(T, h) = V(0, h) + \sum_{t=1}^T h^1(t)\Delta X(t) \quad (55)$

Im Kapitel „Hedgen und Erreichbarkeit“ haben wir den Begriff eines arbitragefreien Preises kennengelernt und haben gesehen, dass dieser gleich $V(0, h)$ ist. Dieser Preis wird gebraucht um H mit einer Selbstfinanzierenden Strategie zu generieren.

Wir können nun das Martingalmaß Q nutzen um den Erwartungswert der Gleichung (55) zu berechnen. Da der Werteprozess $V(h)$ ein Martingal unter Q ist sehen wir:

- $E^Q[H] = E^Q[V(T, h)] = V(0, h) \quad (56)$

Dieses sehr wichtige Resultat zeigt uns, dass der arbitragefreie Preis für die Leistung als der Erwartungswert der diskontierten Zahlung unter dem äquivalenten Martingalmaß Q berechnet werden kann.

VIII) Modelle für die spot rate in stetiger Zeit

In diesem Kapitel beschreiben wir sogenannte Diffusion Modelle für die spot rate. Wir nehmen an, dass Veränderungen der spot rate in einem kleinen Intervall $(t, t + \Delta t]$ approximiert werden kann durch:

- $r(t + \Delta t) - r(t) = \Delta r(t) \approx v(t, r(t))\Delta t + \sigma(t, r(t))\Delta \bar{W}(t) \quad (57)$

Hier haben wir benutzt, dass $\Delta \bar{W}(t) = \bar{W}(t + \Delta t) - \bar{W}(t)$ ist und v und σ bekannte Funktionen sind. $\bar{W}(t)$ ist eine *Brownsche Bewegung* mit folgenden Eigenschaften: \bar{W} hat unabhängige, normalverteilte Inkremente, mit $\bar{W}(t) - \bar{W}(s) \sim N(0, t - s)$.

Dies bedeutet, dass $\Delta \bar{W}(t) \sim N(0, \Delta t)$.

Es ist möglich r durch eine Intervalllänge Δt zu simulieren, sowie unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen $\Delta \bar{W}(t)$ zu erzeugen um diese in die Gleichung (57) zur Berechnung von R einzusetzen.

Um zu unterstreichen, dass (57) nur für sehr kleine Zeitintervalle gilt, benutzen wir folgende Notation:

- $dr(t) = v(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}(t) \quad (58)$

Ebenso können wir diese Gleichung integrieren und r folgendermaßen schreiben:

- $r(t) = r(0) + \int_0^t v(s, r(s))ds + \int_0^t \sigma(s, r(s))d\bar{W}(s) \quad (59)$

Das Sparkonto S^0 ist definiert durch $S^0(0) = 1$ und

- $dS^0(t) = r(t)S^0(t)dt$

Es ist bekannt, dass nun S^0 gegeben ist durch:

- $S^0(t) = \exp(\int_0^t r(\tau)d\tau)$

Wie bereits oben erwähnt ist $\mathcal{F}(t)$ die Information, die zum Zeitpunkt t bekannt ist. Wir nehmen als $\mathcal{F}(t) = \sigma\{\bar{W}(u), u \leq t\}$. Dies heißt, dass wir die *Brownsche Bewegung* \bar{W} betrachten, was mit der Beobachtung der Zinses r übereinstimmt.

In Kapitel 7 haben wir gezeigt, dass der Preis der Nullkuponanleihe als der Erwartungswert unter einem äquivalenten Martingalmaß Q berechnet werden kann. Wir haben erwähnt, dass das Maß Q durch den Preis der Nullkuponanleihe am Markt bestimmt wird. Betrachten wir nun ein Martingalmaß Q und nehmen an, dass:

$$\bullet \quad dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \quad (60)$$

Wobei die Funktion ν durch eine andere Funktion μ ersetzt wurde und W eine *Brownsche Bewegung* unter Q ist. Mit diesem Martingalmaß ist der Preis zum Zeitpunkt t einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T gegeben als:

$$\bullet \quad P(t, T) = E^Q \left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)} | \mathcal{F}(t) \right] = E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right) | \mathcal{F}(t) \right] \quad (61)$$

Dies sichert uns, dass der diskontierte Preisprozess $\frac{P(t, T)}{S^0(t)}$ ein Martingal unter Q ist.

a) Affine Modelle

In diesem Kapitel behandeln wir Fragen wie: Was ist ein affines Modell? Wie kann der Preis der Nullkuponanleihe im *Vasicek* oder *Cox-Ingersoll-Ross* berechnet werden? Ist es möglich in diesen Modellen die *instantaneous forward rate* festzulegen?

Ein Zinssatzmodell der Form (60) wird als affin bezeichnet, falls:

$$\bullet \quad \begin{aligned} \mu(t, r(t)) &= \alpha(t)r(t) + \beta(t) \\ \sigma(t, r(t)) &= \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)} \end{aligned}$$

wobei α, β, γ und δ bekannte Funktionen sind. Wir kommen nun auf folgendes Resultat für den Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T :

$$\bullet \quad P(t, T) = E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right) | \mathcal{F}(t) \right] = \exp(A(t, T) - B(t, T)r(t)) \quad (62)$$

A und B lösen folgende Gleichungen:

- $\frac{\partial}{\partial t}B(t, T) + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)(B(t, T))^2 = -1$
- $\frac{\partial}{\partial t}A(t, T) = \beta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)(B(t, T))^2$

mit $B(T, T) = A(T, T) = 0$. Die Gleichungen können gelöst werden, wenn man sich in der 1. Gleichung B ausdrückt und dann in die 2. Gleichung einsetzt.

Die *instantaneous forward rate* zum Zeitpunkt t ist nun gegeben als:

- $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log(P(t, T)) = r(t)\frac{\partial}{\partial T}B(t, T) - \frac{\partial}{\partial T}A(t, T) \quad (63)$

Das Vasicek Modell

Das *Vasicek Modell* hat die Form:

- $dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$

Falls obige Differentialgleichungen gelöst werden erhalten wir für A und B:

- $B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T - t)))$
- $A(t, T) = \frac{(B(t, T) - T + t)(ab - (\frac{1}{2})\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2(B(t, T))^2}{4a}$

Die *forward rate* zum Zeitpunkt t kann berechnet werden, indem man diese beiden Ausdrücke nach T ableitet. Wenn dieses Ergebnis in Gleichung (63) eingesetzt wird kann gezeigt werden, dass:

- $f(t, T) = r(t)e^{-a(T-t)} + \left(\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(1 - e^{-a(T-t)})$
 $+ e^{-a(T-t)} \frac{2\sigma^2 B(t, T)}{4a} \quad (64)$

Da $e^{-a(T-t)} \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$, sehen wir, dass $B(t, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a}$.

Dies zeigt uns nun, dass die *forward rate* gegeben durch (64) gegen

$$\bullet \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \quad (65)$$

konvergiert, falls die Fälligkeit (Maturity) gegen unendlich geht. Das *Vasicek Modell* hat den Nachteil, dass auch negative Zinssätze zugelassen werden. Gleichmaßen kann die *forward rate* negativ werden, ein Phänomen das für große Werte von σ eintritt. Anders verhält sich das *Cox-Ingersoll-Ross Modell*:

Cox-Ingersoll-Ross Modell

Das *Cox-Ingersoll-Ross Modell* lässt anders als das *Vasicek Modell* keine negativen Zinssätze zu. Mit dem Modell:

$$\bullet dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

erhalten wir folgende Werte für A und B:

$$\bullet B(t, T) = \frac{2(\exp(\xi(T-t))-1)}{(\xi+a)(\exp(\xi(T-t))-1)+2\xi},$$

$$\bullet A(t, T) = \frac{2ab}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\xi \exp((a+\xi)\frac{T-t}{2})}{(\xi+a)(\exp(\xi(T-t))-1)+2\xi}\right),$$

wobei $\xi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$. Wie im obigen *Vasicek Modell* ist es möglich die *forward rate* durch die Gleichung (63) zu berechnen, die Formeln sind jedoch um einiges komplizierter.

IX) Marktwerte

Am Ende meiner Arbeit möchte ich noch illustrieren wie der Marktwert der garantierten Zahlungen durch den Erwartungswert unter einem äquivalenten Martingalmaß einer diskontierten Auszahlung berechnet werden kann.

Wir benutzen nun alle bisherigen Ergebnisse: In den ersten beiden Kapiteln haben wir gesehen, wie der Marktwert der garantierten Zahlungen berechnet werden kann falls die Zinsrate stochastisch ist. Diese Resultate wurden in Termen mit Preisen von Nullkuponanleihen oder *forward rates* dargestellt.

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gezeigt, dass der Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t mit Fälligkeit n geschrieben werden kann als:

- $$P(t, n) = E^Q \left[\frac{S^0(t)}{S^0(n)} | \mathcal{F}(t) \right]$$

wobei der Erwartungswert unter einem äquivalenten Martingalmaß Q berechnet wird. Dieses Ergebnis kann nun benutzt werden um auf den Marktwert zum Zeitpunkt u der garantierten Zahlungen zum Zeitpunkt t zu kommen:

- $$V^g(t, u) = b^a(t) E^Q \left[\frac{S^0(u)}{S^0(n)} | \mathcal{F}(u) \right]_{n-u} p_{x+u} + \int_u^n E^Q \left[\frac{S^0(u)}{S^0(s)} | \mathcal{F}(u) \right]_{s-u} p_{x+u} (\mu(x+s) b^{ad} - \pi) ds \quad (66)$$

dieser Ausdruck kann umgeformt werden auf:

- $$V^g(t, u) = E^Q \left[b^a(t) \frac{S^0(u)}{S^0(n)}_{n-u} p_{x+u} + \int_u^n \frac{S^0(u)}{S^0(s)}_{s-u} p_{x+u} (\mu(x+s) b^{ad} - \pi) ds | \mathcal{F}(u) \right] \quad (67)$$

In Modellen mit einer stetigen Erhöhung der Zinsrate, können wir die Tatsache $\frac{S^0(u)}{S^0(s)} = \exp \left(- \int_u^s r(\tau) d\tau \right)$ benutzen um die Gleichung (67) umzuformen auf:

- $$V^g(t, u) = E^Q \left[b^a(t) \exp \left(- \int_u^n r(\tau) d\tau \right)_{n-u} p_{x+u} + \int_u^n \exp \left(- \int_u^s r(\tau) d\tau \right)_{s-u} p_{x+u} (\mu(x+s) b^{ad} - \pi) ds | \mathcal{F}(u) \right] \quad (68)$$

In diesen Situationen werden die Marktwerte gleich dem Erwartungswert unter einem äquivalenten Martingalmaß berechnet. Die einzige Zufälligkeit in Gleichung (68) ist, dass sie mit der Entwicklung des Zinssatzes zusammenhängt. Möglich ist es auch mit dem Zahlungsprozess (payment process), welcher die Zahlung garantiert zum Zeitpunkt t beschreibt, zu arbeiten.

Dieser ist definiert als:

- $$dB(t, s) = -\pi I(s)ds + b^{ad}dN(s) + b^a(t)I(s)d\varepsilon(s, n)$$

Wobei $I(s)$ der Indikator für den Fall, dass der Versicherte zum Zeitpunkt s am Leben ist und N ein Zählprozess ist, der die Anzahl der Todesfälle festhält.

$\varepsilon(s, n) = 1$ wenn $s \geq n$ und sonst gleich 0. Mithilfe dieser Notation kann die Gleichung (68) schlussendlich geschrieben werden als:

- $$V^g(t, u) = E^Q \left[\int_u^n \exp\left(-\int_u^s r(\tau)d\tau\right) dB(t, s) | \mathcal{F}(u) \right] \quad (69)$$

Die Unsicherheit mit der zukünftigen Lebenserwartung des Versicherungsnehmers und die Unsicherheit im Zusammenhang mit der zukünftigen Entwicklung des Zinssatzes treten hier simultan auf.

Der Marktwert wird direkt als ein Erwartungswert unter einem Martingalmaß einer Zufallsvariable der Form:

- $$\int_u^n \exp\left(-\int_u^s r(\tau)d\tau\right) dB(t, s) \quad (70)$$

berechnet. Dieses Kapitel hatte den Fokus auf die Berechnung des Marktwertes der garantierten Zahlungen, für eine stochastische Zinsrate. In diesem Fall wird der Diskontierungsfaktor durch den Preis der Nullkuponanleihe ersetzt.

Schlussendlich haben wir gezeigt, dass der Marktwert alternativ durch Verwendung eines äquivalenten Martingalmaßes berechnet werden kann.

X) Literaturquelle

- Möller, Thomas/Steffensen, Mogens:
International Series on Actuarial Science - *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*.
Cambridge University Pres: Cambridge 2007.